ELEMENTOS DE MATEMATICA

TOM. I

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

TOMO I.

ELEMENTOS
DE MATEMÁTICA.

POR D. BENITO BAILS,

Director de Matemáticas de la Real Academia de S. Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia, y de las Ciencias naturales, y Artes de Barcelona.

TOMO I.

SEGUNDA EDICION,

CORREGIDA Y AÑADIDA.

MADRID.

EN LA IMPRENTA DE LA VIUDA DE DON JOAQUIN IBARRA.

M.DCC.LXXXXIII.

PRÓLOGO GENERAL

Donde se dá noticia de algunos Cursos de Matemática publicados en varios idiomas.

Aunque harémos individual mencion de los tratados que estas obras incluyen, quando manifestemos con que auxîlios hemos texido los de la nuestra; sin embargo, no podemos menos de dar desde ahora una noticia por mayor de cada una de ellas, la que baste para manifestar en que discrepan, ó se parecen á la que publicamos. Procuraremos hacer en este cotejo el papel de un mero relator, sin pretension alguna de deslucir á los Escritores beneméritos, sean de la nacion que fueren, que entraron antes que nosotros en la misma carrera; que el apuntar los defectos de una obra no siempre arguye empeño ó intencion de desacreditarla, mayormente quando el que los apunta reconoce que tendrán seguramente mucho que suplir en sus escritos, como nosotros lo confesamos de los nuestros, los hombres ilustrados que los registraren.

Los Cursos de Matemática, que han llegado á nuestras manos, no todos son completos; algunos solo tratan de la parte especulativa de la Matemática, ó de la Matemática Pura, y en esto se diferencian esencialmente del nuestro. Pero no por eso dexarémos de incluirlos en este cotejo, movidos de algunas circunstancias que los hacen muy recomendables.

El Curso del qual nos toca hacer mencion antes que de otro alguno, es el del P. Tosca, Valenciano (1), sacado casi todo del que publicó en latin á mediados del último siglo Dechales, Saboyano (2), cuyo Compendio, atendido el tiempo en que salió á luz, no se puede negar que es de todo punto cabal. Para el tiempo presente, por razon de los muchos adelantamientos que ha hecho la Matemática con el talento y aplicacion de los Geómetras de este siglo, y fines del pasado, es sin duda alguna incompleta y diminuta la obra del Escritor Valenciano. Porque no trata ni del cálculo *diferencial*, ni del integral; y así debia ser una vez que es tan poco lo que trae de Algebra, y omite la teórica de las Curvas, doctrina muy necesaria para las investigaciones peculiares á la análisis superior; y en punto de Arquitectura, sobre no hablar de la Hidráulica, lo mas de lo que enseña acerca de la Civil se reduce al *ornato*, *sin detenerse* en ninguna de sus dos partes fundamentales la distribucion y la edificacion. Verdad es que trata de la Arquitectura Militar, de la Artillería, de la Navegacion, cuyos tratados nos pareció oportuno excluir de nuestro plan, por motivos que acaso ma-

(1) *Compendio Matemático, en que se contienen las materias mas principales de las Ciencias, que tratan de la cantidad, que compuso el Dr. Thomas Vicente Tosca, Presbítero de la Congregacion del Oratorio de San Felipe Neri de Valencia.* Valencia 1709... 1715. nueve tomos en 8.

(2) *R. P. Francisci Milliet Dechales Camberiensis Cursus seu Mundus Mathematicus.* Leon de Francia 1690. segunda edicion, quatro tomos en fol.

manifestaremos (3) á su tiempo. Como quiera, dos circunstancias sumamente apreciables concurren en la Obra de Tosca; es á saber, mucha claridad (tambien es suma la de Dechales), y una disposicion general de los tratados, igualmente que una coordinacion particular de cada uno de ellos muy bien entendida: de modo que no dudamos afirmar, que si se le hubiese hecho en estos tiempos al P. Tosca el mismo encargo que á nosotros, tendria España muchos motivos de celebrar tan bien fundada preferencia, así como no hubiera salido tal vez tan precioso de nuestras manos como de las suyas el extracto del Mundo Matemático de Dechales.

Síguese el Curso de Wolf ó Wolfio, Aleman (4), el mas antiguo, mas conocido, y mas completo de los Cursos modernos hasta de pocos años á esta parte. Es constante que puso Wolfio mucha diligencia en la formacion de su Curso, y que tuvo noticia de lo mas que publicaron los Matemáticos que le precedieron, conforme lo están manifestando los eruditos Escolios ó notas con que hermoseó sus tratados; pero es tambien notorio que despues de publicada su Obra se han dado á luz otras muchas, que han perficionado inmensamente todos los ramos de la Matemática, ya se atienda á los inventos de

(3) Insinúolos en la primer plana del Prólogo á la parte del Tratado de Arquitectura Hidráulica, publicada en 1790.

(4) *Christiani Wolfii &c. Elementa Matheseos universæ.* Ginebra 1743. cinco tomos en 4.

sus autores, ya á su singular destreza en proponer con mejor método los agenos. Euler, Cramer, Ricati, Stirling, &c. han promovido muchísimo, despues que Wolfio escribió, la doctrina de las Series; todos los tratados que hoy dia tenemos de Cálculo Integral son posteriores á la publicacion de su Curso; y la Dinámica, Hidrodinámica, Optica y Astronomía han adelantado infinito con las investigaciones de Juan y Daniel Bernouli, de d'Alembert, Euler, Bougainville, Clairaut, Micheloti, Bossut, Buhat, Lambert, Halley, la Caille, la Lande, Bailly &c. siendo cierto que desde que salió á luz la Obra de Wolfio han mudado enteramente de semblante las Matemáticas. Estas obras modernas, de donde hemos sacado todo lo que incluye la nuestra, le grangean un grado de estimacion superior al que merece la Obra del Escritor Aleman, por la mucha ventaja que los materiales de que nos hemos valido llevan á los que él *tuvo á mano*; porque no es posi*ble* dexe de perficionarse una ciencia, sea la que fuere, quando se dedican á porfia á promover sus adelantamientos muchísimos ingenios de talentos y naciones tan diferentes. Pero si nuestros tratados son por la calidad de su doctrina acreedores á algun grado mas de estimacion que los de Wolfio, lo son tambien por la extension con que declaramos sus diferentes puntos: en solo un tomo incluyó aquel Escritor toda la Matemática Pura, que llena los tres primeros de nuestros Elementos: para cada tratado mayor de Matemática Mixta hemos destinado un tomo, y sie-

siete para todos entre mayores y menores, quando Wolfio los trae todos en tres tomos no mas; y últimamente, nos lisongeamos con que merezca alguna consideracion un tomo entero que nos proponemos publicar de Tablas, donde con unas Logarítmicas y Trigonométricas de muy buen caracter, estarán las Astronómicas mas extensas y puntuales que se han visto en Europa hasta el año de 1771 (5).

¿Quien creerá que la Nacion Francesa, tan propensa á escribir, esté todavía sin un Curso completo de Matemáticas? Si alguna Obra suya pudiera merecer esta calificacion, es la que dió á luz el Abate la Caille (6) con el título de *Lecciones*, la qual por la suma concision con que está escrita dá muy bien á conocer la profunda doctrina de aquel laboriosísimo Matemático. Su tomo primero, donde trae los tratados de Matemática Pura, es tan sobremanera conciso, que se han publicado dos Es-

cri-

(5) Esta era al principio mi intencion, y en ella me mantenia quando salió por primera vez á luz este tomo el año de 1779; pero me determiné despues á publicar separadamente las Tablas Logarítmicas y Trigonométricas en 1787, obligado de las consideraciones especificadas en el Prólogo al tomo que forman, á las quales tenia que añadir otras dos, que entonces tuve por oportuno callar: primera, el haber salido á luz nuevas Tablas Astronómicas formadas por direccion de la Academia de Berlin, que se las encargó al difunto Lambert, individuo suyo: segunda, el constarme que el original de las impresas por mí se estaba reimprimiendo muy perficionado en París, cuya segunda impresion la ha retardado muchos años un suceso muy notorio á toda Europa.

(6) *Leçons élémentaires de Mathematiques, &c. par Mr. l'Abbé de la Caille, &c.* Paris 1764. quatro tomos en 8. es segunda edicion.

critos para aclararle, sin lograr el fin ninguno de sus Autores. El autor del primero (7), sobre dar muestras de no tener tino alguno matemático, es difuso, molesto, y pesadísimo hablador en lo fácil, y mudo en lo dificultoso. El autor del otro no llevó la mira (8) de aclarar al Abate la Caille; su intento fué substituir otras lecciones en lugar de las de su antecesor (9), tan dificultosas de entender en algunas partes como las de la Caille; honrando su portada con el nombre de aquel ilustre y acreditado Geómetra, tan seguro como deseoso de grangear con este sobrescrito apasionados á su libro.

Sobre estar escritas las Lecciones de la Caille con la extremada concision que hemos dicho, les faltan muchos tratados para que merezcan lugar entre los Cursos de Matemática; porque de los principales solo incluyen la Mecánica, Optica y Astronomía, y de los de segunda orden no tienen mas que la Perspectiva. Pero quando ponderamos tanto la concision con que están escritas, no es á buen seguro nuestro ánimo hacer el mas leve perjuicio á la memoria de su autor, aun quando fuera bastante para tan odioso fin nuestra decision; á todos consta que no fué de

(7) *Le guide des jeunes Mathématiciens, dans l'étude des Elémens des Mathématiques de Mr. l'Abbé de la Caille.* París 1765. un tomo en 8.

(8) *Leçons élémentaires de Mathématiques, par Mr. l'Abbé de la Caille, &c. nouvelle edition, &c. par Mr. l'Abbé Maric.* Paris 1770. un tomo en 8.

(9) Por muerte de la Caille obtuvo Maric la Cátedra de Matemáticas del Colegio Mazarin de París.

de su parte, ni insuficiencia, ni cortedad de explicacion. Llevó la mira de encerrar en volúmenes de poco bulto los fundamentos de las materias que en desempeño de su obligacion habia de explicar en su aula, remitiéndose para aclararlas á los doctos Comentarios con que las ilustraba en señaladísimo aprovechamiento de sus oyentes. Quiso ahorrar á sus discípulos la fatigosa y aventurada tarea de escribir materias que no son para dictadas, y precaver se aburriesen con los errores que forzosamente habian de cometer al tiempo de escribir cálculos y fórmulas que no entendiesen. Si los que están algo sueltos en calcular se equivocan, aun quando calculan en su retiro lejos de objetos que puedan distraerles la atencion, ¿quantas veces no tropezarán los que en un numeroso concurso escriban, notando otro, cálculos complicadísimos? Fuera de que siempre están con mas limpieza las figuras en la estampa mas desaliñada, que no en los quadernos mas arreglados.

Entre muchos Cursos de Matemática, que acaso tendrán los Ingleses, dudamos que haya alguno mas cabal que el que componen las Obras de Emerson (10) en diez tomos en octavo, y dos en quarto. Hablamos en estos términos, porque si nos paramos en las fechas de su publi-

(10) *Cyclomathesis: or an casy introduction to the several branches of the Mathematicks. Being principally designed for the instruction of young students, before they onter upon the more abssruse and difficults parts thereof.* Londres 1763. un tomo en 8. que trata de la Arismética, y debe mirarse como el primero de todos.

blicacion no podremos menos de pensar que el intento de Emerson fué escribir de todos los ramos de la Matemática, pero no coordinar sus tratados de modo que deban mirarse como partes enlazadas de una misma obra. El tomo quinto, donde trata del Cálculo de las Fluxíones y Fluentes, salió á luz el año de 1757, cinco años antes que el tratado de Arismética, el primero de todos los demas; en su Algebra, publicada en 1764, cita proposiciones de su tratado de Secciones Cónicas, el qual no se dió al público hasta el año de 1767; y en su tomo de Miscelanea, que debe mirarse como la conclusion de su Curso, trata muchos puntos, que tenian muy oportuno lugar en los tomos antecedentes. Como quiera, es de mano de maestro quanto ha publicado Emerson, sin embargo de haber en su Algebra algunos puntos que no están demostrados, y de los descuidos que, segun Juan Bernouli el Mozo (11) se le han notado en su Astronomía. Solo celebráramos que se explicara con menos laconismo de lo que suele, por cuyo motivo estamos persuadidos á que será trabajosa para muchos la inteligencia de sus escritos. Varias veces se nos ha ofrecido ocasion de reparar, que muchos escritores y lectores tambien, equivocan la obscuridad con la concision, y que en las Naciones donde es exercicio estimado dar lecciones de Matemática á precio de dinero, suelen escasear los maestros la explicacion en sus escritos con la mira de hacerse menesterosos.

Por

(11) Tomo primero de su *Recueil pour les Astronomes*. Berlin 1771.

Por lo que mira á los asuntos que incluye el Curso de Emerson, considerando como parte suya el tomo de Miscelanea, confesamos que son en mayor número que los del nuestro, porque no tratamos, como el Escritor Ingles, ni de Navegacion, ni de la Arismética de los Infinitos, ni del Método de las Diferencias, ni del Cálculo de las Probabilidades, ni de la Fortificacion y Artillería. Pero tambien aseguramos, y esperamos se arrimen á nuestro dictamen los que tuvieren oportunidad y paciencia de hacer el cotejo, que ninguno de los tratados que ofrecemos al Público reconoce ventaja á los suyos en la extension, y tal vez se la llevan los nuestros á los suyos en punto de claridad. Nuestra Dinámica, Hidrodinámica, Optica y Astronomía incluyen muchos puntos que Emerson no tocó; en nuestra Trigonometría, bien que no tan difusa como la suya, hay proposiciones y fórmulas muy dignas de saberse, y aun necesarias; y últimamente, nuestro tomo de Tablas, y el de Arquitectura Civil é Hidráulica, le dán algunos quilates mas de valor á nuestra recopilacion.

El Curso de Hennert, Olandés (12), Catedrático de Matemáticas en Utrect, no es á buen seguro el último en quanto al concepto que merece, así como lo es por la fecha de su publicacion. En los nueve tomos en octavo de

que

(12) Los tres primeros tomos, donde trata de la Matemática Especulativa, tienen este título: *Cursus Mathematicus*. Utrect 1766... 68. tres tomos en 8.

Los otros seis, que incluyen la Matemática Mixta, se intitulan: *Cursus Matheseos adplicatæ*. Utrect 1766... 75. seis tomos en 8.

que se compone, trata su autor con magisterio y claridad todos los ramos de la Matemática, haciendo en los tratados mixtos una aplicacion continua del Cálculo Integral mas que ninguno de los Escritores de quienes hemos hablado hasta ahora. Por cuyo motivo ha puesto en el último tomo de los tres primeros, en los quales trata de la Matemática Pura, lo preciso no mas del Cálculo Integral para manifestar sus usos en algunas operaciones de Geometría, con el fin de dilatarse mas, en quanto á su aplicacion, sobre este ramo de análisis en los tratados prácticos, al paso que lo pidiere la naturaleza de las diferentes cuestiones que se propusiese resolver. Estamos muy agenos de tener por errado este camino; mucha doctrina de Cálculo Integral en abstracto, ó sin aplicacion á la práctica, cabe en un tratado escrito de propósito sobre este asunto; pero en un Curso nos parece mas acertado declarar los diferentes modos de integrar á medida que se hace preciso usarlos; quedando por este medio mas pagado, y mucho mas ilustrado el entendimiento.

Si es muy apreciable el Curso del Profesor Olandés por la destreza y profundidad con que su autor trata los asuntos, particularmente los mixtos, lo es igualmente por el número de los que incluye. Ademas de todos los tratados principales, y de la Perspectiva, trae en su tomo noveno quanto pertenece á la Ciencia y Arquitectura Naval, y á la Tormentaria, aprovechando lo mejor que sobre estas materias se habia escrito hasta su tiempo en Inglater-

ra,

ra, Francia, Alemania é Italia. Verdad es que ha omitido la Gnomónica, la Arquitectura Civil é Hidráulica, y no trae Tablas como el nuestro, el qual, sobre declarar la Matemática Pura con mucha mas extension que no el de Hennert, lleva una Geometría Práctica muy completa, cuyo tratado no está seguramente por demas en ningun Curso de Matemáticas.

Estos son los Cursos completos, que han llegado á nuestras manos; serian tres, mas, y tambien quatro, si quisiéramos considerar como un cuerpo de obra lo que ha publicado en tratados particulares sobre asuntos de Matemática Especulativa el célebre Matemático Suizo Leonardo Euler, de los quales daremos, quando venga al caso, la correspondiente noticia. Pero por no incluir ninguno de ellos, ni la Geometría Elementar, ni la Trigonometría, no puede componer su conjunto un Curso completo; obligándonos el mismo reparo á formar igual juicio de las Instituciones Analíticas de Ricati y Saladini (13).

El primero de los Cursos de Matemática Pura, que conocemos, le publicó en Francia el Abate Sauri (14), y puede considerarse como un extracto, y una como introduccion á tratados profundos, que sobre las materias que abraza han dado á luz en estos últimos tiempos los mas acre-

(13) *Institutiones Analyticæ à Vincentio Riccati, è Soc. Jesu, & Hyeronimo Saladini, Monacho Celestino, Collectæ.* Bolonia 176... tres tomos de á fol.

(14) *Cours de Mathématiques, par Mr. l'Abbé Sauri, ancien professeur de Philosophie en l'Université de Montpelier.* Paris 1774. cinco tomos en 8.

acreditados Matemáticos. De esto mismo se indicia la mucha diligencia de su autor, corriendo con ella parejas la claridad de su explicacion, y el despejo con que resuelve en su tomo quinto diferentes cuestiones muy importantes de Matemática Mixta.

El otro curso incompleto de Matemáticas es obra de un docto Religioso Dominico Italiano el P. Gherli (15), y la mejor sin duda alguna que hemos visto hasta el dia de hoy entre tantas como hemos registrado. Todos los asuntos que incluye los toma el P. Gherli desde sus primeros fundamentos, y los propone con tan feliz explicacion, que dudamos se hayan publicado hasta ahora Elementos de Matemática que tanto puedan honrar á un escritor; y aunque lo mas que trae acerca de las materias de alguna elevacion está sacado de los escritos del profundo calculador Leonardo Euler, no ha dexado de disfrutar las obras de otros Escritores muy acreditados; pero las aclara con tal paciencia y felicidad, que, por decirlo así, las ha humanado, y no conozco curso alguno donde los que desearen hacer progresos sólidos y rápidos en la Matemática, puedan aprovechar tanto como en los Elementos del P. Gherli.

Ya es tiempo que hablemos de los nuestros, los quales en quanto á su contextura discrepan esencialmente de todos los que hemos dado á conocer. Sus autores escribieron

(15) *Gli Elementi Teorico-Practici delle Matematiche Pure del P. Odoardo Gherli Domenicano, professore di Teologia Dogmatica nell' Università di Modena resi publici da Domenico Pollera.* Modena 1770... 77. siete tomos en fol.

ron en paises donde son muchos los Matemáticos, y muy conocidas las obras magistrales que tratan de sus diferentes ramos; cuya circunstancia los obligó á amoldar, digámoslo así, en sus entendimientos las especies de los asuntos sobre que escribian, á fin de darles en la forma, ya que no en la substancia, algunos visos de novedad. Siguióseles de aquí á estos escritores mayor dificultad que á nosotros, y tambien resultó mayor uniformidad en sus escritos que no en los nuestros. Enterados mas de lo que quisiéramos de que eran muy estrañas para nuestros hombres las doctrinas que íbamos á publicar, y de lo mucho que importaba saliese al público con toda la posible brevedad nuestro trabajo, nos detuvimos poco en dar á las materias, que nos tocaba tratar, un aspecto muy diferente del que tenian en las obras clásicas que nos dedicamos á extractar ó copiar; solo pusimos cuidado en echar mano de las mas celebradas, y enlazar con todo esmero los pedazos que para la formacion de un tratado sacábamos de diferentes. Al paso que nos íbamos empeñando mas en nuestra tarea, tambien nos íbamos desentendiendo de algunos recelos que al principio nos induxeron á dar poco volumen á nuestros tomos, siendo este el motivo por que son mas voluminosos á medida que se ván alejando del primero. Por los mismos recelos, al tiempo de poner por obra el plan que habiamos formado de estos Elementos, le alteramos algun tanto, especialmente en la parte especulativa. Nuestro primer intento fué destinar para el Cál-

culo Integral todo el tomo quarto, donde cupiesen los principales fundamentos de los mejores métodos de integracion, que pocos años antes habian inventado ó mejorado los primeros Matemáticos de Europa; pero nos pareció despues, que quatro tomos de Matemática Pura, podrian dar visos de fundadas á las quejas de algunos hombres que miraban con no poca oposicion nuestro destino, los quales ciñendo su patriotismo al corto número de los objetos que alcanzan, ó tienen alrededor de sí, coadyuvan con repugnancia, ó dexan de oponerse violentos á las empresas de universal utilidad. Y hechos cargo de que, todo bien considerado, los tratados mixtos son los que mas importan, sacrificamos la especulativa á la práctica, contentándonos con incluir de Cálculo Integral en el tomo tercero lo suficiente para lo que en adelante necesitásemos. Sin embargo el rumbo que despues determinamos seguir para explicar las apariciones celestes, ó, por mejor decir, el *pedazo de Astronomía Física* que nos propusimos trasladar, nos precisó añadir al tomo octavo, por via de introduccion á este asunto, algunas proposiciones peculiares á puntos tratados en los tomos antecedentes, y especialmente la integracion de algunas fórmulas, que mejor lugar hubieran ocupado en el tomo tercero. No citaremos, con el fin de que se nos disimule este lunar, el exemplo de otros Matemáticos que publicaron muchos tratados juntos en cuerpo de obra, interpolando donde les hacia falta, alguna proposicion omitida en el tratado, al qual per-

pertenecia. Diremos francamente que provino nuestro descuido de la prisa con que íbamos despachando tratados, y de no haber seguido para la formacion de estos Elementos el rumbo que debíamos, el único que tenemos por acertado, bien que no le han seguido ni Emerson, ni Hennert, ni Gherli. Todo escritor que ha de componer una obra de varios tratados enlazados unos con otros, debería empezar escribiendo el último, y proseguir retrocediendo de mano en mano ácia los primeros; no tiene otro modo de saber, sin miedo de que se le olvide proposicion alguna, que fundamentos ha de echar en los primeros para la acertada composicion de los siguientes.

Manifiesta este Prólogo que no hemos hecho empeño de dar la preferencia á un autor solo para que solo él nos sirviera de guia, ni tenido en tanta estima los escritos de alguna Nacion, que nos desdeñásemos de aprovechar los que han publicado las demas. El ingenio, el talento, la aplicacion no están vinculadas en hombre ni Nacion alguna; y en punto de Matemáticas, todas ellas se honran con haber criado hombres de inventiva, á cuya meditacion y laboriosidad tiene muchísimo que agradecer esta ciencia, cuyos descubrimientos abrieron el camino para todo lo que han adelantado los Matemáticos de estos últimos tiempos, consolándonos de que no fuesen eternos sus maestros. Graduemos de injustos, y tengámoslos por de limitada suficiencia á ciertos censores, para quienes basta que un escritor sea de una nacion que no les quadra para despreciar sus obras; obsti-

nados en defender que solo cria escritores apreciables aquella que tiene la alta fortuna de que ellos la miren con benevolencia, ó la honren con su patrocinio. ¿Que concepto merecen otros que se alzan con la autoridad de jueces en todos los ramos de la literatura, señalando á su antojo el lugar que á cada literato corresponde, y decidiendo del mérito literario de las Naciones, sin ningun caudal para entender sus obras? A muchos de estos hombres temerarios los hemos oido decidir con tono magistral, que si el autor de una obra matemática es Frances, ha de ser superficial; si Ingles, obscura; si Aleman, pesada; si Italiano, difusa. Para ser juez competente en estas materias, es preciso haberse acostumbrado á mirar mucho con ojos perspicaces y que alcancen lejos; y el que mas hubiere visto, mas mirado será seguramente, y mas benigno para con los demas. El portentoso, el divino, el inmortal Newton, así como era el mayor de todos los Matemáticos, era tambien el mas modesto.

Muchos son los ojos que censuran, pocas las manos que obran; mas fácilmente se ven faltas agenas, que se corrigen las propias; mejor se nota el error, que se abraza lo acertado; y mas presto se vitupera lo malo, que se loa y engrandece lo bueno. ¿Quien trabajaría, ni procuraría mejorar su siglo con las políticas y civiles letras, si temiese la emulacion? Victoria es atropellarla, y grandeza de ánimo vencerla. Gerónimo de Huerta en el Prólogo al tomo segundo de su traduccion de la Historia Natural de Plinio.

PRO-

PRÓLOGO
A ESTE TOMO PRIMERO.

Va para dos siglos que han mudado de semblante las Matemáticas ; el empeño quasi universal con que se dedican á su estudio todas las Naciones de Europa , ha ensanchado portentosamente los límites de esta ciencia , siendo sus adelantamientos conseqüencia forzosa de haberse mejorado y multiplicado con esta general aficion los métodos , cuya perfeccion multiplica tambien y facilita los descubrimientos. Pero no todos los que se dedican al cultivo de la Geometría nacen con potencias que les proporcionen lugar señalado entre los inventores ; los mas tienen que ceñirse á hacer perceptible lo que inventaron otros Matemáticos de superior talento , cuyos escritos los ha hecho alguna vez memorables su misma obscuridad ; dexándonos sus autores con la sospecha de que su mira fue causarnos antes espanto que admiracion. Esta es la causa de haberse publicado tantos tratados elementares , y de ser no poco embarazosa entre ellos la eleccion. Porque á pesar de la cuidadosa prolixidad con que se conoce que algunos de ellos se escribieron , apenas hay uno que llene á todos respectos el deseo de los aficionados , y merezca la aprobacion de los inteligentes ; todos tienen algun tratado que desdice de los demas , y pedazos hay en un mismo tratado donde se echa menos ya la explicacion , ya la diligencia del escritor.

Debíamos, pues, mirar al formar esta recopilacion, como un escollo peligrosísimo el preocuparnos á favor de un autor solo, y el dexarnos halucinar de los créditos con que corren varios Elementos, Cursos, Lecciones, ó Instituciones de Matemática, que habian llegado á nuestra noticia. Para mayor duracion del edificio que íbamos á levantar, procuramos echar mano de los materiales mas recientes, fundando en su buena calidad la firmeza de la fábrica, ansiosos de hermosearla con la novedad, y de asegurarla los mas años que pudiésemos del achaque de antiquada (1). Para lograr, en lo que cabe, nuestro intento, entablamos correspondencias, que avisándonos con puntualidad las obras que fuesen publicando las demas Naciones ilus-

(1) El Público se enterará de lo que he hecho con esta mira, poniéndole aquí las fechas de la impresion de cada Tomo.

El Tomo I. se acabó de imprimir el dia 26 de Abril del año de 1772: el Tomo II. el dia 22 de Agosto de 72: el III. el dia 24 de Diciembre de 72: el IV. el dia 31 de Julio de 73: el V. el dia 23 de Julio de 74: el VI. el dia 15 de Enero de 75: el VII. el dia 11 de Marzo de 75: el VIII. el dia 16 de Agosto de 75: el X. el dia 13 de Septiembre de 76. De este, que es el Tomo de Tablas, se publicó en 1787 la primera parte, donde están las Tablas Logarítmicas y Trigonométricas, con una introduccion que no las desluce.

Restaba imprimir, la primera vez que este salió á luz, el Tomo IX. cuya primer parte que trata de Arquitectura Civil, se publicó en 1783 en un volumen de 888 páginas y 63 láminas; de su segunda parte, cuyo asunto es la Arquitectura Hidráulica, no se ha podido estampar hasta ahora mas que el principio en un volumen con 52 láminas, publicado en 1790.

ilustradas, nos proporcionasen adquirirlas; alentándonos la esperanza de llevar por este camino la obra al mayor grado de perfeccion que cupiese en nuestra cortedad, lo que bastara para que no nos espantara por costosa la tarea, ni por penosa nos amedrentara.

Una de las primeras noticias que nos participaron fué haber dado á luz un Curso de Matemáticas Mr. Bezout (2), individuo de la Real Academia de las Ciencias de París. La notoria habilidad de este Matemático nos persuadió desde luego, á que aun quando no propusiese métodos propios en su Curso, propondria seguramente por lo menos los agenos con novedad. El exercicio en que nos constaba se habia empleado muchos años en aquella Corte de Maestro de Matemáticas, ayudado de su entendimiento claro y despejado, pudo proporcionarle dar á algunos, ya que no á todos los asuntos, un aspecto que los hiciera mas perceptibles para el comun de los lectores. El dar la última mano á una obra doctrinal debiera dexarse, quando sea posible, para quando despues de andar en manos de varios sugetos de mediana capacidad y aplicacion, se hubiese advertido donde peca de corta la explicacion del autor, ó anduvo escaso en los exemplos.

Despues de vista la obra hallamos con efecto funda-

(2) *Cours de Mathématiques, a l'usage des Gardes du Pavillon, et de la Marine. Par Mr. Bêzout. de l'Academie Royale des Sciences, Examinateur des Gardes du Pavillon et de la Marine, et Censeur Royal.* Paris 1769. seis tomos en 8.

da nuestra conjetura. La Arismética que trae nos pareció á todas luces muy cabal, y la mejor que hasta entonces hubiésemos registrado. Solamente entendimos que la doctrina de las decimales ocuparía mejor lugar declarándola separada á continuacion de los quebrados comunes; con cuya leve alteracion la copiamos al pie de la letra, qual la publicó Mr. Bezout.

No hemos escrito á tan poca costa la Geometría, ni tampoco era posible, una vez que hicimos ánimo de no adoptar los Elementos de Euclides. Las mismas circunstancias que en el concepto de algunos escritores constituyen *su excelencia*, hacen muy trabajoso para muchísimos principiantes su estudio. Nuestro intento fué allanarles quanto cupiese el camino, pero sin desentendernos de la estrecha obligacion que nos corria de nunca jamas sacrificar á la mayor facilidad la escrupulosidad geométrica, y de conciliar el rigor matemático con el alivio de los que no se *desdeñasen de buscar* maestro en nuestros escritos.

Fuénos, pues, preciso acudir á muchas Geometrías para texer la nuestra (3); y si el mérito de una obra consistiera en el trabajo que costó componerla, no sería este á buen seguro el tratado menos apreciable de nuestra recopilacion. Sea vanidad, sea disimulo, apenas hay un escritor que siga en la formacion de sus tratados el mismo plan de los que trataron antes que él los mismos asun-

(3) Está sacada de nueve ó diez, todas muy distintas unas de otras.

asuntos. Componer de muchos tratados uno solo, es seguir un plan que no sea el de ninguno, ó reducirlos todos á uno mismo: y quando por la naturaleza del argumento hay mucha trabazon entre las proposiciones, cuesta y debe costar mucho trabajo el conseguirlo, en castigo de la temeridad de intentarlo.

Para descansar un rato de tan fatigosa tarea nos entretuvimos traduciendo la Trigonometría plana que trae Mr. Bezout á continuacion de su Geometría elementar, con el intento, que hemos puesto por obra, de estamparla tambien á continuacion de la nuestra. Parecióнos ocioso buscar otra por los mismos motivos que preferimos su Arismética; quedando con las esperanzas de que se arrimen á nuestro dictámen todos los facultativos que tuvieren proporcion de cotejarla con otras, y no miraren como desmerecimiento propio el hacer justicia al traductor.

La Geometria Práctica, bien que entresacada de quantas pudimos recoger, no nos costó, ni con mucho, la misma fatiga que la Especulativa. Como todo lo que aquella enseña va fundado en lo que esta demuestra, y no hay entre las maniobras de la práctica el estrecho enlace que traba unas con otras las proposiciones teóricas, la teximos con gran facilidad. Ademas de las obras que nos socorrieron para componer los Elementos de Geometría, en las quales se halla alguna aplicacion de la teórica á casos prácticos, y de la obra muy conocida de Bion (4), encontramos

(4) *Instrumens de Mathématique*: un tomo en 4. del qual se han hecho va-

mos no poco que aprovechar en algunos tratados prácticos, que acababan de salir á luz (5) quando estábamos para concluir esta tarea (6).

Lle-

varias ediciones en París. Es obra que declara el uso, y la construccion de los instrumentos que sirven en todos los tratados prácticos de la Matemática. Los que no quisieren obra tan extensa, podrán contentarse con la siguiente, de la qual se han publicado tres ediciones en poco tiempo en Inglaterra.

A treatise of such Mathematical instruments, as are usually put into a Portable case, schewing some of their use in Arithmetic, Geometry, Trigonometry, Spherics, Architecture, surveying, Geography, Perspective, &c. with an appendix; containing the description and use of the Gunners Calipers, and the description of, and præcepts for the delineation of, Shipguns and sea mortarars, &c. By Iohn Robertson. Un tomo en 8. Londres 1775.

(5) *L'arpenteur forestier, ou methode nouvelle de mesurer, calculer, et construire toute sorte de figures, &c. Par Mr. Guiot.* Un tomo en 8. Paris 1764.

Manuel de l'arpenteur, &c. par Mr. Ginet: un tomo en 8. Paris 1770.

(6) Por ser la medida de la extension el fin á que se enderezan todas las especulaciones de la Geometría, y un punto principalísimo la medicion de los cuerpos, de cuya operacion pende el aforar, ó medir la cabida de los vasos en que se guardan los líquidos, para la recaudacion de los derechos Reales; se han dedicado los Ingleses con particular estudio á facilitar todo lo posible esta medicion. De aquí proviene que se han publicado en Ingles excelentes tratados prácticos sobre el asunto, de los quales han llegado á mis manos los siguientes.

The British Gauger: or Trader and Officier's instructor, in the Royal revenne of the excisse and customs.

Part.I. Containing the necessary rules of vulgar and decimal arithmetic, an the whole art of practical Gauging, both by pen and rule; illustrated with a great variety of curious and useful examples.

Part.II. An historical and succint account of all the Laws relating to the excisse, from the first commencement thereof, to the present time. To wich are

ad-

Lleva nuestra Geometría Práctica una como introduccion, donde, con motivo de tratar de las medidas de distancias, tocamos un punto de muchísima consideracion, manifestando con los mismos argumentos que Mr. de Lacondamine (7) la necesidad de reducirlas, estas y las demas, á sola una, y damos alguna luz acerca de los medios que en nuestro juicio podria practicar el Gobierno para conseguir fin tan deseado. Hémoslo hecho sin el menor recelo de que se nos dé en cara con que hemos metido la hoz en mies agena: la verdad se hizo para todos los hombres, y en ninguna clase particular está vinculado el privilegio de indagarla. Nos lisonjeamos con que si lo hemos errado, no faltará quien salga al encuentro del daño que nuestra equivocacion podria ocasionar; estamos prontos á mudar de parecer, así en este asunto, como en otro qualquiera, siempre que se nos haga patente, que vamos des-

ca-

added tables of the old and new duties, drawbacks, &c. on beer, ale, spirits, soap, Candles, &c. By Samuel Clark. Londres 1765. un tomo en 8.

A general treatisse of Mensuration: Containing Many useful and necessary improvements. Composed for the benefit of Artificers, builders, measurers, surveyors, gaugers, farmers, gentlemen, young students. &c. The whole being intended as and easy introduction to several parts of the mathematicks. By S. Robertson. Londres 1767. un tomo en 8.

En Paris se publicó el año de 1778 en un tomo en 8. la segunda edicion de una obra del P. Pesenas sobre medidas de toneles, arqueo de navios, &c. cuyo título es: *La théorie et la pratique du jeaugeage des tonneaux, des navires, et de leurs segmens.*

(7) En las Memorias de la Real Academia de las Ciencias de Paris para el año de 1747.

caminados. En las ciencias naturales no reconocemos mas legislador que la razon, y deseamos acudan á su desagravio, siempre que la desconociéremos, patronos quales ella misma, si se le permitiera buscarlos, los escogiera.

Podriamos concluir aquí este Prólogo; pero tenemos por oportuno responder primero á dos preguntas que se nos podrian hacer; la una acerca de la Geometría Elementar: la otra acerca de la medida de distancias que seguimos constante é *invariablemente*.

I. Por lo que mira á la Geometría, aunque los Elementos de Euclides (8) han sido muchos siglos continuados la cartilla, digámoslo así, de los geómetras, hemos tenido por conveniente y necesario no adoptarlos, siguiendo el exemplo de muchos Matemáticos de opinion, que escri-

(8) Wolfio tom. I. de su Curso, pág. 96. dice:

Euclides et ejus exemplo hactenus omnes ex principio congruentiæ solo demonstrarunt omnia: sed cum ingeniosissimus Leibnitius similitudinis notionem mecum communicaret, atque moneret multum ejus in geometria esse usum; ego vero meditatus amplissimum deprehenderem; similitudinis principium in geometriam introducere nullus dubitavi. Multa igitur ex eo à me facillimè demonstrata deprehendes, quæ alias ex principio congruentiæ non-

Euclides, y á su exemplo todos los Matemáticos que ha habido despues de él, no han tenido mas fundamento de todas sus demostraciones, que el principio de la congruencia. Pero habiéndome dado á conocer el ingeniosísimo Leibnitz la nocion de la similitud, ó semejanza, previniéndome que podia ser de mucho uso en la Geometría, el qual despues de meditar en ello conocí que podia ser dilatadísimo: no puse el menor reparo en introducir en la Geometría el principio de la semejanza. Me ha servido, con-

cribieron con la mira de facilitar la tarea á los principiantes, sin el mas leve perjuicio del rigor geométrico. No se les hubiera quitado á estos Elementos la antigua po-

nonnisi per ambages demonstrari solent.

conforme se verá, para demostrar con suma facilidad muchas proposiciones cuya evidencia no se puede manifestar por el principio de la congruencia, sino por rodeos.

Tomo V. pág.28.

Nos equidem in Elementis hisce matheseos non exhibuimus Elementa Euclidis ipsa; nihil tamen in iis occurrit, quod non reperiatur, vel in Arithmetica, vel in Geometria, vel in Algebra, quemadmodum inferius fidem oculatam dabimus. Nihil vero nobis magis curæ cordique fuit, quam ut rigori demonstrandi consuleremus, et demonstrationes ita componeremus, ut essent consummatæ eo sensu, quem in logica latina (§.799, 854, 855) *explicamus, ad usum tamen Tyronum compositæ. Et plurimorum annorum experientia abunde docuit fructum, quem inde percipere licet.*

Aunque no damos en esta obra los Elementos de Euclides, quantas proposiciones hay en estos se hallarán, ó en nuestra Arismética, ó en la Geometría, ó en el Algebra, conforme lo harémos patente mas adelante. Nuestro principal cuidado ha sido demostrarlas con todo rigor, ajustando nuestras demostraciones á las reglas que dimos en nuestra Lógica latina; pero acomodándolas á la capacidad de los principiantes, constándonos por la experiencia de muchos años el grandísimo beneficio que de aquí se les sigue.

No desaprueba, pues, Wolfio, y él mismo dá el exemplo, que se coloquen las proposiciones de la Geometría Elemental por otro orden que el que se repara en los Elementos de Euclides, ni que se siga en su demostracion un método, principio, ó rumbo distinto del que siguió el Matemático Griego.

Vito Caraveli en su Obra intitulada *Euclidis Elementa quinque postre-*

ma

posesion en que estaban, si hubiera sido perfecta, ó sin graves defectos por lo menos su coordinacion; los hubieran adoptado Tacquet, Wolfio, Thomas Simpson, Emerson,

ma solidorum scientiam continentia, opera et studio viti Caraveli, ad juventutis usum accomodata. Nápoles 1730. un tomo en 8. dice:

Neque porro geometris omnibus libellum hunc offero. . . sed juventuti, quæ nunc primum huic dat nomen facultati, operam non inutilem præstitisse me affirmo, ut compendio et laboris, et temporis illuc inoffenso pede perducantur, quo cæteri per salebrosum tramitem, ac pene impervium vix, ac ne vix quidem pervenerunt. Quem enim non terrent, aut certe non fatigant, ac pene excerebrant, ut ita dicam, Euclidis, Commandini, Clavii longissimæ, et quandoque difficillimæ demonstrationes?. . . Habes igitur, lector studiose, qui ad mathematicam animum adpellis, in hoc libello, quicquid ad geometriam solidam facit; et ita habes, ut ausim dicere, nihil, nisi mediocrem animi attentionem ad ea intelligenda omnia opus tibi esse, quod commodi ut tibi pararem quandoque Euclideas demonstrationes prolixas, intricatasque posthabui, aliasque faciliores, brevioresque substitui.

No he compuesto esta obrita para los Geómetras; pero aseguro que será de alguna utilidad á los principiantes, de manera, que con menos tiempo y trabajo llegarán sin tropiezo alguno al término adonde otros apenas han llegado, ó no han llegado por un camino áspero, é intransitable. ¿A quien no espantan, cansan y desatinan, por decirlo así, las larguísimas, y á veces dificultosísimas demostraciones de Euclides, Comandino y Clavio? . . . Los lectores aplicados, que se dedican al estudio de las Matemáticas hallarán en este librito quanto pertenece á la Geometría de los sólidos, pero lo hallarán declarado de modo que para su inteligencia les bastará con mediana aplicacion; y con el fin de proporcionarles este alivio, he desechado las demostraciones difusas, é intrincadas de Euclides, substituyendo en su lugar otras mas breves y mas fáciles.

Y en su *Elementa Matheseos universæ tomus primus, qui Geometriam planam,*

son, Boscowich, y otros muchos bastante cuerdos para distinguir la Geometría de Euclides de los Elementos del mismo autor. Su Geometría, esto es, las proposiciones que trae

nam, seu priores sex libros Euclidis breviter demonstratos complectitur. Nápoles 1752. un tomo en 8. añade:

In quinto dumtaxat libro ab Euclidis methodo recessi, aliamque substitui minus discentibus arduam; ita tamen rem omnem transequi, ut servato propositionum ordine easdem veritates faciliori, ut spero, nullique non commoda ratione exposuerim.

Solo en el libro quinto me he apartado del metodo de Euclides por seguir otro mas fácil para los principiantes; pero lo he hecho de modo, que sin alterar el órden de las proposiciones, las he demostrado por un término mas fácil, y si no me alhucino, mas proporcionado á la capacidad de todos.

Lechi en el Prólogo del tomo primero de sus *Elementa Geometriæ theoricæ, et practicæ*, impresos en Milan el año de 1753 en dos tomos en 8. se explica en estos términos:

Erunt aliqui, et hi quidem antiquitatis retinentissimi, qui solum Euclidem prælegi pueris oportere putent, alium præterea neminem: magnum nomen, et antiquæ gloriæ fama venerandum, ac pene sacrum, Euclidem esse: quotquot retroactis sæculis floruerunt geometræ, ab hujus elementis, velut à communi quodam geometriæ ludo, prodiisse: nefas proinde esse ab ejus formula, præscriptoque desciscere. Quod si paulo durior Tironi videatur Euclides hoc ipso tamen experimento proba-

Algunos hombres, extremados partidarios de lo antiguo, quieren que los muchachos estudien la Geometría por Euclides, y no por otro autor ninguno: que por ser Euclides un escritor de mucho nombre, le miremos por razon de la fama de su antigua gloria con respeto, y casi con reverencia; y que por haberse formado por sus Elementos como en una escuela comun de Geometría todos quantos Matemáticos de opinion ha habido en los siglos pasados, sea un atentado apartarse de su obra y de su método; asegurando, que si acaso Eu-

trae en sus Elementos, han sido y serán en todos tiempos el fundamento mas sólido del estudio de las Matemáticas; pero sus Elementos, esto es, el órden por el qual las

bari ajunt adolescentum ingenia, et tanquam lydio lapide eos explorari sane paucos, qui ad geometriam nati factive sint...

Nam quod dicunt asperitate aliqua, quæ in Euclidis elementis occurrit, excitari, non infringi adalescentum studia, tum id audirem, si quicumque ad geometriam accedunt, non modo ingenio bene instructi, sed optima, et obfirmata etiam voluntate accederent, nec inconstantia laborarent, quæ in illam ætatem cadit. Horum autem imbecillitati prospicere etiam velle, ecquis probibeat? Sane per bosce annos, quibus boc munere fungor, expertus sensi pleraqae in primo limine theoremata intempestiva esse tironum ingeniis nondum subactis. Memini quantus illis terror inerat, cum sensim eos deducebam ad primas propositiones, quartam, quintam, sextam, septimam, et octavam in ordine Euclideo, quasi vero offendissent immanes scopulos acroceraunia. Audierant etiam bisce locis

Euclides se les resiste algun poco á los principiantes, por lo mismo es á propósito para explorar su talento, y dar á conocer aquellos pocos que nacieron, ó se criaron para geómetras...

Yo concedería que la dificultad de entender á Euclides, lejos de atrasar promueve los adelantamientos de los principiantes, si todos los que empiezan el estudio de la Geometría, le empezaran, no solo dotados de buen talento, mas tambien con voluntad muy resuelta, y no adoleciesen de la inconstancia tan propia de la poca edad. Pues aun quando concurrieran en los principiantes estas circunstancias ¿que mal habria en allanarles el camino? Puedo asegurar que desde que enseño me ha manifestado la experiencia, que los mas de los primeros teoremas no son proporcionados á la capacidad de los principiantes todavía poco exercitada. Tengo presente, que quando los iba encaminando poco á poco á las primeras proposiciones, quarta, quinta, sexta, séptima, y octava por el órden de Euclides, les entraba siempre el mismo terror que si hubiesen tropepe-

las coordinó, desmerecen mucho si se cotejan con los que han publicado muchos modernos. A ninguno que esté impuesto en la Geometría de Euclides, bien que no la haya

es-

cis naufragia multorum; pontem esse male ominosum pluribus; hunc transmeare paucis concessum. Sane, nisi ardentius institissem, jam pedem retulissent plerique.

Hæc ego offendicula, merasque præstigias præpostero elementorum ordini semper tribuendas duxi, quem non alium observari ab Euclide prospexi, quam qui rigidum geometram deceret, quique idoneus esset, ut alia ex aliis inter se apta, et connexa deducerentur theoremata, ad demonstrandum satis, ad docendum parum. Quod nisi etiam à sapientissimis hujus ævi geometris sæpius observatum legissem, vix dicere auderem. Nam illa ipsa, quæ adeo exanimant adolescentes, theoremata nihil quidquam difficultatis haberent, si à simplicioribus theorematis sensim progressi, mentem, et phantasiam paulo ante exercuissent tot angulis concipiendis, atque inter se comparandis.

Quid?

pezado con escollos muy espantosos. Tambien habian oido decir que en las mismas proposiciones se habian atascado muchos, siendo para muchísimos una puente azarosa, que muy pocos lograban pasar. Y seguramente, á no animarlos yo con la mayor eficacia, los mas se hubieran aburrido.

Siempre he creido que estos tropiezos, y pura fascinacion, son efecto de la mala colocacion de las proposiciones de los Elementos, en cuya coordinacion he reparado que Euclides solo buscó el método que correspondia á un matemático riguroso, de manera que los teoremas quedaran muy enlazados unos con otros, cuyo método basta sin duda para demostrar, pero no sirve para la enseñanza. Y á no ser que los matemáticos mas acreditados de estos tiempos han puesto ya esta tacha á la obra de Euclides, me guardara yo muy bien de decir mi parecer. Y de hecho, las mismas proposiciones que tanto molestan á los muchachos, se les harian muy fáciles de entender, si empezando por las mas sencillas, fuesen exercitando poco á poco su entendimien-

to

estudiado por sus Elementos, podrá pararle el hallarlos citados en los escritos de diferentes Matemáticos, cuya inteligencia solo pide que se tenga presente la proposicion ci-

Quid? Totus quantus est Euclidis liber secundus quam molestus accidat Tironibus nemo non videt. Sin autem illa rectangulorum, et quadratorum ex variis linearum segmentis objecta species in alium locum opportunius rejecta fuisset, eorum phantasiæ non adeo vel impedita, vel obscura videretur. Nihil opus est reliquos libros commemorare.

Quod si qua ratio est terroris hujus vel tollendi prorsus, vel minuendi, quid est cur nolimus eorum, qui geometriæ posthac daturi sunt operam, vel laborem levare, vel fastidio occurrere? Qua in re habeo non adstipulatores solum, sed auctores etiam hujus meæ sententiæ scriptores ferme omnes, Italos, et Transalpinos, qui mihi multo ante præiverunt. Neque vero putandi sunt temere id fecisse, ac de gradu suo, quem Euclidi tot sæculorum consensus firmaverat, illum dimovisse. Nihil profecto minus. Perfectum geometram, et cui nihil admodum desit, Eucli-

to y fantasía, acostumbrándose á considerar primero, y comparar unos con otros tantos ángulos. ¿Habrá acaso quien no confiese que todo el libro segundo de Euclides es trabajosísimo para los principiantes? El qual ninguna fatiga les costaría si se hubiese dexado para mas oportuno lugar la consideracion de aquellos rectángulos y quadrados formados de varios segmentos de lineas. No digo nada de los demas libros.

Y si hay algun medio de curar del todo, ó minorar por lo menos este terror ¿que razon habrá para que dexemos de aliviar el trabajo, y precaver el aburrimiento de los que en adelante quisiesen dedicarse al estudio de la Geometría? Y en esto tengo no solo por garantes, mas tambien por autores de mi dictamen quasi todos los escritores Italianos y Ultramontanos, que escribieron mucho antes que yo, los quales no hemos de pensar que lo hiciesen por capricho, ni con el intento de derribar á Euclides del alto lugar en que le tenia asegurado el consentimiento de tantos siglos. No por cierto. Todos confiesan uná-

citada, y no el autor donde se ha visto su demostracion. Así como á los que han estudiado las Secciones Cónicas en algun tratado moderno, no los paran las demostracio-

c 2 nes

clidem facile prædicant. Sed valeat primo illa Marcii Tullii libera vox. Nihilne tot sæculis, summis ingeniis, maximis studiis explicatum putamus? Nihil est ergo actum post Euclidem?

Nam quod dicunt à rigida demonstrandi ratione eos desciscere, qui Euclidæo ordini mancipati non sunt, probarem utique, si hunc scopulum caute jam prætergressi non fuissent doctissimi geometræ: quasi vero iisdem principiis in dispari scribendi methodo et primi et postremi insistere non potuissent. Fuerit ista sane quorundam scriptorum labes, qui, dum perspicuitati plus nimio indulgent, geometriam, vel sustulerunt, vel enervarunt; nec vero alii defuerunt, qui studio rigoris, quem vocant, in demonstrando aliò prolapsi, geometriam studiosis velut onus ætna gravius effecerint. Si quis vero in hoc Euripo constitutus tanquam medius inter duas syrtes naviget, utriusque facultatis

unánimes que es Euclides un geómetra perfecto y cabal. Pero tengamos presentes estas palabras de Ciceron; ¿Que? no se ha adelantado nada en el discurso de tantos siglos, con el talento y la aplicacion de tantos hombres? ¿Nada se ha añadido á lo que dexó Euclides?

Decir que se apartan del método riguroso de demostrar los que no se sujetan al órden de Euclides, es hablar sin fundamento, porque prueban lo contrario los escritos de grandes matemáticos; siendo constante que sobre unos mismos principios se pueden fundar métodos muy distintos de hacer patente la verdad. No se puede negar que ha habido geómetras, que con el fin de aclarar los elementos mas de lo que podian, han incurrido en el vicio de aniquilar, ó desfigurar la geometría; pero tambien ha habido otros, que por nimiamente adictos á lo que llaman rigor geométrico, han seguido otro rumbo, y han puesto la Geometría de modo que es inasequible para los principiantes. Si hubiere alguno que en esta contrariedad de pareceres supiere tomar un me-

nes (y se encuentran bastantes) que sobre las mismas curvas compuso Apolonio , Matemático Griego.

Que Newton se arrepintiese de haberse engolfado en los

tis particeps , neutrius periculi expers , næ ago illum et optimi doctoris , et egregii geometræ partes omnes exsequi judicabo ; quod ætate hac nostra cum ex transalpinis hominibus multi ; tum etiam ex nostris non pauci magna cum laude perfecerunt. Et quamvis is ego non sim , ut tantum possim, nec , si maxime possim , prædicare de me audeam ; malo tamen cum iisdem scriptoribus parum timidus videri in hac eadem geometriæ semita ineunda , quam nimium prudens Euclidæis quasi vestigiis persequendis.

medio término , de suerte que juntando lo bueno de cada uno , huyere de los inconvenientes de ambos , se le podrá tener seguramente por excelente maestro y esclarecido geómetra, conforme lo han conseguido con mucha felicidad en estos tiempos muchos matemáticos estrangeros , y algunos nacionales. Aunque yo no me lisonjeo de tener igual fortuna , y tampoco lo diria aun quando lo conociera , sin embargo , mas quiero que se me gradúe de algo arrojado por seguir las huellas de estos escritores, que no de nimiamente detenido por no atreverme á apartarme de Euclides.

En el Prólogo del tomo III. de sus Elementos dice el P.Gherli lo siguiente.

Quantunque però il metodo d' Euclide sia stato , e sia tuttora comunmente abbracciato, perchè mai punto si scosta dal più severo rigor geometrico, di cui è proprio il dare alla mente giustezza , regola , e precisione ; pure perchè l' ordine delle cose ivi è continuamente interrotto , al che devonsi attribuire a parer mio le insuperabili difficoltà che la maggior parte degli studiosi arrestano sul bel principio , ho io

Aunque el método de Euclides ha sido y es todavia comunmente adoptado , porque jamas se aparta del método geométrico mas riguroso , cuya circunstancia esencial es dar al entendimiento exâctitud , regla y precision; sin embargo porque interrumpe continuamente el orden de las cosas , á lo que deben atribuirse en mi entender las insuperables dificultades que paran á la mayor parte de los principiantes , he tenido por acertado no se-

los métodos analíticos antes de poseer al Euclides, esto podrá probar quando mas que aquel gran varon sentia, lo dice Wolfio, no haberle leido con la correspondiente ma-

du- seguirle, bien que sin quebrantar jamas las leyes de la demostracion, á fin de allanar el camino á los que quisieren dedicarse á esta sublime necesaria ciencia; y con adoptar (conforme lo han practicado otros antes de ahora) el método mas obvio y natural, por el qual de las nociones mas sencillas se pasa á los teoremas de mayor dificultad, y mediante una continuada cadena, por decirlo así, he procurado quitar la obscuridad, y hacer de facil acceso aquellas proposiciones que en Euclides son el escollo de los muchachos, aunque de mas que mediana capacidad. Así me ha parecido que encaminaría por un camino mas facil y breve á los principiantes al conocimiento de los mas ocultos arcanos de esta ciencia, y lograria atajar su natural instabilidad y ligereza, que con inquieta inconstancia los mueve á cansarse y disgustarse luego de todo; siendo cierto que la extremada proligidad, sobre ser molesta para los mozos de talento, no alivia á los que son de cortos alcances.

io giudicato bene scostarmene senza per altro intermetter mai l' inviolabil legge di dimostrare per agevolar lors la strada all' acquisto di questa sublime necesaria scienza, e con appigliarmi (lo que prima di me da altri gia è stato praticato) all' ordine più ovvio, e naturale, in cui dalle più semplici nozioni si passa ai più difficili teoremi con una per così dire, perpetua concatenatione spogliare dell' oscurità, e arduo loro accesso quelle proposizioni, che in Euclide servon di scoglio agli ingegni eziandiò più, che mediocri. Con ciò ho pensato di condurre con maggiore facilità, e speditezza, ne' più occulti recessi di questa scienza i giovani, e per tal modo remediare all' innata loro instabilità, e debolezza, che con inquieta incostanza li porta a infastidirsi, e annojarsi presto di tutto; essendo ben certo, che la superflua prolissità mentre agli ingegnosi è molesta, ai tardi non giova.

Emerson en sus *The Elements of Geometry. Jn wich the principal propo-*

durez, pues, segun refiere su historiador, le parecieron tan fáciles sus Elementos, que se desdeñó de estudiarlos. De aquí no se puede inferir que los tuviese en mas aprecio

positions of Euclid, Archimedes, and others, are demonstrated after the most easy manner. To wich is added a colection of useful Geometrical problems. Londres 1763. un tomo en 8. habla en estos términos.

But we are not to suppose that in these ancient times, this science was any thing near the perfection it its now in: but in succeding ages, men of great genius by their study and industry, by degrees added new improvements; till at last it arrived at the pitch we now see it. So that we need not wonder that Euclid, or evem Archimeds, have taken round about method in demostrating many of their propositions, wich are now done vastly shorter and clearer. For it cannot be denied, that Euclid's elements abound with a great many trifling propositions, wich are of no other use but to demonstrate, in is way, the propositions that follow after. But they are disposed in no proper order or method. For he frequently treats of different subjects, promiscuously together, in the same place; without any regard to the nature of things, or their connection with one-

Pero no hemos de creer que en aquellos tiempos antiguos estuviese tan adelantada esta ciencia (la Geometría) como ahora, sino que en los siglos siguientes hombres de gran talento la fueron perficionando con su estudio y penetracion, hasta que por último llegó al grado de perfeccion en que está hoy dia. Por lo que no es de estrañar que Euclides y Archimedes usasen de rodeos para demostrar muchas proposiciones que los modernos demuestran con mas brevedad y claridad. De suerte que no se puede negar que en los Elementos de Euclides hay muchísimas proposiciones inútiles, que solo sirven para demostrar, siguiendo su plan, las proposiciones que se siguen despues. Pero no están colocadas por el órden, ni con el método correspondiente: porque trata con freqüencia en un mismo lugar asuntos diferentes, mezclándolos sin eleccion, y sin atender á la naturaleza de las cosas, ni al enlace de unas con otras; y tambien sue-

cio que otros Elementos; se arrepintió de no haber estudiado los de Euclides, pero no de haberles preferido otra Geometría Elementar.

Pe- suele tocar un mismo punto en distintos lugares; siendo patente que de aquí no puede originarse sino confusion. Pero en estos Elementos hay tambien muchas proposiciones desconocidas de los antiguos Matemáticos, las quales son de tanta utilidad como las de Euclides.

one another. And as often, haste same subject to consider in different places; wich can breed noting but confusion. But there are likewise a great many propositions in the present system of geometry, wich these anciens mathematicians knew nothing of; and wich are equally useful with those of Euclid.

Ultimamente Thomas Simpson compuso para facilitar el estudio de las Matemáticas una Geometría Elemental con este título: *Elements of geometry; with their application to the mensuration of superficies and solids, to the determination of the maxima and minima of geometrical quantities, and to the construction of a great variety of geometrical problems.* En la tercera edicion de esta obra, que es del año de 1768, añadió su autor una vindicacion con el título de *Notes geometrical and critical on the elementary part of this work*, con el intento de satisfacer los reparos que puso á su Geometría Roberto Simpson, el qual habia publicado una edicion de los Elementos de Euclides. Al mismo tiempo que Thomas Simpson defiende sus Elementos de Geometría, hace tambien patentes los defectos de los de Euclides, y prueba 1.º que faltan en los Elementos del Matemático Griego muchas proposiciones necesarias: 2.º que su modo de presentar varias proposiciones necesita de mejorarse; 3.º que deben desecharse por viciosas algunas de sus definiciones, y 4.º que, sea culpa suya, ó de algun editor poco diestro, tienen varias demostraciones defectuosas.

Para que sepan mis lectores qual de estos dos Ingleses es voto de mayor peso, les diré que Thomas Simpson ha dado tales muestras de inventiva en diferentes obras, donde trata con novedad muchísimos asuntos de

Ma-

Pero aun quando los Elementos de Euclides mereciéran la preferencia respecto de los que han publicado los Matemáticos modernos, sin embargo de no haber tenido los mas de ellos otro maestro que al mismo Euclides, pide discernimiento la eleccion entre las muchas ediciones que de esta obra de Euclides se han publicado. Las mas solo podrán competir con las Geometrías escritas en estos últimos tiempos, en el concepto de algunos hombres que equivocan una demostracion pesada con una demostracion rigurosa, ó están en que á una demostracion le falta de rigurosa todo lo que no le sobra de complicada.

II. *Hemos dado* el pie Frances por término de comparacion de todas las medidas de distancias, por haberle grangeado esta prerogativa el gran número de estuches de Matemática Franceses que se han distribuido en Europa, y todos traen un tanto del expresado pie. La toesa, que de él se deriva, es *dias ha la medida mas conocida y usada de los Matemáticos* (9) por haberse executado con ella la

Matemática Pura y Mixta, que ha merecido lugar entre los primeros Matemáticos de esta era; que con el don de invencion juntaba mucho método y suma claridad, de modo que entre los pocos escritos Ingleses que he manejado, ningunos conozco que en esta parte puedan competir con los suyos. De Roberto Simpson no conozco mas (y dudo que haya otra cosa) que una edicion de los Elementos de Euclides, un tratado de secciones cónicas por el método syntético, y un tomo de Opúsculos publicado despues de su muerte habrá tres, ó quatro años, que hasta ahora no ha llegado á mis manos.

(9) Wolfio tomo I. de su Curso, pag. 99.

Mensuræ longitudo et divisio non La extension y division de la me-

ea- di-

la operacion geométrica mas celebrada de quantas duran en la memoria de los hombres; no solo la han usado los Franceses para medir grados del meridiano terrestre en Eu-

ro-

eadem est ubivis gentium. Varias differentias, præter Wollebrordum Snellium, exponunt Ricciolus, Malletus, Eisenschmidius, aliique. Aliquas celebrium mensurarum varietates repræsentat tabula sequens in particulas istiusmodi, qualium pes Regius Parisimus est 1440.

dida no es una misma en todas las Naciones. Villebrod Snellio, Ricciolli, Malet, Eisenschmid, y otros traen la diferencia que va de unas á otras, que nosotros, por lo que toca á las mas conocidas, señalamos en la tabla siguiente, comparándolas con el pie de Rey de París que consta de 1440 partes.

Lecchi tom. 1. de sus Elementos de Geometría, pag. 16.

Porrò hæ mensuræ incertæ sunt, nisi pedis quantitas, ad quam illæ referuntur, fuerit determinata. Pes verò tot prope magnitudines sortitur diversas, quot sunt civitates; quare, ut hæc tanta, quæ in legendis scriptoribus ocurrebat, obscuritas tolleretur, Recentiores optimum factu censuerunt mensuras reliquas ad notam quantitatem pedis Regii Parisiensis referre.... et earum mensurarum, saltem celebriorum varietates repræsentare in particulis istiusmodi, qualium pes Regius Parisinus est 1440.

No se puede saber á punto fixo el verdadero valor de estas medidas, á no ser que primero se determine el valor del pie, del qual se derivan. Y como hay quasi tantos pies diferentes quantas son las Ciudades, los modernos han tenido por cosa muy acertada, con el fin de obviar la confusion que de aquí se originaba en los escritos matemáticos, comparar las medidas de todas las Naciones con el pie de Rey de París, cuyo valor es conocido.... expresando la diferencia que va de unas á otras, á lo menos respecto de las usadas, en partes de dicho pie, que consta de 1440.

Michelotti, Profesor de Matemáticas en la Universidad de Turin, pag. 3. del tomo primero de sus experimentos hidráulicos, publicado en

aque-

ropa, Africa y América, sino que tambien á ella han reducido el resultado de sus operaciones Boscowich, Liesganig, y Beccaria, quienes separada y respectivamente han exe-

aquella Corte el año de 1767, dice:

Per codesto motivo ancora nel corso dell' opera non ci vagliamo daltra misura, che del piede, e della tesse di Parigi, come la più nota a geometri d' Europa; e percio di più facile riduzione alla misura particolare d'ogni paese.

Este es tambien el motivo por que en el discurso de esta obra no usamos otra medida que el pie y la toesa de París, por ser la mas familiar á los geómetras de Europa, y por lo mismo mas facil de reducir á la medida particular de cada pais. Lo propio dice pag. 199.

El P. Gherli tom. I. de sus Elementos de Matemática, pag. 269.

Per mettere la materia in tutto il lume possibile non solo parlerò dei pesi, e delle misure delle diverse principali nazioni, e della proporcione, che in qualunque sito hanno osservato, e osservanno fra loro questi pessi, e queste misure, ma in oltre ridurrò dipoi e gli uni, e le altre a una sola regola la più nota, e comune, che tale ho giudicato; e questa rispetto alle misure tanto in lunghezza, come in superficie, e in capacità, sarà il pede reale di Parigi.

Con la mira de tratar este asunto (de pesos y medidas) con la posible claridad, hablaré no solo de pesos y de las medidas de las principales naciones, y de la proporcion que han guardado y guardan entre sí en qualquier lugar, sino que despues reduciré tambien los unos y las otras á una misma medida que tengo por la conocida y general, la qual respecto de las medidas lineares, superficiales, y de cabida será el pie de Rey de París.

Vito Caraveli en el tomo VII. impreso en 1771 de sus *Elementi di Matematica, composti per uso della Accademia Militare* 12. tomos en 8. sin el tomo segundo de Arquitectura Militar, que no se ha dado todavia al público, dice:

Per poter conoscere il rapporto de-

Para determinar la relacion entre

executado la misma medicion en Italia, Ungría y Piamonte.

La determinacion del espacio que un cuerpo grave an-

delle nostre misure con quelle degli altri luoghi, soggiugniamo la seguente tavola, nella quale si trovano registrate le misure di più luoghi, rapportate tutte al piede di Francia con autorità regia stabilito come misura costante per tutta la Francia, detto perciò piede del Re, *e alla tesa, o pertica del Castelleto di Parigi, che costa di 6 piedi del Re; essendosi ormai tali misure rese universali trà' matematici, a cagione delle misure della terra fatte con esse.*

tre nuestras medidas, y las de otras partes, añadimos la siguiente tabla, donde van apuntadas las medidas de diferentes Ciudades, todas comparadas con el pie de Francia que de orden del Rey rige en todo aquel Reyno, por cuyo motivo se llama *pie de Rey*, y con la toesa, ó percha del Chatelet de París, que consta de 6 pies de Rey, por haberse hecho universales estas medidas entre los Matemáticos con motivo de las mediciones de la tierra que con ellas se han executado.

En el Prólogo de los *Elementi dell'Artigleria composti per uso della Reale Accademia Militare*, publicados en 1773, dos tomos en 8. donde no usa otra medida que el pie Frances, dice:

Confesso finalmente che le misure per le construzioni de' cannoni, de' mortari, e della loro casse, mi son state somministrate della suddetta Accademia, dove si tengono fedelmente registrate.

Confieso finalmente que las medidas para la fundicion de los cañones y morteros, y la construccion de sus cureñas, me las ha dado la misma Academia, que las guarda con sumo cuidado.

Gerónimo Francisco Christiani, Ingeniero de la República de Venecia, pág. 10. de su obra intitulada: *Delle misure d'ogni genere antiche, e moderne con note litterarie, e Fisico Matematiche*, estampada en Brescia año de 1760: un tomo en 4. dice:

Fra le misure frattanto, cui in oggi ravvisiamo sotto il nome di piede,

Entre las medidas que hoy dia conocemos con el nombre de pie, to-

anda, cayendo á impulsos de su gravedad, en el primer impulso de su caida, la executó con el pie frances el Olandés Huyghens; y con la misma medida determinó tambien la

de, ed alla quale cedono tutte le altre unanimemente il primato, si è senza dubbio la misura del piede Reale di Parigi. *Non v'ha matematico, che di questo non faccia il maggior uso.*

todas ceden unánimemente la primacía al *pie Real de Paris.* No hay Matemático ninguno que no haga de ella muchísimo uso.

Allí mismo pág. 13.

Stabilitasi ora la vera, ed assoluta lunghezza del piede Reale di Parigi, e la di lui divisione, cui comunmente tutti i Matematici osservano di 1440 *punti, ó particelle Parigine, ci varremo istessamente noi di queste medesime, avendo a ridurre presentemente l'importare de' più celebri piedi si antichi, quanto moderni ad esso parigino piede, siguendo in ciò l'illustre esempio de' più diligenti scrittori in simile abbondevolissima materia.*

Despues de determinada la medida verdadera y absoluta del pie de París, y su division en 1440 puntos, ó partes, comunmente admitida de todos los matemáticos, de estas mismas nos valdremos para reducir al mismo pie de París los pies mas famosos, así antiguos como modernos, siguiendo en esto el exemplo de los autores que con mas diligencia han escrito sobre esta abundante materia.

Ya dexaba dicho en su Prólogo

*Non fu per vero grave, o laborioso impegno il tra*r*re col tempo a fine il concepito mio lavoro. Molti, e molti autori hannoci lasciati spogli, compendi, e repertori, con copiosissime tavole d'estere misure. Come tra tutte, una però avene di maggior fama, ed uso al di su dell' altre, la quale in ogni tavola di misure viene più eminentemente collocata, così giudicai, che*

No me ha costado mucho trabajo el llegar á la conclusion de esta obra, habiéndonos dexado muchísimos autores extractos, compendios y apuntaciones con tablas muy dilatadas de medidas estrangeras. Pero como entre todas hay una que se ha hecho mas famosa y usual que las demas, y es, conforme se echa de ver, el pie de París, la qual en to-

la longitud del péndulo que señala los segundos de tiempo á la latitud de París.

Aunque hubiéramos podido reducir á varas y partes de vara muchas cantidades, cuya determinacion se hallará en estos Elementos, hemos omitido de intento esta reduccion para que sirva de exercicio á nuestros Lectores, quienes la podrán executar á poca costa, una vez que hemos señalado la correspondencia entre el pie frances y el pie Castellano, ó tercia de la vara de Burgos. Lo mismo hizo Newton siempre que se le ofreció hacer uso ó memoria de operaciones hecha con la medida Francesa; fuese reverencia, fuese escrúpulo, las dexó sin reduccion ninguna conforme la habian publicado sus autores.

Ultimamente, despues de maduro acuerdo nos pareció decoroso, aun quando no fuera obligacion, conformarnos con el mayor número de los Escritores de Matemática, que confiesan ser el pie de Rey de París la medida á la qual se refieren todas las demas. Hanlo hecho para darse mejor á entender unos á otros, del mismo modo que sería mas fácil la comunicacion entre las diferentes Naciones, si, á lo menos para el trato exterior, se convi-

che quante misure avvenissemi di raccorre, tornasse in acconcio con quella unicamente di confrontare. Tale misura, come di leggieri accorgesi, si è il piede Reale di Parigi.

todas las tablas de medidas ocupa el lugar mas eminente; con esta misma medida me ha parecido por lo mismo necesario comparar únicamente todas las medidas de que se me ofreciere hacer mencion.

vinieran en hablar todas una misma lengua.

Escusáramos esta adicion que algunos graduarán de apología, si tuviéramos seguridad de que solo Matemáticos de mediano conocimiento, quando menos, hubiesen de registrar nuestra obra. Para con estos es por demas quanto digamos en nuestro abono, y de su misma inteligencia fiáramos nuestra disculpa, aun quando no tuviéramos que esperarla de su voluntad. Los que no están versados en estas materias tendrán lo que basta para oir con desconfianza á los que murmuraren de nuestro proceder, murmurado ya luego que salieron á luz unos tratados que nos encargó el Inspector General de la Infantería, por hombres que con su osadía en decidir piensan que suplen la instruccion que tienen muy escasa.

NOTA.

Un número arábigo dentro de un paréntesis, como este (336), que se vé en el párrafo 374 del tomo tercero, quiere decir, que el fundamento de lo que allí se dice está en el párrafo 336 del mismo tomo.

Quando dentro del paréntesis hay un número romano ántes del arábigo, como estos (II. 91) y (I. 531), que se vén en los párrafos 329 y 678 del tomo tercero, significa que lo que allí se dice vá fundado en el párrafo 91 del tomo segundo, y en el párrafo 531 del tomo primero.

ELO-

ELOGIO

A DON JORGE JUAN,

COMENDADOR DE ALIAGA EN LA ORDEN DE SAN JUAN,
GEFE DE ESQUADRA DE LA REAL ARMADA,
CAPITAN DE LA COMPAÑIA DE GUARDIAS MARINAS,
CONSILIARIO DE LA REAL ACADEMIA DE SAN FERNANDO,
INDIVIDUO DE LA REAL SOCIEDAD DE LONDRES,
Y DE LA ACADEMIA REAL DE BERLIN (1).

Si las alabanzas de los hombres hubieran de recaer en la duracion de su exîstencia, apuntaríamos con supersticiosa puntualidad desde los primeros renglones de este Elogio el dia, mes y año del nacimiento de Don Jorge Juan; diríamos ó fingiríamos, que dió muestras en sus primeros años de lo que habia de ser en la edad adulta; y pintándole hombre quando era todavía niño, desluciríamos toda su vida para hacer mas portentosa su infancia. Quédese tanta prolixidad para los investigadores de fechas; en la vida de un Filósofo no caben ficciones, ni tampoco menudencias, donde lo mas que se nos ofrecerá decir es memorable, todo es serio. El Elogio de Don Jorge Juan empezará donde él empezó á obrar; las obras son

las

(1) Sé que tiene este ilustre varon en sus escritos, mas que en los mios un monumento duradero de su memoria; pero he querido darle, aunque difunto, un testimonio de mi gratitud, porque fué voto, fué empeño suyo el que á mí se me encargara escribir estos Elementos de Matemáticas.

las que hacen señalados á los hombres ; con ellas arrancan aplausos á sus coetaneos , consiguen lugar en el Templo de la Fama , y dexan á la equitativa posteridad que agradecer y admirar.

No fundó Don Jorge Juan en la nobleza de su nacimiento un privilegio para vivir inútil ; antes porque nació distinguido quiso distinguirse por varios caminos , y merecer por sí lo que ya tenia de la casualidad. Por influxo de un tio suyo , *Baylío* de Caspe , entró en la Orden de San Juan de Jerusalen : Orden donde la Religion hace piadoso el valor , y el valor animosa la piedad. El dilatado campo que esta carrera le proporcionaba donde exercitarse era muy ceñido para su espíritu , ni su pundonor consentia que hiciese á su Religion el sacrificio de todos sus brios. Tenia una *Patria* , tenia un Soberano , lo sabia : sabia que primero que religioso era vasallo , y que las obligaciones de vasallo se compadecen con las de *religioso* , pues las impone muy estrechamente todas la verdadera Religion. Salió de Malta para España con voluntad resuelta de servir á S. M. en la Marina ; y desde su admision en el Cuerpo de Guardias Marinas se dedicó con tan exemplar y afortunada aplicacion al estudio de las Matemáticas , que á los veinte y un años de edad mereció ser preferido entre todos sus compañeros (2) para pasar al

(2) Fué tambien nombrado Don Antonio de Ulloa , Oficial del mismo Cuerpo , hoy dia Teniente General de la Real Armada.

al Equador con los Académicos Franceses, que el Ministerio de aquella Nacion enviaba allá á una expedicion literaria tan importante como memorable. Tratábase de salir para siempre de dudas acerca de la verdadera figura de la tierra, que se tuvo por redonda hasta fines del siglo pasado. Parecióles á algunos Filósofos felizmente atrevidos que esta figura repugnaba con las leyes del equilibrio de los fluidos, y que la convexídad de la superficie de la tierra no podia ser una misma en toda su extension. Aunque desde el año de 1672 tenia esta sospecha en su abono una observacion muy sonada, no era suficiente este testimonio, y se hacia indispensable confirmarla con las operaciones de la Geometría. Es constante que si la tierra no es una esfera rigurosa, han de ser desiguales los grados de un círculo que nos figuremos la parta por medio, pasando por el Norte y el Sur, y que estos grados han de coger menos varas donde fuere mayor la convexídad, que no donde fuere menor. Requiera, pues, la determinacion cabal de la figura de la tierra que se midiesen dos de estos grados por lo menos, el uno en el Polo, el otro debaxo del Equador, para inferir de su diferencia quanto la superficie de nuestro globo discrepa de la esférica, y saber á punto fixo á que cuerpo se parece. En esta averiguacion, que ya miraba con interes Don Jorge Juan por ser su objeto una verdad matemática, interesaban los progresos de la navegacion, y el concepto nacional, dos cosas cabalmente que fueron mientras vivió

el blanco de todos sus desvelos. Ufano con la preferencia que habia merecido entre muchos Oficiales ilustrados de su Cuerpo, pudiera discurrir que en la misma eleccion iba afianzada su suficiencia; pero aunque mucha la instruccion de Don Jorge Juan, y mayor de la que pedia la operacion á que se le enviaba, era todavía mayor su desconfianza; que con este nombre hemos de calificar su mucha modestia. Dedicóse con nuevo empeño al estudio, y quedaron convencidos los sabios Franceses, cuyo compañero era nombrado, de que en una Nacion donde tal vez no esperaban encontrar hombres que los entendiesen, habia muchos que podian auxîliarlos, aun quando fuera mas dificultosa, y pidiera mas profunda doctrina la empresa.

Tenía en sí recursos Don Jorge Juan para dar vado á muchísimos encargos á un tiempo. Por varios é inconexôs que fuesen sus objetos, su zelo patriótico sabia reducir*los á uno* mismo, cuyo desempeño aseguraba de antemano su atinada actividad. Era tan sobresaliente en él esta prenda, que el Virrey del Perú, en cuyo Reyno se executaba la operacion matemática, le empleó en la defensa de algunas Plazas que recelaba fuesen acometidas de los Ingleses, en todos tiempos nuestros émulos, y entonces nuestros enemigos; en disciplinar las tropas de aquellas costas, y en la construccion y mando de dos fragatas, cuyo destino era impedir un socorro que el Almirante Anson esperaba para reforzar la esquadra con la qual

iba

iba fatigando en aquellas regiones remotas nuestra atencion y nuestro comercio.

No bastaba haber concluido la medicion del grado del meridiano terrestre, era indispensable publicar individualizadas todas las observaciones, operaciones y tentativas, todos los cuidados, afanes y peligros á cuya costa se habia conseguido, y empeñaba esta publicacion en un trabajo de todo punto nuevo aun para un Matemático. No en todos se junta la soltura que dexa ayrosas las operaciones prácticas con el talento de referirlas, y hacer patente, quando no son mas que preliminares, su enlace con el objeto principal; saber obrar y saber decir son talentos muy distintos, pero en Don Jorge Juan parecian uno mismo. Traía á su vuelta de América todos los materiales de sus observaciones astronómicas y físicas para darles con algun sosiego toda la coordinacion y pulimento que cabia en la materia, ó, lo que era uno mismo, el que él podia darles. No era esta una dificultad para Don Jorge Juan, antes era una diversion; otros estorbos le esperaban capaces de apurar su constancia si hubiera sido vulgar. Halló á su regreso á España muerto al Ministro que le habia enviado á América; era lo mismo que hallar mudada la Corte, y sus proyectos sin valedor. Para que estos llegasen á la noticia del nuevo Ministro tuvo que acudir al empeño; fué oido, pero despachado como si solicitara algun premio. Estuvo para desmayar Don Jorge Juan, y cabe esta confesion en su elogio; ño es fla-

queza, es virtud desmayar por tan honrado motivo. Lo dexara todo para irse á Malta, si no le alentara, ofreciéndole interesar al Ministro, un hombre á quien una expedicion desgraciada tiene señalado lugar en nuestra historia (3). Con este influxo lograron sus intentos el patrocinio que necesitaban para efectuarse, y se imprimió á costa del Real Erario la obra de las *Observaciones Astronómicas y Físicas* (4); no pedia otro galardon el desinteres de su autor.

La misma ansia con que le habia solicitado despertó en su corazon naturalmente agradecido afectos de cariño ácia el Ministro por cuya mano pasó esta merced, y tuvo el Ministro la fortuna de conocerlo. Desde entonces la vida de Don Jorge Juan no fué mas que una continuacion de comisiones y confianzas, todas dirigidas al servicio del Rey, y la mayor prueba que las desempeñaba es que se

(3) D. Joseph Pizarro, que murió en Cádiz siendo Teniente General de Marina.

(4) *Observaciones Astronómicas y Físicas, hechas de orden de S. M. en los Reynos del Perú, de las quales se deduce la figura y magnitud de la tierra, y se aplica á la navegacion*, impreso de orden del Rey nuestro Señor en Madrid por Juan de Zúñiga, año de 1747, un tomo de á 4.

La parte histórica de la Expedicion la escribió D. Antonio Ulloa, y salió á luz con este título: *Relacion Histórica del Viage á la América Meridional, hecho de orden de S. M. para medir algunos grados del meridiano terrestre, y venir por ellos en conocimiento de la verdadera figura y magnitud de la tierra*, impresa de orden del Rey nuestro Señor en Madrid por Antonio Marin, año de 1748.

se continuaban. Pasó á Londres con un encargo que sobre pedir luces (á Don Jorge Juan no se le podian dar otros), requeria no poca maña y tambien astucia: construccion de navíos, obras hidráulicas, beneficio de minas, liga y afinacion de monedas, para todo se le consultaba; ó porque habia un Don Jorge Juan de quien fiarlo, todo se emprendia.

Era tanto su deseo del acierto, que estaba en una continua desconfianza de sus muchas noticias y su penetracion. No daba en el arrojo de aquellos sabios, quando lo son, que con el discurso quieren adivinar, y tambien violentar las operaciones de la naturaleza; siempre que el asunto lo permitia le preguntaba, no perdonando para ilustrarse ni observacion ni experimento. Rayaba ya en temeraria escrupulosidad su esmero, y estuvo para perecer en unas pruebas que hacia para averiguar la resistencia de las jarcias; salvóle la casualidad de estar cubiertas de la marea las rocas á las quales le arrojó una jarcia que se rompió; pero quedó muy maltratado, y con riesgo de la vida algunos dias.

Solo un Oficial que tantas y tan varias pruebas tenia dadas de cumplido, podia saber las circunstancias que acreditan este honroso concepto, guiar á los que deseasen merecerle, é infundir tan noble deseo en los que hubiesen entrado sin vocacion en la Marina. De estos no hablara un escritor pusilánime, antes daria á entender, ó diría sin rubor, que todo es pundonor, todo zelo, todo

suficiencia , todo aplicacion , todo idoneidad en un hombre que viste uniforme , y socolor de hacer justicia á todo un cuerpo , haría , envileciéndose á sí mismo , un agravio á los individuos beneméritos que mantienen su esplendor. No será estraño que haya entre los Oficiales algunos incapaces quando muchos entraron sin eleccion propia en la carrera Militar ; eligiéronla sus padres para darles acomodo , y no defensores á la patria : qual un hombre codicioso dedica sus hijos á la Iglesia para conseguir ó poseer ricas prebendas , no para que tenga la Religion Ministros que con su doctrina la defiendan , ó el Sacerdocio individuos que con su exemplo le hagan mas venerable. Solo á Don Jorge Juan podia fiarse el plantel de los Oficiales de Marina , solo él podia gobernar con éxito cabal la Academia donde adquieren los conocimientos que les servirán para arrostrar los mayores peligros, y dexar burlada la furia del inconstante elemento , que tanto exercicio dará algun dia á su inteligencia y su valor. Notorios son los progresos que ha hecho la Academia de Guardias Marinas desde que se encargó su gobierno á Don Jorge Juan : maestros , discípulos , libros , instrumentos todo es sobresaliente y exquisito desde entonces. Sus individuos perfeccionan dias ha con sus observaciones y viages la Astronomía y la Navegacion en competencia de los mayores Astrónomos extrangeros.

Era destino de Don Jorge Juan no estar parado , así como era genio suyo no estar ocioso. No bien se le acababa

de

de encargar la direccion de la Academia de Guardias Marinas, quando se le dió órden de ir al Ferrol á dirigir las obras que se hacian en aquel Puerto, donde á la sazon estaban trabajando quince mil hombres. Su modestia, su amor á lo que en Cádiz tenia á su cuidado repugnaban tan vasta comision, porque no le dominaba el furor de tener muchos asuntos entre manos; ceñíase su ambicion á concluir con acierto los que tenia empezados. Se le admitió que fuese al Ferrol por una temporada; y dexando allí allanadas varias dificultades á que habia dado motivo así la fábrica como la construccion, pasó á Santander, donde dexó corriente un nuevo método de aparejar los navios, que ya se habia experimentado con total felicidad en el Ferrol.

Restituido á Cadiz se dedicó con su acostumbrado zelo á cuidar de su compañía, donde brotaban ya las semillas de la sólida instruccion que dexó sembradas antes de salir para Galicia. Los ratos que le dexaba esta ocupacion, los empleaba en promover diferentes ramos de las Ciencias Naturales, estimulando á lo mismo á varios sugetos en quienes conocia disposiciones para seguir su exemplo. Formó una Sociedad de hombres aplicados é instruidos que se juntaban todos los jueves en su casa; allí se leían disertaciones, controvertian puntos de todas las ciencias que son del distrito del discurso humano, y pueden contribuir al bien de los hombres. Formóse una república literaria, cuyos dominios alcanzaban toda la na-

turaleza, no habiendo entre sus individuos mas desigualdad que la que requeria la universal instruccion de Don Jorge Juan, quien con nombre de Presidente la gobernaba, porque ninguno le era extraño de quantos idiomas en ella se hablaban.

Los que no han tratado mas que hombres vulgares, ciñen á sola una clase de dependencias los aciertos del hombre, y tienen por incompatible el estudio con la destreza de un *negociador*. Por otra parte los literatos creen que *solo ellos son* para todo, y que los libros infunden el *don de no errar* en nada. La verdad es que un hombre ignorante es un hombre inutil, y tambien peligroso si tiene autoridad, y un sabio sin trato de gentes suele ser un hombre *sin crianza*, y un *niño* para las dependencias. Don Jorge Juan era *sabio* y hombre de mundo á un tiempo; para él podia haber asuntos nuevos, pero no extraños; *los concluía todos* como *si* no hubiese manejado otros en el discurso de su vida, y así lo acreditó en su Embaxada en la Corte del Rey de Marruecos.

Entre tantos *monumentos* que dexó Don Felipe V. de su paternal amor á sus vasallos, hay uno en la Capital de esta Monarquía, cuyo destino es proporcionar á la noble juventud una crianza qual corresponde á su calidad, ó á los servicios que debe esperar la Nacion de los hombres de esfera distinguida. Sabia aquel Monarca tan cuerdo, que á los vasallos de ilustre nacimiento toca dar á los demas el exemplo de todo lo bueno, y conocer todo

lo

lo útil para saberlo apreciar, y promoverlo con su patrocinio, quando no con su generosidad. Una revolucion inesperada dexó al Real Seminario de Nobles sin gobierno, ó sin Director, sin enseñanza ó sin Maestros. El Rey, heredero de las intenciones igualmente que de las virtudes de su Augusto Padre, encargó la direccion de tan esencial establecimiento á D. Jorge Juan. Jamas hubo eleccion tan aplaudida, porque nunca la hubo mas acertada; la fama del nuevo Director pobló en poco tiempo de Seminaristas el Seminario: su discernimiento supo hallar para todo Maestros, y deseando mejorarlos, si cupiese, les señaló sueldos que bastasen á su decente manutencion. Mudaron muy en breve de semblante la crianza civil y literaria en aquel Colegio, donde se forman desde entonces Caballeros ilustrados, y con modales; cediendo, como corresponde, el primer lugar la crianza civil á la christiana, sin la qual suele ser la política hypocresía, y una arma peligrosa la ilustracion.

En medio de la continuada agitacion con que vivió D. Jorge Juan desde su vuelta de Inglaterra, pues son mas de veinte y quatro los viages de un extremo de España á otro que de orden de la Corte emprendió, iba trabajando una obra (5) que pedia repetidos experimentos, cálculos pro-

(5) *Exâmen Marítimo Teórico-Práctico, ó tratado de Mecánica, aplicado á la construccion, conocimiento y manejo de los Navíos, y demas Embarcaciones. Por D. Jorge Juan, Comendador de Aliaga en la Orden de S. Juan, Gefe de Esquadra de la Real Armada, Capitan de la Compañía de Guardias Mari-*

prolijos, y mucha combinacion; en una palabra, sumo sosiego. Como no habia perdonado diligencia para instruirse, tenia leído quanto se habia publicado sobre la construccion y el manejo del Navio. El fruto que sacó de tanta letura fué dudar y sospechar que á pesar de su gran penetracion y profunda geometría, se habian equivocado los Matemáticos de primera gerarquía que probaron sus fuerzas en tan ardua materia. Empeñóse en averiguar si eran fundadas sus sospechas, y fué lo mismo que tratar el asunto de propósito. No le hay mas dificultoso en toda la *Matemática mixta.*

Es el Navio la máquina mas portentosa que han inventado la industria y codicia de los hombres; para su manejo han de obrar una infinidad de máquinas con tan extremada precision y concierto, que de atrasarse ó anticiparse un instante una maniobra pende el destino de la nave; *está al arbitrio de dos elementos* de extraordinaria inconstancia y violencia, cuyo modo de obrar en una embar-

rinas, *Individuo de la Real Sociedad de Londres*, *y de la Real Academia de Berlin*, dos tomos de á 4. Madrid en la Imprenta de D. Francisco Manuel de Mena, 1771.

Ha merecido esta obra tal aceptacion fuera de España, que Mr. l'Eveque, Catedrático de Hidrografia en Nantes, Ciudad de Bretaña, ha publicado su traduccion Francesa. Por ella conocen los Extrangeros los experimentos y la doctrina del Autor en asuntos de Hydrodinámica, cuyos elogios se pueden ver en la *Nouvelle Architecture Hidraulique*, *&c. Par Mr. de Prony*, *Ingenieur des ponts et Chaussèes*: *premiere partie*. París, 1790.

barcacion está todavía por saberse. Este es no obstante el primer paso que debe darse en la Ciencia Naval, este es el primer punto en que D. Jorge Juan se aparta de los autores que trataron el mismo asunto. Todos los que han escrito del impulso de los fluidos en los sólidos, atienden en su determinacion á la superficie no mas del sólido chocado, sin llevar en cuenta la cantidad que el sólido chocado está metido en el fluido. Pero si los fluidos pesan, dice D. Jorge Juan, quanto mas alta fuere la columna del fluido que choca en el sólido, tanto mayor será la eficacia del impulso. De esta consideracion tan natural saca D. Jorge Juan conseqüencias muy importantes acerca de la resistencia que el agua opone al movimiento del Navio.

Todos los demas puntos en que estriba su perfecta construccion, todo quanto pertenece á sus diferentes partes está tratado con singular maestría. Pero como su fin principal fué dar reglas que tuviesen aplicacion en la práctica, ó las pudiesen practicar tambien los rudos Marineros, puso al fin de su tratado un resumen de todas las determinaciones que con el socorro del cálculo habia conseguido. Escusára esta recapitulacion sino llevara mas mira, como otros muchos, que hacer alarde de gran calculador. Eralo sin duda, pero en su Exâmen Marítimo lo fué por necesidad, para salir (es expresion suya) del laberinto de escollos sobre que caminaba. Despues de guardarle á la verdad el debido miramiento, quiso sacarla de entre los

abro-

abrojos, donde pocos se hubieran arriesgado á buscarla (6).

En los mas de los hombres hay robustez para aguantar

(6) *Tambien* se le encargó á Don Jorge Juan construir para Cartagena de Levante una bomba de fuego, y dexó plenamente desempeñado su encargo. De esta máquina doy la descripcion en el tomo V. de mis *Elementos*, en el II. de la primer edicion de los Principios, y en el III. de la segunda.

Las bombas de fuego, llamadas tambien *máquinas de vapor*, se han perficionado mucho despues que Don Jorge Juan estableció la de Cartagena. Al peso de la *atmósfera*, que servia de agente ó potencia, se le ha substituido *el* mismo vapor, cuya injeccion se hace hoy dia fuera del cilindro principal para que no se enfrie á cada impulsion, y evitar *el desperdicio del* primer vapor que entraba en el cilindro, el qual se condensaba inútilmente. Despues se ha discurrido en Inglaterra hacer que el vapor y la condensacion obraran alternadamente en los lados del émbolo; mediante cuya disposicion no solo causa la bomba doble efecto, sino que se ha logrado convertir el movimiento de oscilacion del balancin en movimiento de rotacion, y facilitar la aplicacion de la potencia para mover muchas máquinas útiles en las artes y las *manufacturas.*

Los Ingleses tenian y tal vez hubieran tenido oculto muchos años el artificio al qual habian apelado para darle á la bomba de fuego mayor grado de perfeccion, *si no* le hubiera adivinado y publicado Don Agustin de Betancourt, natural de una de las Islas Canarias, ilustrado con todos los conocimientos matemáticos y físicos necesarios para aprovechar en beneficio de la Nacion su singular tino natural para la Mecánica. Hallábase en Paris por el año de 1788 adonde fué enviado de órden del Rey para recoger quanto pudiese encontrar conducente á los adelantamientos de la Hidraulica, pasó á Inglaterra por Diciembre del mismo año, donde pudo ver unos pocos minutos no mas una bomba que podia obrar doblado efecto; y notando que en su forma exterior algo se diferenciaba de las conocidas hasta entonces, entró en sospe-

tar mucho tiempo sin detrimento de su constitucion una con-

pechas por la que reparó que el vapor podia obrar por ambos lados. Con efecto, vuelto á París hizo los planos de una máquina de doble efecto, añadiendo las varias piezas que con este fin habrian añadido los Ingleses á la máquina que con tanta dificultad y misterio habia visto en Londres, é hizo executar un modelo, el qual correspondió perfectamente á sus esperanzas, y se guarda en la preciosa y útil coleccion de las máquinas y planos que pudo recoger en sus viages, y forma el Real Gabinete de máquinas. Por cuyo modelo se executaron las primeras máquinas de vapor que se hicieron en Francia, y se aplicaron á los molinos harineros.

La descripcion de esta nueva máquina de vapor se hallará en una Memoria que Don Agustin de Betancourt presentó á la Real Academia de las Ciencias de París en el mismo mes de Diciembre de 1789, cuyo cuerpo manifestó el particular aprecio que de ella hizo, pues los Censores á quien encargó el informe le concluyen diciendo: "Y nues„tro dictamen es que la Academia debe aplaudir al zelo y las luces de „Don Agustin de Betancourt, quien proporciona á la Francia el be„neficio de un descubrimiento que hubiera disfrutado muy tarde, y que „su Memoria, digna de la aprobacion de la Academia, debe impri„mirse con las de los sabios extrangeros." Tambien se halla una descripcion compendiosa de este descubrimiento al fin del tom. I. de la *Nouvelle Architecture Hidraulique de Mr. de Prony.* Este célebre Escritor dá allí mismo noticia de los nuevos experimentos de Don Agustin de Betancourt acerca de la expansion del vapor del agua, y de su ingeniosa máquina para graduarla. Lo que en este particular ha discurrido y adelantado forma otra Memoria, mandada igualmente imprimir con las de la misma Academia de París, é impresa separadamente en dicha Ciudad en el año de 1791. No solamente enseña este escrito la ley que sigue la expansion del vapor, sino tambien la explicacion de varios fenómenos de la naturaleza, y su aplicacion importantísima á las máquinas de vapor.

continuada contencion de ánimo, ó fatiga corporal; pero las dos juntas han de rendir muy pronto la naturaleza mas robusta; así fueron minando insensiblemente la de D. Jorge Juan. Padecia de algunos años atrás insultos de un cólico bilioso, acompañado de tan perversos accidentes, que era facil de pronosticar el paradero de su frecuencia. Su consuelo en estos lances le hallaba en su conformidad christiana, y su alivio en los ayres nativos; que aun para recobrarse habia de perder el descanso. Venció por último la *obstinada* y cruel dolencia, llevándose á D. Jorge Juan quasi de repente á los sesenta años cumplidos de su edad.

Fué de estatura y corpulencia medianas, de semblante agradable y apacible, aseado sin afectacion en su persona y su casa, parco en el comer, el igual de sus subalternos, el amigo de sus criados, y por decirlo todo en menos palabras, sus costumbres fueron las de un *Filósofo Christiano*. Quando se le hacia alguna pregunta facultativa, parecia en su ademan que era él quien buscaba la instruccion. Si se le pedia informe sobre algun asunto, primero se enteraba, despues meditaba, y últimamente respondia. De la madurez con que daba su parecer provenia su constancia en sostenerle; muy distinto de aquellos contemplativos que vacilantes entre la ambicion y la esperanza nunca tienen dictamen propio, y sacrifican constantemente á respetos humanos su razon. No apreciaba á los hombres por la Provincia de donde eran naturales; era el

va-

valedor, quasi el agente de todo hombre útil. Miraba no con desprecio (en él no cabia), sí con lastima á muchos Españoles de corazon tan ceñido, como limitados de entendimiento, que no conocen mas patria que la Ciudad, la Villa, la Aldea, el rincon donde nacieron; y aunque natural del Reyno de Valencia, no era solo Valenciano, era Español.

ERRATA.

Pág. 111. La operacion de partir un quebrado decimal por otro puesta en esta página, vá errada desde la tercer sustraccion; es á saber la del producto del tercer guarismo 1 del cociente por el divisor; quiero decir que 76843 restado de la cantidad antecedente 81003 no es 4159 como está estampado, sino 4160; restando de esta diferencia la cantidad 3842, producto del divisor parcial 76,8 por el cociente 5, sale la resta 318 y no 317 como va puesto. Hecha esta correccion, y contiuuando la operacion hasta el fin, salen las cantidades

$$\begin{array}{r} 4160 \\ \underline{3842} \\ 318 \\ \underline{307} \\ 11 \\ \underline{7} \\ 4 \end{array}$$

cuyo residuo 4, añadido al producto del divisor por el cociente 8,710541 reproduce con efecto el dividendo 630,92878.

ÍN-

ÍNDICE

De lo que se contiene en este Tomo.

ELEMENTOS DE ARISMÉTICA.

Al-

ELE-

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA.

De

ELEMENTOS

GEO-

GEOMETRÍA PRÁCTICA.

ELE-

ELEMENTOS
DE ARISMÉTICA.

Declárase la naturaleza de los números, y sus diferentes especies.

1 Llámase, en general, *cantidad* todo lo que sufre aumento ó diminucion, ó todo lo que puede ser mayor ó menor, como la extension, la duracion, el peso, &c. La cantidad es el objeto de las Matemáticas; pero como estas consideran la cantidad expresada de varios modos, nacen de aquí los diferentes ramos de que se compone esta ciencia; llamándose *Arismética* ó *Aritmética* el ramo que considera la cantidad expresada con números.

2 Es, pues, la Arismética la ciencia de los números: considera su naturaleza, sus propiepades, y suministra medios fáciles, así para expresarlos, como para componerlos, ó resolverlos, y esto es lo que llamamos *calcular*.

3 No es posible explicar ni entender que cosa es número, sin declarar ó saber primero que cosa es *unidad*.

4 Unidad llamamos una cantidad que se toma ó elige (las mas veces á arbitrio) para que sirva de término de comparacion respecto de todas las cantidades de su misma especie; quando decimos v. gr. de un cuerpo que pesa cinco libras, la libra es la unidad, quiero decir la cantidad con la qual comparamos el peso de dicho cuerpo: hubiéramos podido tomar igualmente la onza por unidad,

en cuyo caso *ochenta* hubiera expresado el peso del cuerpo propuesto; porque, segun se verá mas adelante, cinco libras componen ochenta onzas.

5 Expresa por consiguiente el número de quantas unidades ó partes de la unidad se compone una cantidad propuesta.

6 *a* Si una cantidad consta de unidades enteras, el número que la expresa se llama *número entero*; si se compone de unidades enteras y partes de la unidad, se llama *número fraccionario*: y si se compone solamente de partes de la unidad, se llama *fraccion* ó *quebrado*: *tres y medio* es número fraccionario; *tres quartos* es número quebrado.

6 Llamamos *número abstracto* todo número que expresa unidades sin decir de que especie son, v. gr. *tres*, ó *tres veces*, *quatro*, ó *quatro veces* son *números abstractos*; pero si el número dice tambien de que especie son las unidades que expresa, como quando decimos quatro pesos, seis hombres, el número se llama *concreto*.

De la Numeracion.

7 Si á la unidad añadimos otra unidad, saldrá el número que llamamos *dos*, y compondremos los números siguientes *tres*, *quatro*, *cinco* &c. con añadir mas unidades á los números formados. Y como se pueden añadir hasta el infinito unidades unas á otras, es patente qne puede haber una infinidad de números posibles todos diferentes: por consiguiente si cada número se hubiese de ex-

expresar con una figura ó caracter particular, serian infinitas en número estas figuras, y apenas bastaría la vida de un hombre para enseñarse á contar hasta veinte mil.

Fué, pues, preciso desde los principios buscar un modo de expresar todos los números posibles con un corto número de figuras ó caracteres, y en esto consiste el arte de la numeracion.

8 Los caracteres que sirven en la numeracion que seguimos, y los nombres de los números que representan son los siguientes.

cero	uno	dos	tres	quatro	cinco	seis	siete	ocho	nueve
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Para expresar con estas pocas figuras todos los números, se han convenido los Arisméticos en reducir diez unidades á sola una, que llaman *decena*; en contar por decenas del mismo modo que por unidades, esto es, en contar una decena, dos decenas, tres decenas &c. hasta nueve; y en servirse para representar estas nuevas unidades de los mismos guarismos con que pintan las unidades simples, pero distinguiéndolas por el lugar donde se asientan, á cuyo fin las ponen al lado de las unidades simples ácia la izquierda.

En virtud de esto, para representar *cincuenta y quatro*, que se compone de cinco decenas y quatro unidades, se escribe 54; para pintar *sesenta*, que se compone de un número cabal de decenas sin unidad alguna, escriben 60,

poniendo un cero á la derecha del 6 ; lo que dá á entender que no hay unidades simples, y hace que el guarismo 6 represente decenas. A este modo se puede contar hasta *noventa y nueve* inclusive.

9 Adviértase de paso una propiedad de la numeracion actual, y es que un guarismo puesto al lado izquierdo de otro, ó al lado izquierdo de un cero, expresa un número diez veces mayor que si estuviera solo.

10 Siguiendo el mismo sistema ó método, desde 99 se puede contar hasta novecientos noventa y nueve. Con diez decenas se compone una sola unidad llamáda *centena* ó *centenar*, porque diez veces diez son ciento ; se cuentan estos centenares desde uno hasta nueve, y se representan con los mismos guarismos, pero colocándolos al lado izquierdo de las decenas.

En virtud de esto, para pintar *ochocientos cincuenta y nueve*, cuyo número se compone de ocho centenares, cinco decenas y nueve unidades, se escribe 859. Si quisiéramos pintar *ochocientos y nueve*, cuyo número se compone de ocho centenares, ninguna decena, y nueve unidades, escribiríamos 809, quiero decir, que pondríamos un cero en lugar de las decenas que no hay. Si tampoco hubiese unidades, pondríamos dos ceros, de modo que *ochocientos* se ha de escribir así 800.

Las ochocientas y nueve unidades se escriben de este modo 809, poniendo un cero en lugar de las decenas que faltan ; porque si el que quiere pintar ochocientos y nue-

nueve, no pusiese figura alguna en lugar de las decenas que faltan, escribiría 8 9, donde el guarismo 8 expresa decenas (1 0), y no centenares, como debe; luego para que el 8 exprese centenares, ó valga ochocientos, ha de haber un cero entre el 8 y el 9. Esta consideracíon se aplica á todos los casos parecidos al que acabamos de considerar.

11 De lo dicho hasta aquí se sigue, que un guarismo al qual se siguen otros dos, ó dos ceros, representa un número cien veces mayor que si estuviera solo.

12 Desde *novecientos noventa y nueve* contamos, siguiendo el mismo sistema, hasta *nueve mil novecientos noventa y nueve*, para lo qual juntamos unos con otros diez centenares, que componen la unidad llamada *mil ó millar*, porque diez veces ciento son mil, contando estas unidades como las otras, y figurándolas con los mismos guarismos puestos al lado izquierdo de los centenares.

Siete mil ochocientas cincuenta y nueve se escribe así 7 8 5 9; *siete mil y nueve* de este modo 7 0 0 9, y *siete mil* de estotro 7 0 0 0: por donde se vé que un guarismo al qual se siguen otros tres ó tres ceros, vale mil veces mas que si estuviera solo.

13 Siguiendo constantemente el sistema de juntar diez unidades de cierta orden en sola una, y de colocar las nuevas unidades que de aquí se originan en lugares tanto mas adelantados ácia la izquierda, quanto mayor sea su órden, se pueden expresar, y expresamos con efecto todos los números enteros imaginables.

14 El que esté hecho cargo de lo dicho hasta aquí, entenderá con suma facilidad como se leen los números compuestos de muchos guarismos, por grandes que sean, v. gr. el siguiente.

4	centenas de bicuentos
.3	decenas de bicuentos
8	bicuentos
7	decenas de millar de cuentos
6	millares de cuentos
5	centenas de cuentos
4	decenas de cuentos
.3	cuentos ó millones
8	centenas de millares
7	decenas de millares
6	millares
5	centenares
4	decenas
.3	unidades

Se divide ó distingue el número propuesto, empezando por la derecha, en rebanadas ó períodos de seis guarismos, figuras ó caracteres cada una, que llamarémos *períodos mayores*. El primer período á mano derecha expresa unidades, el segundo cuentos ó millones, el tercero bicuentos, el quarto tricuentos, &c.

Cada período mayor se divide en dos menores de tres figuras cada uno; de modo que se escriben, ó suponen escritas las unidades en su primer guarismo á mano derecha, las decenas en el segundo, y los centenares en el tercero.

Se empieza leyendo por la izquierda, nombrando los centenares, decenas y unidades, cada una en su respectivo lugar donde están las figuras que las expresan; al fin de ca-

cada primer período menor se pronuncia mil, y al fin del segundo, donde acaba el período mayor, se expresa el nombre que vá señalado encima de su última figura.

Para leer, pues, el número 5 0 7 6 5 que no tiene mas de cinco figuras, faltándole una para componer un período mayor, se le dividirá en dos períodos menores, empezando por la derecha, del mismo modo que si hubiera seis figuras, con lo que el período menor de la izquierda no tiene mas que dos guarismos, escribiendo *u* sobre las unidades, *d* sobre las decenas, y *c* sobre los centenares en esta forma

d u *c d u*

50 765

y diremos cincuenta mil setecientas sesenta y cinco unidades.

Si el número propuesto fuese 3 5 0 7 6 5, pondríamos

c d u *c d u*

350 765

y leeríamos trescientas cincuenta mil setecientas sesenta y cinco unidades.

Se me propone para que le lea el número ....

438765438765 43; despues de dividirle conforme á lo enseñado, y aquí se ve

d u *c d u* *c d u*

43 876 543 876 543

digo quarenta y tres bicuentos, ochocientos setenta y seis mil, quinientos quarenta y tres cuentos, ochocientas se-

 ten-

tenta y seis mil, quinientas quarenta y tres unidades.

El número 2418579643219000461325476809$6$ se escribirá y leerá como sigue,

c d u	*c d u*	*c d u*	*c d u*	*c d u*
2418	579643	219004	613254	768096
•	•	•	•	•

dos mil quatrocientos diez y ocho quatricuentos,
quinientos setenta y nueve mil seiscientos quarenta y tres tricuentos,
doscientos diez y nueve mil y quatro bicuentos,
seiscientos trece mil doscientos cincuenta y quatro cuentos,
setecientos sesenta y ocho mil, y noventa y seis.

15 Del método ó sistema de numeracion que acabamos de declarar, y que por lo dicho (8) es de puro convenio, se infiere que yendo de la derecha á la izquierda, las unidades de que consta cada guarismo van siendo diez veces mayores; y que por consiguiente para hacer que un número sea diez veces, cien veces, mil veces &c. mayor, basta poner á continuacion del guarismo de sus unidades uno, dos, tres, &c. ceros: al contrario, retrocediendo de la izquierda á la derecha, las unidades van siendo diez veces menores.

16 Esta numeracion es el fundamento de todos los demas modos de contar; bien que no todas las artes siguen siempre el método de contar solo por decenas, por decenas de decenas, &c.

17 Siempre que hay empeño de determinar cabales

las

las diferentes especies de cantidades, es preciso, para facilitar el trato, subdividir las medidas principales de cada especie en otras menores, y estas en otras todavía menores, hasta llegar á subdivisiones tan pequeñas que puedan despreciarse en las cuentas prácticas. El que considere con cuidado las diferentes medidas que usamos, ya de pesos, ya de monedas, &c. pensará que son efecto de la casualidad sus subdivisiones. Pero si lo reflexîona con madurez echará de ver que cada una de ellas puede considerarse como otro sistema de numeracion; de donde se sigue que pues todo sistema es arbitrario, hubiera sido mas puesto en razon y mas acomodado seguir en las subdivisiones de las medidas el sistema de la numeracion actual de la progresion décupla, con lo que se hubieran escusado los quebrados y las operaciones hubieran sido mucho mas sencillas. Aunque no está sin embargo en nuestra mano mudar las medidas, sin embargo enseñarémos en adelante como todas las subdivisiones de nuestras medidas se pueden arreglar por el sistema de numeracion declarado.

18 En el cálculo de las cantidades, de qualquier modo que vengan expresadas, y por consiguiente en el cálculo de los números, se usan ciertos signos que sobre abreviar sus expresiones, indican las operaciones hechas ya, ó por hacer. Explicarémos aquí los principales, dexando el dar á conocer los demas para quando declarémos los modos de calcular donde es estilo, y trae conveniencia usarlos.

Las

19 Las primeras operaciones que con los números se hacen son 1.° buscar uno que exprese el valor de muchos; 2.° restar de un número dado otro menor para saber que exceso lleva aquel á este. El signo con que señalamos el valor de dos ó mas números juntos es +, que se pronuncia *mas*: 3+4 v. gr. se lee tres mas quatro, y está diciendo que el valor de 3 se junta con el de 4.

El signo con que señalamos que un número se resta de otro, ó la diferencia que hay entre los dos es —, y se pronuncia *menos*; 4—3, v. gr. se lee 4 menos 3, y está diciendo que del 4 se ha rebaxado ó debe rebaxar el 3.

Para expresar el resultado final de todo cálculo se usa este signo = que se pronuncia *vale* ó es *igual* á; como 7 es lo que resulta de juntar 3 con 4, escribimos 3+4=7. Por ser 1 lo que queda ó resta despues de rebaxar 3 de 4, escribimos 4—3 = 1, y decimos 4 menos 3 vale 1, ó es igual á 1.

Reglas de la Arismética.

20 El objeto de la Arismética es, segun llevamos dicho, dar reglas para calcular con facilidad los números, procurando reducir el cálculo de los números mas complicados al cálculo de los números mas sencillos, ó expresados con el menor número posible de figuras.

21 Las operaciones con que consigue esta ciencia su fin no son mas que dos, hablando con propiedad, y segun dexamos insinuado poco ha (19); pero contamos co-

comunmente quatro, que son *sumar*, *restar*, *multiplicar* y *partir*, ó con otros nombres, *adicion*, *sustraccion*, *multiplicacion* y *division*.

Explicarémos como se practican estas puatro reglas primero con enteros, y despues con quebrados.

Adicion de los números enteros.

22 Quando se calculan muchos números con el fin de expresar con uno solo el valor de todos, la operacion se llama *adicion*.

Quando los números por sumar tienen solo un guarismo, no se necesita regla alguna para sacar su *suma*; pero si tienen muchos guarismos, se halla su suma practicando la regla siguiente.

Escríbanse unos encima de otros todos los números por sumar, de modo que las unidades de todos estén en una misma linea de arriba abaxo que llamarémos *columna*; lo propio digo de sus decenas, centenares, &c. y tírese por debaxo de todas las partidas escritas con este cuidado una linea.

Júntense primero unos con otros todos los valores de los números que ocupan la columna de las unidades: si la suma no pasa de 9, póngase debaxo; si pasa de 9, tendrá decenas: escríbase debaxo lo que hubiere ademas de las decenas; cuéntense las decenas que hubiere por otras tantas unidades, y júntense con los números de la columna inmediata: practíquese con los números de la segunda

co-

columna la misma regla que con los de la primera, y vá-yase prosiguiendo al mismo tenor de columna en columna hasta la última, debaxo de la qual se escribirá la suma conforme saliere. Con los exemplos aclararémos esta regla.

Quiero saber qual es el valor de $54925 + 2023$. Para sumar estos dos números los escribo como aquí se ve,

$$\begin{array}{r} 54925 \\ 2023 \\ \hline \text{suma } 56948 \end{array}$$

y despues de tirada la linea, empiezo por las unidades, diciendo: 5 y 3 son 8, pongo 8 debaxo de la columna de las unidades. Paso á la columna de las decenas, y digo: 2 y 2 son 4, pongo, pues, 4 debaxo. En la columna de los centenares digo: 9 y 0 son 9, escribo, pues, 9 debaxo. En la columna de los millares digo: 4 y 2 son 6, escribo, pues, 6 debaxo de dicha columna. Finalmente, en la columna de las decenas de millar, digo: 5 y nada son 5, y escribo igualmente 5 debaxo.

El número 56948 que saco por esta operacion es la suma de los dos números propuestos; porque se compone de las unidades, decenas, centenares y millares de ambos, que hemos ido juntando succesivamente unos con otros. Luego $54925 + 2023 = 56948$.

Se me pide la suma de los quatro números siguientes 6903, 7854, 953, 7327.

Es-

Escríbolos como se vé,

	6903
	7854
	953
	7327
suma	23037

Empezando como antes por la derecha, digo: 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17; escribo las siete unidades debaxo de la primer columna, y llevo la decena para añadirla como unidad á los números de la columna siguiente, que tambien expresan decenas.

Pasando á la segunda columna, digo: 1 que llevo y 0 son 1, y 5 son 6, y 5 son 11, y 2 son 13; pongo 3 debaxo de esta columna, y en lugar de la decena, llevo una unidad que agrego á la columna inmediata diciendo: 1 que llevo y 9 son 10, y 8 son 18, y 9 son 27, y 3 son 30; pongo 0 debaxo de esta columna, y en lugar de las tres decenas, llevo tres unidades, que agrego á la columna siguiente diciendo igualmente: 3 que llevo y 6 son 9, y 7 son 16, y 7 son 23; pongo 3 debaxo de esta columna; y como no se sigue otra, escribo mas adelante las dos decenas que me tocaría agregar á la columna siguiente si la hubiese. El número 23037 que saco manifiesta que $6903 + 7854 + 953 + 7327 = 23037$.

23 Son á veces tantas las partidas por sumar, que es facil equivocarse siguiendo al pie de la letra la regla da-

dada. Entonces se dividen todas en tres partes v. gr. se saca la suma de cada division, y se suman despues las tres sumas. Para sumar las doce partidas aquí puestas, las divido como aquí se vé;

34567	
62034	
91502	
47235	
32180	235338
72467	220882
87310	259502
28925	715722
20074	
97463	
91089	
50876	

saco la suma de cada division, asiento las tres sumas, y sumándolas todas tres sale 715722, suma de todas las doce partidas.

Sustraccion de los Números enteros.

24 La sustraccion es una operacion en la qual se resta un número de otro. El resultado de cuya operacion se llama *resta*, *exceso ó diferencia.*

25 Para practicar esta operacion, se escribe el número que se quiere restar debaxo del otro, del mismo modo

do que si se hubieran de sumar; y tirando una linea, se quita, yendo de la derecha á la izquierda, cada número inferior del superior correspondiente, esto es, las unidades de las unidades, las decenas de las decenas, &c. Se escribe cada resta debaxo por el mismo orden; y cero quando no resta nada.

Quando el guarismo inferior es mayor que su correspondiente superior, se le añaden á este diez unidades, sacándolas con el pensamiento de su inmediato á la izquierda, el qual por esta razon se considera como una unidad menor, conforme se verá en el segundo exemplo, señalando con un punto el guarismo del qual se toma la decena.

Para restar 5432 de 8954, ó saber quanto vale 8954—5432, escribo las dos partidas como sigue,

8954
5432
resta 3522

y empezando por las unidades, digo: si quito ó rebaxo 2 de 4, resta 2 que pongo debaxo; pasando despues á las decenas, digo: si quito 3 de 5, resta 2 que pongo debaxo de las decenas. Llegando á la tercer columna, digo: si quito 4 de 9, resta 5, póngole debaxo de la misma columna. Finalmente, paso á la quarta columna, y digo: si quito 5 de 8, resta 3; pongo 3 debaxo del 5, y hallo que despues de restar 5432 de 8954, queda la resta

ta 3522, y que por consiguiente 8954 — 5432 = 3522.

27 Para restar 7987 de 27646, escribo las dos partidas como aquí se ve;

$$\begin{array}{r} \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \ \\ 27646 \\ \underline{7987} \\ \text{resta } 19659 \end{array}$$

como no puedo restar 7 de 6, añado al 6 diez unidades quitando una unidad al guarismo 4 que está inmediatamente á la izquierda, porque una unidad de la segunda columna vale diez unidades de la primera (9), y digo: si resto 7 de 16 resta 9, que pongo debaxo del 7. En este exemplo cada uno de los guarismos 2764 de la partida superior va señalado con un punto para recordar que á cada uno se le ha quitado una unidad.

Paso despues á las decenas; pero no diré ya: si resto 8 de 4; pero diré: si resto 8 de 3 no mas, porque el 4 tiene de menos la unidad que añadí al 6: como no se pucde restar 8 de 3, añadiré tambien al 3 diez unidades sacando una del guarismo 6 que está inmediato á la izquierda, y digo: si resto 8 de 13 queda 5; pongo, pues, 5 debaxo del 8.

Paso á la tercer columna, y digo igualmente: si resto 9 de 5 ó (practicando lo que poco ha) si resto 9 de 15, queda 6, y pongo 6 debaxo del 9.

Lle-

Llego á la quarta columna, y digo por la misma razon: si resto 7 de 6, ó por mejor decir, de 16, quedan 9, y le pongo debaxo del 7; y como no hay nada que restar de la quinta columna, pongo debaxo de ella no 2, porque al 2 se le ha quitado una unidad, sino 1, y saco la resta 19659; de modo que 27646—7987 = 19659.

25a Si la figura á la qual se ha de quitar una unidad fuese cero, se tomará la unidad, no del cero, sino de la primer figura significativa inmediata á la izquierda del cero; pero aunque entonces se toma 100, ó 1000, ó 10000, conforme hay uno, dos ó tres ceros seguidos, no por eso dexará de practicarse lo enseñado; quiero decir que no se le añadirá mas de 10 al guarismo necesitado; y porque estos 10 se toman de los 100, ó de los 1000 &c. para emplear los 90 ó los 990 restantes, se cuentan los ceros que se siguen por otros tantos 9, como lo declara el caso siguiente.

De.......	20064
quiero restar	17489
resta.......	2575

Digo desde luego: si resto 9 de 4 ó de 14 (quitando para añadirla al 4 una unidad al guarismo siguiente 6) resta 5. Para proseguir la operacion, considero que como no se puede restar 8 de 5, ni tampoco se puede pedir unidad alguna á ninguno de los dos caracteres inmediatos que son dos ceros, he de sacar una unidad del 2, la qual

vale mil respecto del guarismo 6, pues contando desde el 6 ácia la izquierda, diciendo: unidad, decena, &c. el 2 vale millares. De cuyo millar no le añado sino 10 unidades al 6 que ahora no vale sino 5, y digo: si resto 8 de 15 queda 7.

Como del millar de unidades quitado al 2 he agregado solas 10 al guarismo 6, de las 990 restantes resto los números que hay debaxo de los ceros, lo que viene á ser lo propio que si tomara cada cero por 9, digo, pues: si resto 4 de 9 queda 5; si resto 7 de 9 queda 2; y finalmente: si resto 1 de 1 no queda nada.

25 *b* Siempre que ocurre restar un número menor de otro mayor, la regla no tiene dificultad; pero parece impracticable quando hay que restar de un número menor otro mayor, como quando hay que averiguar el haber de un hombre que debe mas de lo que tiene. Entonces la operacion se hace al reves, quiero decir que el número menor se resta del mayor, y se señala la resta con este signo —, el qual expresa la naturaleza del caso, y es causa de llamarse *negativo* el número al qual acompaña.

26 De aquí se sigue que hay cantidades *negativas* contrapuestas á las que llamamos *positivas*, y se señalan estas con el signo +; con efecto, el haber de un hombre que nada debe y tiene 6 reales, es positivo +6, el haber de un hombre que nada tiene y nada debe, es nada ó cero; el haber de un hombre que no solo nada tiene, sino que ademas debe 6 reales, es menos que nada, es nega-

ti-

tivo —6, porque los 6 reales que debe destruyen 6 reales que se le dieran; por manera que dándole 6 reales, ó lo que es todo uno, perdonándole la deuda, su haber sería nada ó cero. Por consiguiente el haber de este hombre es +6, ó —6; sobre cuyas expresiones conviene hacer una consideracion de mucha importancia, y es que cero es el término desde donde empiezan las cantidades positivas y negativas, siendo las primeras mas que cero, y las otras menos que cero.

Supongamos ahora, para dar un exemplo del caso que ha dado motivo á estas consideraciones, que se nos ofrezca ajustar las cuentas á un hombre que tiene 3 reales y debe 6; claro está, por lo dicho, que su haber es —3, pues le faltan 3 reales para que su haber sea 0. En lugar de restar la deuda 6 del haber 3, haré lo contrario, y restaré 3 de 6, la resta con el signo negativo —3 será el haber del tal hombre.

26 *a* De la naturaleza de las cantidades negativas se sigue que se han de calcular al reves de las positivas; quiero decir, que quando ocurra sumar una cantidad negativa con otra positiva, se ha de restar aquella de esta; porque si quiero sacar lo que suman las deudas de un hombre con su caudal, he de rebaxar aquellas de este; si quiero restar una cantidad negativa de otra positiva, he de sumar aquella con esta; porque rebaxar ó quitar deudas á uno es aumentar su caudal, es darle dinero.

26 *b* Luego por lo mismo que las cantidades positivas son patentemente mayores que nada, y las negativas son menores, los números positivos se formarán añadiendo 1 á 0, esto es á nada, y continuando con añadir succesivamente mas unidades á cero. De aquí nace la serie de los números llamados naturales, cuyos primeros términos son los siguientes

$$0, +1, +2, +3, +4, +5, +6.$$

Si en vez de añadir succesivamente unidades á 0, las fuésemos restando, resultará la serie de los números negativos, cuyos primeros términos son los siguientes.

$$0, -1, -2, -3, -4.$$

Síguese de aquí que $1-1$ es nada ó cero, $2-2$ lo mismo, $3-3$ es tambien cero &c.; que $4-7$ es -3; porque si un hombre tiene 4 pesos y debe 7, no solo no tiene nada, sino que todavía debe 3 pesos: por lo mismo $8-13$ es -5, y $30-48$ es -18.

Prueba de la Adicion y Sustraccion.

27 Probar una operacion es hacer otra que dé á conocer con evidencia que la primera está bien hecha, y que en su práctica no se cometió ni descuido ni error, lo que en muchas ocasiones se consigue haciendo otra operacion contraria á la primera. Porque si la primera fué bien hecha, la segunda que deshace la que aquella hizo, ha de reponer las cosas en el primer estado que estaban antes de executarse la primera.

De-

Demostrar una operacion es hacer patente que las reglas por las quales se executa concuerdan con la razon, esto es con principios ciertos y evidentes.

Supuesta esta distincion, diremos como se averigua si la regla de sumar, y la de restar están bien hechas.

27 *a* La adicion se prueba sumando otra vez las mismas partidas, pero al reves, quiero decir empezando por la izquierda. La suma de la primer columna se quita ó resta de la parte que le corresponde en la suma inferior, debaxo de la qual se escribe la resta; esta se reduce con el pensamiento á decenas para juntarla con el guarismo siguiente de la misma suma á la derecha, y del total se resta la suma de la columna superior. Se prosigue al mismo tenor hasta la última columna, que es la primera de la derecha, cuya suma se resta del número inferior correspondiente; y si la adicion fué bien hecha, no ha de quedar nada.

$$
\begin{array}{r}
6903 \\
7854 \\
953 \\
7327 \\
\hline
23037 \\
\cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,0
\end{array}
$$

En virtud de esto, para asegurarme de que la partida puesta debaxo de la raya es la verdadera suma de las quatro partidas de encima, sumo otra vez las quatro partidas

empezando por la izquierda, y digo: 6 y 7 son 13 y 7 son 20; réstolos de 23, queda 3, ó 3 decenas de la columna siguiente, las quales añadidas con el pensamiento al 0 que le corresponde componen 30. Paso á la segunda columna y digo: 9 y 8 son 17, y 9 son 26, y 3 son 29; réstolos de 30, y queda 1, ó una decena, la qual añadida con el pensamiento al guarismo siguiente 3, compone 13. Sumo unos con otros todos los números de la columna que está encima de este 3, diciendo: 5 y 5 son 10, y 2 son 12; réstolos de 13, queda 1, ó una decena, la qual añadida con el pensamiento al 7 que se sigue compone 17. Sumo todos los guarismos de la quarta columna, diciendo: 3 y 4 son 7, y 3 son 10, y 7 son 17; réstolos de 17, no queda nada; de lo que infiero que la suma sacada es la verdadera.

Porque es patente que si se quitan succesivamente de una suma todos los millares, centenares, decenas, &c. de que se compuso, no ha de quedar nada; pues claro está que quitando de un todo todas las partes de que se compone, no ha de quedar resta alguna.

28 Para probar la sustraccion, se suma la resta con el número menor, ó el que se restó; la suma ha de ser igual al número mayor si la sustraccion fué bien hecha.

$$\begin{array}{r} 20054 \\ 17489 \\ \hline 2565 \\ \hline 20054 \end{array}$$

El

El exemplo de sustraccion aquí puesto es bien hecho, porque la suma de la resta 2565 y del número menor 17489, es igual al número mayor 20054. Y claro está que si á un número menor que otro se le añade el exceso que este le lleva, han de salir iguales uno con otro ambos números.

Multiplicacion de los Números enteros.

29 *Multiplicar* un número por otro es tomar ó sumar el primero tantas veces quantas unidades hay en el segundo. Multiplicar v. gr. 4 por 3 es tomar tres veces el número 4.

30 El número por multiplicar se llama *multiplicando*; el número por el qual se le multiplica, se llama *multiplicador*; y lo que sale de la multiplicacion se llama *producto.*

31 El multiplicando y el multiplicador se llaman tambien los *factores* del producto: 3 y 4 v. gr. son los factores de 12, porque 3 veces 4 son 12, y 4 veces 3 son tambien 12.

31 *a.* De aquí se deduce que, en la multiplicacion, quanto la unidad es menor que el multiplicador, tanto el multiplicando es menor que el producto; ó al reves, quanto el producto es mayor que el multiplicando, tanto el multiplicador es mayor que la unidad: v. gr. 1 cabe tres veces en 3 del mismo modo que 4 en 12; y como en 12 cabe 4 tres veces, tambien 1 cabe tres veces en 3. Y co-

mo podemos tomar por multiplicando el que queramos de los dos factores, tambien es cierto que 1 es menor que 4, del mismo modo que 3 es menor que 12.

32 Por lo que hemos dicho que es multiplicar un número por otro, queda manifiesto que esta operacion podria practicarse, escribiendo tantas veces el multiplicando quantas unidades hay en el multiplicador, y sacando despues la suma. Para multiplicar v. gr. 7 por 3 se podia escribir,

$$\begin{array}{r} 7 \\ 7 \\ 7 \\ \hline 21 \end{array}$$

y la suma que sale de esta adicion sería el producto.

Pero quando el multiplicador es grande, la operacion hecha por este término sería muy larga; lo que llamamos multiplicacion es el método de hallar el mismo resultado por un camino mas breve; de donde se infiere que la multiplicacion es un método breve de hacer la adicion.

33 Quando se consideran los números de un modo abstracto, esto es, sin atender á la naturaleza de sus unidades, está al arbitrio del calculador tomar por multiplicando, ó multiplicador el que quiera de los dos números propuestos. Si hemos de multiplicar v. gr. 4 por 3, lo mismo tiene multiplicar 4 por 3, que 3 por 4; el producto en ambos casos será 12; y de hecho, 3 veces 4

no

no son otra cosa que el triplo de 1 vez 4, y 4 veces 3 son el triplo de 4 veces 1 ; pero es evidente que 4 veces 1, y 1 vez 4 son una misma cosa ; y lo mismo se puede decir de otro número qualquiera.

34 Pero quando por los términos de la cuestion ó pregunta, el multiplicando y el multiplicador son números concretos, importa distinguir el multiplicando del multiplicador, cuidado necesario especialmente en la multiplicacion de los *números denominados*, conforme veremos en adelante.

Esta distincion la hará facilmente el calculador siempre que se entere bien de los términos en que viene propuesto el caso que dá motivo á la multiplicacion ; porque él mismo dá á conocer qual de las dos cantidades se ha de tomar muchas veces, esto es, qual es el multiplicando, y qual es la que señala quantas veces se ha de tomar la primera, quiero decir, qual es el multiplicador.

35 Como el oficio del multiplicador es expresar quantas veces se debe tomar el multiplicando, siempre es un número abstracto ; quando se pregunta v. gr. quanto importan 52 varas de paño á 36 reales la vara, se viene á los ojos que el multiplicando es 36 reales, los quales se han de sumar 52 veces, sea que 52 exprese varas ú otra cosa qualquiera.

36 Por consiguiente el producto que sale de sumar muchas veces el multiplicando, expresará unidades de la misma especie que el multiplicando.

La

37 La multiplicacion de las partidas por grandes que sean se reduce á multiplicar una partida de un solo guarismo por otra partida tambien de un guarismo solo. Es por lo mismo muy provechoso exercitarse en hallar el producto de los números que no tienen mas de un guarismo, sumando muchas veces un número con el mismo. Para el caso es sumamente socorrida la tabla siguiente.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

La primer columna de esta tabla, á mano izquierda, se forma sumando muchas veces de seguida 1 con 1; la segunda sumando del mismo modo 2 con 2; la tercera sumando del mismo modo 3 con 3, &c.

38 Para hallar con el socorro de esta tabla el producto de dos números de un solo guarismo cada uno, se

bus-

busca el uno de los dos números, v. gr. el multiplicando, en la fila superior de la izquierda á la derecha, y desde el mismo número se baxa en linea perpendicular hasta llegar al quadro que está enfrente del multiplicador, el qual se halla en la primer columna á mano izquierda; el número que está en dicho quadro es el producto. Para hallar v. gr. el producto de 9 por 6, ó quanto valen 6 veces 9, voy baxando desde el 9 de la primer fila hasta llegar al quadro que está enfrente del 6 de la primer columna; el número 54, que está en dicho quadro, me está diciendo que 6 veces 9 son 54.

39 La señal de la multiplicacion es esta $\times$, que se pronuncia *multiplicado por*; de modo que $3 \times 4 = 12$, quiere decir, que 3 multiplicado por 4 vale 12. En lugar del signo $\times$ sirve tambien un punto: v. gr. $3 \cdot 4$ es lo mismo que 3×4. Si alguna de las dos partidas por multiplicar, ó ambas tienen muchas figuras, se escribe dentro de un paréntesis, para dar á entender que toda ella, ó todos sus guarismos se han de multiplicar; $(3+4) \times 3$ ó $(3+4) \cdot 3$ ó $\overline{3+4} \times 3$ significan que el 3 y el 4 se han de multiplicar por 3, ó que el multiplicando es la suma de 3 y $4 = 7$. Si la multiplicacion se señalára de estotro modo $3+4 \cdot 3$ daria á entender que al 3 del multiplicando se le ha de añadir el producto de 4 por 3, de lo que saldria una cantidad muy diferente de la que representa $\overline{3+4} \cdot 3$, pues esta es 21, y la otra ó $3+4 \cdot 3$ no es mas que 15.

Mul-

Multiplicacion de un número de muchos guarismos por otro de solo un guarismo.

40 Póngase el multiplicador que, segun suponemos, no tiene mas de una figura, debaxo del multiplicando, donde se quiera; bien que lo mejor será sentarle siempre debaxo de las unidades del multiplicando.

Multiplíquese desde luego el guarismo de las unidades por el multiplicador, y si el producto no pasa de unidades, pónganse debaxo; si tiene unidades y decenas, siéntense solas las unidades, y contando las decenas por otras tantas unidades, llévense.

Multiplíquese igualmente el guarismo de las decenas del multiplicando, y añádase al producto el número de decenas que se lleva: póngase la suma debaxo si puede expresarse con un guarismo solo; si no, pónganse solas las unidades de este producto, y llévense las decenas, que serán centenares, para juntarlas con el producto siguiente, que tambien expresará centenares.

Prosígase multiplicando por la misma regla succesivamente todos los guarismos del multiplicando, los guarismos puestos debaxo expresarán el producto.

40 *a* En el supuesto de que la vara tiene 3 pies, se me pregunta ¿quantos pies componen 2 8 6 4 varas? Claro está que he de tomar 2 8 6 4 veces el número 3, ó, lo que es todo uno, 3 veces 2 8 6 4 pies.

Es-

Escribo, pues, 2864 multiplicando,
3 multiplicador,

8592 producto.

Y empezando por las unidades, 1.º digo, 3 veces 4 son 12, pongo 2, y llevo una unidad por la decena; 2.º 3 veces 6 son 18, y una que llevo son 19; pongo 9, y llevo 1; 3.º 3 veces 8 son 24, y 1 que llevo son 25; pongo 5, y llevo 2; 4.º 3 veces 2 son 6, y 2 que llevo son 8, y pongo 8. El número 8592 es el producto, ó los pies que componen las 2864 varas, pues se compone de 3 veces las 4 unidades, de 3 veces las 6 decenas, 3 veces los 8 centenares, y 3 veces los dos millares, y por consiguiente de 3 veces todo el número 2864.

Multiplicacion de los números que tienen muchos guarismos cada uno.

41 Quando el multiplicador tiene muchos guarismos, debe practicarse succesivamente con cada uno de ellos lo que acabamos de enseñar para quando tiene solo uno; pero empezando siempre por la derecha. Por esta regla se multiplicarán primero todos los guarismos del multiplicando por el guarismo de las unidades del multiplicador, despues por el de las decenas, asentando este segundo producto debaxo del primero; pero como ha de expresar decenas, pues el guarismo multiplicador expresa de-

decenas, se escribirá la primer figura de este segundo producto debaxo, ó en la columna de las decenas, y los demas guarismos ácia la izquierda, cada uno en la correspondiente columna.

El tercer producto que se sacará multiplicando por el guarismo del multiplicador que expresa centenares, se pondrá debaxo del segundo, pero adelantándole una columna ácia la izquierda. La misma regla se practicará con los demas productos particulares.

Una vez hechas todas estas multiplicaciones particulares, se sumarán unos con otros sus productos, y su suma será el producto total.

Quiero multiplicar 65487
por. 6958

	523896
	327435
	589383
	392922
	455658546

Multiplico primero 65487 por el guarismo 8 del multiplicador, que expresa unidades, y pongo unos despues de otros á medida que van saliendo, los guarismos del producto 523896, que saco por la regla dada (16).

Multiplico despues 65487 por el guarismo 5 del multiplicador, escribiendo su producto debaxo del primero; pero como dicho 5 expresa decenas, pongo el primer guaris-

rismo del producto que dá en la columna, ó debaxo de las decenas del primer producto.

Multiplico tambien 65487 por el tercer guarismo 9 del multiplicador, poniendo su producto 589383 debaxo del segundo, pero escribo su primer guarismo 3 en la columna de los centenares, porque el multiplicador 9 expresa centenares.

Finalmente, multiplico 65487 por el último guarismo 6 del multiplicador, cuyo producto 392922 escribo debaxo del antecedente, adelantándole tambien una columna á la izquierda, á fin de que su primer guarismo esté en la columna de los millares, porque el guarismo multiplicador expresa millares. Sumo por fin todos los productos particulares, y saco 455658546, producto verdadero de 65487 por 6958, esto es el valor cabal de 65487 tomado 6958 veces. En lo que no puede haber duda, porque en la primer multiplicacion particular se ha tomado 65487, 8 veces, 50 en la segunda, 900 en la tercera, y 6000 veces en la última.

42 He de multiplicar 6500

He de multiplicar	6500
por.	350
	325
	195
	2275000

Multiplico solo 65 por 35, y saco 2275, á continuacion de cuyo número pongo los tres ceros, suma de los

que

que hay en el multiplicando y el multiplicador.

La razon de esta práctica es patente, pues el multiplicando 6500 expresa 65 centenares; luego quando se multiplica 65, debe tenerse presente que el producto ha de expresar centenares. El multiplicador 350 expresa 35 decenas; luego quando se multiplica por 35, debe tenerse presente que el producto habrá de expresar decenas; por consiguiente el producto ha de expresar decenas de centenares, esto es millares, y por lo mismo ha de llevar tres ceros al último. Del mismo modo se discurrirá en todos los casos parecidos á este.

43 Siempre que entremedias de los guarismos del multiplicador haya ceros, como la multiplicacion por estos ceros no puede dar sino cero, pues tomando un número cero veces sale cero, se escusará sentarlos en el producto, y pasando á executar la multiplicacion por el primer caracter significativo que se siga al cero, ó á los ceros, se adelantará su producto tantas columnas á la izquierda mas una, quantos ceros hubiese seguidos en el multiplicador; esto es, dos columnas si hubiese un cero, tres columnas si hubiese dos ceros, &c.

Se me ofrece multiplicar	42052
por.	3006
	252312
	126156
	126408312

Des-

Despues de multiplicar por 6 y sentar el producto 2 5 2 3 1 2, multiplico inmediatamente por 3, pero escribo el producto de modo que exprese millares como corresponde. Por cuyo motivo le adelanto tres columnas á la izquierda, pues hay dos ceros entremedias de las figuras significativas del multiplicador.

42 Multiplicar un número por 1 0 es hacerle diez veces mayor, multiplicarle por 1 0 0 es hacerle cien veces mayor; y como lo primero se logra con añadir al número propuesto un cero, lo segundo con añadirle dos ceros, es patente que para multiplicar un número por 1 0, ó por 1 0 0, ó, lo que es todo uno, para hacerle diez veces mayor, se ha de añadir un cero; dos ceros para hacerle cien veces mayor.

43 *a* De aquí se sigue, que quando el multiplicando tenga muchos ceros, y el multiplicador tambien, basta multiplicar las figuras significativas del uno por las figuras significativas del otro, y añadir á continuacion de su producto tantos ceros quantos hay en ambos factores juntos. Si se me ofrece multiplicar v. gr. 3 0 por 5 0 0, multiplicaré 5 por 3, y al producto 1 5 añadiré tres ceros, de modo que el producto será 1 5 0 0 0.

La razon es muy obvia, porque el producto de 3 por 5 ha de ser 1 5; el producto de 3 0 por 5 ha de ser diez veces mayor porque el factor 3 0 es diez veces mayor que 3; el producto de 3 por 5 0 0 ha de ser cien veces mayor que el primero, porque 5 0 0 es cien veces mayor que 5;

luego el producto de 30 por 500 ha de ser mil veces mayor que 3×5, lo que se logra con añadir tres ceros al producto 3×5.

43 *b* Quando el multiplicador es alguno de los números que están entre diez y veinte, basta multiplicar el multiplicando por el último guarismo del multiplicador, y sentar el producto debaxo del mismo multiplicando una columna mas adelantado á mano derecha; la suma de las dos partidas será el producto de los dos números propuestos.

$$\begin{array}{r} 547 \\ \underline{4376} \\ 9846 \end{array}$$

Para multiplicar v. gr. 547 por 18, pongo una columna mas adelantado á mano derecha el producto 4376 del multiplicando por 8 último guarismo del multiplicador 18, y la suma 9846 de este producto y el multiplicando es el producto de los números propuestos.

Algunos usos de la multiplicacion.

44 La multiplicacion sirve para hallar el valor de muchas unidades, quando se conoce el valor de cada una. 1.° Si quiero saber v. gr. quanto importarán 5843 varas de obra, á razon de 54 rs. la vara, he de multiplicar 54 rs. por 5843, ó (40) 5843 por 54; el producto que busco será 315522 rs.

2.° Se me pregunta quanto pesan juntos 5954 maderos,

ros, en el supuesto de que cada uno de ellos pesa 72 libras. Para responder, multiplico 72 libras por 5954, ó 5954 por 72, y saco que los 5954 maderos pesan entre todos 428688 libras.

45 Sirve tambien la multiplicacion para reducir unidades de determinada especie á otras unidades de especie menor; v. gr. los pesos á reales, y los reales á maravedises; las varas á pies, estos á pulgadas, las pulgadas á lineas; los dias á horas, estas á minutos, los minutos á segundos; cuyas reducciones son indispensables en muchos casos.

Se me ofrece reducir 8 pesos 13 reales y 9 mrs. á maravedises. Ya que un peso vale 15 reales, multiplico los 8 pesos por 15 (44), de cuya operacion saco 120 rs. con los quales junto los 13, y saco 133 rs. Multiplico esta cantidad por 34, porque cada real vale 34 mrs. y saco 4522 mrs. sumo con ellos los 9 mrs. propuestos, y saco 4531 mrs. los mismos que componen cabales los 8 pesos 13 rs. y 9 mrs.

Si se me pregunta quantos minutos hay en un año comun, ó en 365 dias, 5 horas y 48 minutos; ya que el dia tiene 24 horas, multiplico 24 por 365, y al producto 8760 horas añado 5 horas; multiplico la suma 8765 por 60 (45), porque la hora tiene 60 minutos, y me salen 525900 minutos; añádoles los 48 minutos propuestos, y saco 525948 minutos, que son los que componen cabal un año comun.

 Aquí

46 Aquí es el lugar de prevenir, que duplicar, triplicar, quadruplicar &c. un número, es multiplicarle por 2, por 3, por 4 &c.

46 *a* Quando alguno de los dos números por multiplicar tiene muchos guarismos, es muy acertado formar una tabla de los productos del multiplicando por cada uno de los nueve guarismos; con cuyo auxîlio la operacion se reduce á sentar debaxo de la raya los productos respectivos que dán los guarismos del multiplicador, cada uno en su correspondiente lugar, y sacar despues la suma.

1	70500768
2	141001536
3	211502304
4	282003072
5	352503840
6	423004608
7	493505376
8	564006144
9	634506912

Multiplicando	70500768
Multiplicador	50431
	70500768
	211502304
	282003072
	352503840
producto	3555424231908

Para multiplicar v. g. uno por otro los dos números aquí sentados, saco de la adjunta tabla los productos del multiplicando por cada figura del multiplicador, y los pongo unos debaxo de otros, teniendo presente á que columna ha de corresponder el primer guarismo de cada uno,

con-

conforme exprese unidades, decenas, centenares, &c. su suma es el producto que busco.

Division de los números enteros.

47 *Dividir* ó *partir* un número por otro es buscar quantas veces en el primero de los dos números cabe el segundo.

El número por partir se llama *Dividendo*, el número que parte *Divisor*, y el que expresa quantas veces en el dividiendo cabe el partidor se llama *Cociente*.

No siempre se lleva en la division la mira de saber quantas veces un número cabe en otro; pero en todos los casos se practica la operacion como si se llevara esta mira; por cuyo motivo se puede y debe decir, que en la division se busca quantas veces cabe el divisor en el dividendo.

Si busco v. gr. quantas veces en 12 cabe 3, hallo que cabe 4 veces; es, pues, 12 el dividendo, 3 el divisor, y 4 el cociente. De aquí se sigue que, en la division, quanto el dividendo es mayor que el divisor, tanto el cociente es mayor que la unidad, pues así como en 12 cabe 3 quatro veces, tambien en 4 cabe 1 quatro veces.

Infiérese de aquí 1.º que quanto mayor sea el divisor, siendo uno mismo el dividendo, tanto menor será el cociente: 2.º que si se multiplica el divisor por el cociente, el producto será el dividendo, porque esto es tomar cabalmente el divisor tantas veces quantas cabe en el di-

videndo ; lo que se verifica igualmente, bien sea el cociente un número entero, bien sea fraccionario.

47 *a* Por lo que mira á la especie de las unidades del cociente, no debe apreciarse ni por las que expresa el dividendo, ni por las que expresa el divisor: el cociente, que siempre será un mismo número, podrá expresar unidades de muy distinta especie, segun sea la pregunta que diere motivo á la operacion. Si se trata de saber v. gr. quantas veces en 8 pesos caben 4 pesos, el cociente será un número abstracto, que expresará dos veces. Pero si se pregunta quantas varas de obra se podrán hacer por 8 pesos, á 4 pesos la vara, el cociente será 2 varas, número concreto, cuyas unidades ninguna relacion tienen ni con las del dividendo ni con las del divisor. Pero bien se echa de ver que la pregunta que dá motivo á la division determina por sí la naturaleza de las unidades del cociente.

47 *b* Para señalar la division de un número por otro, se escribe el primero encima del otro, tirando una raya entremedias ; ó se escriben al lado uno de otro con dos puntos entremedias, uno encima de otro; v. gr. $\frac{6}{3}$ señala la division de 6 por 3, y lo propio significa 6 : 3.

47 *c* Todo lo que dexamos dicho acerca de la regla de partir quedará mas claro si lo cotejamos con lo que pasa en las particiones que se hacen de los bienes de un padre, despues de su muerte, entre sus hijos. En estas particiones hay los bienes ó el caudal del padre que repartir, varios particionarios, y la hijuela de cada uno. El

cau-

caudal es un verdadero dividendo; el número de los hijos, un verdadero divisor; y la hijuela de cada uno el cociente. Quanto mayor es el caudal, tanto mayor es la hijuela; pero esta es tanto menor, quanto mayor es el número de los hijos; y la hijuela de cada uno será la misma aunque crezca, ó mengüe el caudal, como el número de los particionarios crezca, ó mengüe en la misma proporcion.

Esto es cabalmente lo que pasa en la division; el cociente crece, ó mengüa como el dividendo: pero mengua tanto mas, quanto mas crece el divisor, y crece tanto mas, quanto menor se hace el divisor; pero queda siempre el mismo, crezcan ó mengüen el dividendo y el divisor, con tal que ambos se multipliquen ó partan por un mismo número.

Division de un número de muchos guarismos por otro de un guarismo solo.

48 Para la operacion que vamos á declarar, es necesario saber hallar quantas veces en un número de uno ó dos guarismos cabe otro número de solo un guarismo; en lo que no puede menos de estar corriente el que sepa de memoria los productos de los números de solo un guarismo de dos en dos. Tambien se puede saber por la tabla de antes (43); si quiero saber v. gr. quantas veces en 74 cabe 9, busco el divisor 9 en la fila superior, y baxo perpendicularmente hasta encontrar el quadro donde

está el número que mas se acerca á 74, que es el quadro del 72; el número 8 que está enfrente de 72 en la primer columna, expresa las veces que 9 cabe en 74, ó el cociente que busco.

49 Esto supuesto, la division de un número de muchos guarismos por otro número de solo un guarismo, se practica del modo siguiente.

Se escribe el divisor al lado del dividendo, tirando entre los dos una raya de arriba abaxo: desde de esta se tira otra ácia la derecha debaxo del divisor, y debaxo de ella se ponen los guarismos del cociente al paso *que se van sacando.*

Se busca quantas veces el divisor cabe en el primer guarismo del dividendo, ó en los dos primeros quando no cabe en el primero; y debaxo del divisor se escribe este número de veces, que es el cociente. Por este cociente se multiplica el divisor, y se pone el producto debaxo del dividendo particular, que, por lo dicho poco ha, es el primer guarismo, ó los dos primeros de todo el dividendo.

Finalmente, el producto que sale se resta del dividendo particular, al qual corresponde, y se apunta la resta, si la hay.

Al lado de esta resta se baxa al guarismo siguiente del dividendo principal, cuyo guarismo solo, ó con la resta, si la hubo, forma el segundo dividendo particular, con el qual se practica lo propio que con el primero, ponien-

do

do el cociente que sale al lado del que ya se puso á la derecha; se multiplica igualmente el divisor por el nuevo cociente, se escribe y resta el producto conforme se dixo.

Si queda una resta, se baxa á su lado derecho el guarismo del dividendo que se sigue al último que se baxó, y se prosigue á este tenor hasta el último guarismo inclusivè del dividendo total.

Los exemplos declararán la regla.

49 *a* Se me ofrece dividir 8769 por 7. Escribo los dos números como se ve.

dividendo	7 divisor
8,7,6,9	1252 $\frac{5}{7}$ cociente.
7	
17	
14	
36	
35	
19	
14	
5	

Empezando por la izquierda del dividendo, deberia decir: ¿en 8 mil quantas veces 7? pero digo solamente: ¿en 8 quantas veces 7? cabe 1 vez. Este 1 es naturalmente millar; pero los guarismos que se le seguirán en el cociente le darán su verdadero valor; por lo que me contento con escribir 1 debaxo del divisor.

Mul-

Multiplico el divisor 7 por el cociente 1, y pongo el producto 7 debaxo del dividendo particular 8, executo la sustraccion, y queda la resta 1.

Esta resta 1 es la parte de 8 que no se ha podido dividir, y vale una decena respecto del siguiente guarismo 7, por cuyo motivo baxo el guarismo 7 al lado, y prosigo la operacion, diciendo: ¿en 17 quantas veces 7? 2 veces. Pongo, pues, 2 al lado derecho del primer cociente que salió de la primer division.

Multiplico como en aquella el divisor 7 por el último cociente 2, escribo el prodcto 14 debaxo del dividendo particular 17, y despues de executar la sustraccion queda la resta 3, la qual es la parte que no se ha podido partir.

Al lado de la resta 3 baxo 6, tercer guarismo del dividendo, y digo: ¿en 36 quantas veces 7? 5 veces. Pongo 5 al cociente.

Multiplico el divisor 7 por 5, y despues de escribir el producto 35 debaxo del nuevo dividendo particular, hago la sustraccion, y queda la resta 1.

Finalmente, al lado de esta resta 1 baxo el guarismo 9 del dividendo, y digo: ¿en 19 quantas veces 7? 2 veces, pongo pues 2 al cociente.

Multiplico el divisor 7 por el nuevo cociente 2, y despues de escribir el producto 14 debaxo del último dividendo particular 19, y de executar la sustraccion, queda la resta 5.

Ha-

Hallo, pues, que en 8769 cabe 7 tantas veces quantas expresa el cociente sentado, esto es, 1252 veces, y que resta 5.

Por lo que mira á esta resta, basta decir por ahora que se pone al lado del cociente, conforme se ve, esto es, poniendo el divisor debaxo de dicha resta, y tirando una raya entre los dos, cuya cantidad se pronuncia *cinco séptimos*. Mas adelante declararémos la naturaleza de esta especie de números.

49 *b* Quando el divisor no cabe en alguno de los dividendos particulares, se pone cero al cociente, y omitiendo la multiplicacion, se baxa inmediatamente otro guarismo al lado de dicho dividendo particular, y se prosigue la division.

Los guarismos del dividendo que sirven de dividendos particulares se separan de los demas con una coma, conforme se ve en el exemplo, para que no se equivoque el calculador.

Voy á partir 14464 por 8.

$$\begin{array}{r|l} 14,4,6,4 & 8 \\ \underline{8} & \overline{1808} \\ 64 & \\ \underline{64} & \\ 0064 & \\ \underline{64} & \\ 00 & \end{array}$$

Aquí

Aquí sirven de primer dividendo particular los dos primeros guarismos del dividendo principal, porque en el primero solo no cabe el divisor.

Hallo que en 14 cabe 8, 1 vez; pongo 1 al cociente; multiplico 8 por 1, y resto de 14 el producto 8; resta 6, á cuyo lado baxo el tercer guarismo 4 del dividendo.

Prosigo diciendo: ¿en 64 quantas veces 8? 8 veces, pongo 8 al cociente; y executando la multiplicacion, saco el producto 64; réstole del dividendo particular 64, resta 0, á cuyo lado baxo 6, quarto guarismo del dividendo; como en 6 no cabe 8, pongo 0 al cociente; y baxo inmediatamente al lado del 6 el 4, último guarismo del dividendo; y digo: ¿en 64 quantas veces 8? cabe 8 veces; pongo, pues, 8 al cociente, hago la multiplicacion, y resto el producto 64; y como no queda resta alguna, infiero que en 14464 cabe 1808 veces cabales el 8.

Division por un número de muchos guarismos.

50 Quando el divisor tiene muchos guarismos, la division se hace del modo siguiente.

Se toman á la izquierda del dividendo tantos guarismos, para dividendo particular, quantos son menester para que en ellos quepa el divisor.

Hecho esto, en vez de buscar, como en los casos antecedentes, quantas veces en el dividendo particular cabe todo el divisor, se busca solamente quantas veces el

pri-

primer guarismo del divisor cabe en el primer guarismo del dividendo, ó en los dos primeros, si no basta el primero, se pone debaxo del divisor el cociente que sale, del mismo modo que antes.

Se multiplican succesivamente segun la regla dada (45) todos los guarismos del divisor por el cociente puesto, y á medida que se va executando esta operacion, se escriben los guarismos del producto debaxo de los guarismos correspondientes del dividendo particular; se hace la sustraccion, y al lado de la resta se baxa el guarismo siguiente del dividendo para proseguir la operacion del mismo modo que se empezó.

Vamos á aclarar esta regla con algunos exemplos, y expresarémos los casos en que puede ofrecerse alguna dificultad.

Se me propone que parta 75347 por 53.

75,3,4,7	53
53	$1421\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Tomo por dividendo particular los dos primeros guarismos no mas del dividendo total, porque cabe en ellos el divisor; y en vez de decir: ¿en 75 quantas veces 53? busco solamente quantas veces en las 7 decenas de 75 caben las 5 decenas de 53, esto es, quantas veces cabe 5 en 7; hallo que 1 vez, pongo, pues, 1 al cociente.

Multiplico 53 por 1, y siento el producto 53 debaxo de 75; hago la sustraccion, resta 22, á cuyo lado baxo el guarismo 3 del *dividendo*, y prosigo diciendo, para mayor *facilidad*: ¿en 22 quantas veces 5? (y no: ¿en 223 quantas veces 53?); cabe 4 veces, pongo, pues, 4 al cociente.

Multiplico por 4 uno despues de otro los dos guarismos del divisor, y pongo el producto 212 debaxo del dividendo particular 223: hecha la sustraccion resta 11, á cuyo lado baxo el guarismo 4 del dividendo, y digo, como antes: ¿en 11 quantas veces 5? 2 veces; pongo 2 al cociente, y multiplico 53 por 2, sale el producto 106, que escribo debaxo del dividendo particular 114; hago la sustraccion, queda la resta 8, á cuyo lado baxo el último guarismo 7; parto del mismo modo 87 por 53, y siguiendo el mismo método sin variar en nada, hallo el cociente 1, y queda la resta 34, que escribo al lado del cociente, del modo que dixe antes (49 *a*).

51 Mas seguro parece que seria buscar quantas veces en cada dividendo particular cabe todo el divisor; pero como esta investigacion seria las mas veces larga y pe-

penosa, basta buscar, conforme lo hemos practicado, quantas veces en la parte mayor de dicho dividendo cabe la parte mayor del divisor. El cociente que se halla por este camino suele no ser el verdadero, porque solo es aproxîmado; pero sobre que este valor siempre encamina al fin, y quando no le alcanza se aparta poco, la multiplicacion que sigue despues enmienda los defectos que puede padecer esta práctica; y de hecho, si en el dividendo particular cupiere realmente el divisor tres veces no mas v. gr. y si por la probatura que se hace halláramos que cabe 4 veces, se viene á los ojos que multiplicando el divisor por 4, saldria un producto mayor que el dividendo, pues se tomaria el divisor mas veces que las que cabe en dicho dividendo, por consiguiente no seria posible hacer la sustraccion. En este caso se le quitarán succesivamente al cociente una, dos &c. unidades hasta hallar un producto que se pueda restar. Al contrario, si se pusiese 2 no mas al cociente, la resta de la sustraccion seria mayor que el divisor, lo que daria á conocer que cabria todavia en el dividendo, y que por lo mismo no es bastante grande el cociente.

Sin embargo de esto, no tienen por que desalentarse los principiantes, pues en poco tiempo tendrán suficiente conocimiento para saber lo que habrán de quitar ó añadir al cociente.

He de partir 189492 por 375.

1894,9,2	375
1875	$505\frac{117}{375}$
1992	
1875	
117	

El primer dividendo particular se compone de los quatro primeros guarismos del dividendo total, porque en los tres primeros no cabe el divisor.

Digo, pues: ¿en 18 quantas veces 3? cabe en realidad 6 veces; pero si multiplico 375 por 6, saldrá un número mayor que el dividendo 1894, por lo que pongo 5 no mas al cociente. Multiplico 375 por 5, pongo el producto 1875 debaxo de 1894; hago la sustraccion, y queda la resta 19.

Al lado de esta resta baxo el guarismo siguiente 9 del dividendo; y como en 199, que es ahora el dividendo particular, no cabe 375, pongo 0 al cociente, y baxo al lado de 199 el guarismo 2 del dividendo, lo que compone 1992; digo, pues: ¿en 19 quantas veces 3? 6 veces. Pero por la misma razon de antes pongo 5 no mas al cociente, y practicando lo que siempre, queda la resta 117.

52 Harémos de paso una consideracion que en muchos casos ahorra pruebas inútiles. Puede un calculador hallarse en el caso de hacer estas pruebas dudosas, parti-

ticularmente quando el segundo guarismo del divisor es mucho mayor que el primero. Entonces en vez de buscar quantas veces el primer guarismo del divisor cabe en la parte correspondiente del dividendo, debe buscar quantas veces dicho primer guarismo despues de añadirle una unidad, cabe en la parte correspondiente del dividendo. Esta prueba siempre le encaminará mas que la primera al verdadero cociente.

Partamos 1 8 3 2 por 2 8 8.

$$\begin{array}{r|l} 1832 & 288 \\ \cline{2-2} 1728 & 6 \\ \hline 104 & \end{array}$$

En vez de decir: ¿en 1 8 quantas veces 2? diré: ¿en 1 8 quantas veces 3? porque el divisor 2 8 8 se acerca mucho mas á 3 0 0 que no á 2 0 0: hallo 6 que es el verdadero cociente; siendo así que por el método ordinario hubiera hallado 9 para cociente, y por lo mismo hubiera tenido que hacer tres operaciones inútiles.

Modo de abreviar el método declarado.

53 Con la mira de facilitar la inteligencia de la regla, hemos dicho que se asiente debaxo de cada dividendo particular el producto del divisor por el cociente; pero como el fin principal debe ser abreviar las operaciones, nos parece oportuno prevenir, que se puede escusar asentar dichos productos, haciendo la sustraccion á medida

que se va multiplicando cada guarismo del divisor. Con el exemplo siguiente nos darémos á entender.

Quiero partir 75684 por 932.

7569,8,4	932
1138	$812\frac{200}{932}$
2064	
200	

El primer *dividendo* parcial se compone de los quatro primeros *guarismos* del dividendo total, porque en ~~los~~ tres *primeros no* cabe el divisor; hallo que 9 cabe 8 veces en 75; por lo que pongo 8 al cociente; y en lugar de asentar debaxo de 7569 el producto de 932 por 8, multiplico desde luego 2 por 8, cuyo producto es 16; pero como no puedo restar 16 de 9, le quito al guarismo siguiente 6 una decena, la qual añadida al 9 da 19, de cuyo número resto 16, y queda la resta 3 que pongo debaxo.

Para llevar en cuenta esta decena, no le quito una unidad al guarismo 6 del qual la saqué, sino que la guardo para añadirla al producto siguiente. Executando la multiplicacion, digo: 8 veces 3 son 24, y 1 que llevo son 25; como no puedo restar 25 de 6, quito al guarismo siguiente 5 del dividendo dos decenas, añádolas al 6, y de la suma 26 resto 25, y queda la resta 1, que pongo debaxo del 6. Con esto he llevado en cuenta la primer decena que me tocaba rebaxar del 6, porque he quitado una decena de mas. Llevaré asimismo en cuenta las dos dece-

nas

nas que acabo de quitar. Prosigo, pues, diciendo: 8 veces 9 son 72, y 2 que llevo 74; cuyo número resto de 75, queda la resta 1.

Al lado de la resta 113 baxo el guarismo 8 del dividendo, y prosigo como hasta aquí, diciendo: ¿en 11 quantas veces 9? 1 vez; digo despues: 1 vez 2 es 2, le resto de 8, queda la resta 6; 1 vez 3 es 3; réstole de 3, queda la resta 0; 1 vez 9 es 9, réstolos de 11, queda la resta 2. Al lado de la resta 206 baxo el guarismo 4, y digo: ¿en 20 quantas veces 9? 2 veces; digo despues: 2 veces 2 son 4, réstolos de 4, queda la resta 0; 2 veces 3 son 6, réstolos de 6, queda 0; finalmente, 2 veces 9 son 18, réstolos de 20, quedan 2.

54 En el discurso de estas divisiones particulares, se halla alguna vez que el divisor cabe en el dividendo mas de nueve veces; no por eso se puede poner mas de 9 al cociente; porque si pudiera ponerse 10, seria prueba de ser diminuto el cociente de la operacion antecedente, porque la decena del cociente que dá la division particular de ahora pertenece al cociente de la division antecedente, pues una unidad de este vale 10 en el que se le sigue.

55 Quando á continuacion del dividendo y del divisor hay ceros, se quitan á cada uno tantos ceros quantos lleva el que tiene menos.

Si se ha de partir v. gr. 8000 por 400, se partirá solamente 80 por 4; porque en 80 centenares caben tantas veces 4 centenares, como en 80 unidades 4 unidades.

55 *a* Siempre que el dividendo tiene muchos guarismos, y hay que multiplicar muchas veces el divisor, se puede facilitar y abreviar la operacion. Con cuya mira se forma una tabla de los productos del divisor por los nueve guarismos, y á cada division particular se pone al cociente aquel multiplicador del divisor que da un producto inmediatamente menor que el dividendo particular; mediante lo qual la division queda reducida á sumar y restar un número de otro, y se hace en una mirada.

Propóngome partir v. gr. uno por otro los dos números aquí propuestos.

1	35016
2	70032
3	105048
4	140064
5	175080
6	210096
7	245112
8	280128
9	315144

```
40377,9,8,2,0,5,7 | 35016
35016             |--------
-----             | 1153129
 53619
 35016
------
186038
175080
------
 109582
 105048
 ------
   45340
   35016
   -----
   103245
    70032
   ------
    332137
    315144
    ------
     16993   resta.
```

Por la tabla veo que el primer número del cociente ha de ser 1, porque el producto 7 0 0 3 2 del divisor por 2, es mayor que el primer dividendo particular 4 0 3 7 7. Basta esto para manifestar el uso de la tabla, y quanto se abrevia con su auxîlio la operacion.

5 5 *b* Quando dos números son tales, que el uno cabe un número cabal de veces en el otro, el mayor se llama *multiplo* del menor, y el menor *submultiplo* del mayor, y tambien parte alicota del mayor. Pero si el menor no cabe un número cabal de veces en el mayor, se llama parte *aliquanta* del mayor. 1 5 v. gr. es multiplo de 5 y de 3; 3 y 5 son submultiplos y partes alicotas de 1 5; pero 4 es parte aliquanta de 1 5, porque cabe 3 veces en 1 5, y sobran 3.

Prueba de la Multiplicacion y Division.

5 6 Del concepto que hemos dado de cada una de estas operaciones se saca el método de probarlas.

Ya que en la multiplicacion se toma tantas veces el multiplicando, quantas cabe la unidad en el multiplicador, si se busca quantas veces cabe el multiplicando en el producto, quiero decir (4 7), si se divide el producto por el multiplicando, es preciso que salga al cociente el multiplicador; y como podemos tomar por multiplicador el multiplicando, y al reves, podemos dar por regla general, que si el producto de una multiplicacion de dos factores se parte por uno de ellos, el cociente será el otro factor.

Si multiplicamos v. gr. 2864 por 3, saldrá el producto 8592; si divido, pues, 8592 por 2864, he de sacar y saco con efecto 3 al cociente.

En quanto á la division, es lo mismo; porque ya que el cociente de toda division expresa quantas veces el divisor cabe en el dividendo, síguese que si tomo el divisor tantas veces quantas unidades tiene el cociente, esto es, si multiplico el divisor por el cociente, ha de salir el dividendo, quando no quedó de la division resta alguna; y quando queda alguna resta, si esta se añade al producto del cociente por el divisor, ha de salir el dividendo. Hallamos poco ha (51) v. gr. que 189492 dividido por 375, da el cociente 505, y queda la resta 117; multiplico 375 por 505, sale el producto 189375, añádole la resta 117, y sale el dividendo 189492. Por consiguiente la multiplicacion sirve para probar la division, y la division para probar la multiplicacion.

Algunos usos de la Division.

57 Sirve esta operacion no solo para averiguar quantas veces un número cabe en otro, sino tambien para partir un número en partes iguales. Tomar la mitad, el tercio, el quinto &c. de un número, es partirle en dos, tres, cinco &c. partes iguales, para tomar una de ellas.

57 *a* Sirve igualmente la division para reducir las unidades de determinada especie á otras unidades de especie mayor; v. gr. un número determinado de maravedises á

rea-

reales de vellon, y estos á pesos. Para reducir 16490 maravedises á reales, se tendrá présente que pues 34 maravedises componen un real, habrá en la suma propuesta de maravedises tantos reales quantas veces en ella quepan 34 maravedises. Se partirá por consiguiente por 34 la suma 16490, de donde se sacarán 485 reales. Para reducir estos á pesos, partirémos 485 por 15, porque 15 reales componen un peso, y el cociente será 32 pesos y 5 reales; por manera que los 16490 maravedises componen 32 pesos y 5 reales.

De los Quebrados.

58 Los quebrados considerados arisméticamente son números con los quales expresamos las cantidades menores que la unidad.

59 El que quiera formar cabal juicio de los quebrados debe figurarse la cantidad que hace oficios de unidad, como compuesta de un número determinado de unidades menores, al modo que nos figuramos el peso compuesto de 15 unidades menores, que llamamos reales. Una, ó muchas de estas partes componen lo que llamamos quebrado ó fraccion de la unidad; v. gr. un número de reales que no llegue á 15, es un quebrado de la unidad del peso, y el mismo nombre se dá á los números que expresan dichas partes.

60 Todo quebrado puede expresarse de dos modos, que se estilan igualmente.

El primero consiste en expresar como números enteros las partes de la unidad de una cantidad propuesta, y entonces se *dá* un nombre particular á dichas partes, v. gr. para expresar 7 de las 15 partes que componen un peso, se echa mano del guarismo 7, pero se lee 7 reales, y escribe así 7 rs.

61 Pero como siguiendo este modo se necesitaria un signo particular para cada division que se hiciese de la unidad, se excusa esta multitud de signos, y se pinta un quebrado con dos números, uno encima de otro, y una raya entremedias. Para expresar v. gr. las siete partes de peso que deciamos poco ha, se escribe $\frac{7}{15}$, quiero decir, que primero se escribe el número que expresa *quantas* partes de la unidad tiene la cantidad propuesta, y debaxo del mismo número, ó debaxo de la raya se escribe el número que expresa quantas de las tales partes hay en toda la unidad.

62 Para leer un quebrado, se lee primero el número de encima, llamado *numerador*; despues se lee el número de debaxo, llamado *denominador*. Segun esto, $\frac{4}{5}$ se lee *quatro quintos*, ó *quatro quintavos*; $\frac{3}{20}$ se lee *tres vigésimos*, ó *tres veintavos*; $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ se leen *un medio*, *un tercio*, *un quarto*.

63 Señala, pues, el numerador quantas partes de la unidad caben en la cantidad que el quebrado expresa; y el denominador señala el valor de dichas partes, expresando quantas entran en la unidad. Se le llama denominador, por-

porque él es en realidad el que dá nombre al quebrado, y es causa de que en estos dos quebrados v. gr. $\frac{1}{5}$ y $\frac{2}{7}$ las partes del primero se llaman *quintos*, ó *quintavos*, y las partes del otro *séptimos*.

64 De donde hemos de inferir que quanto mas se acerca el numerador al valor del denominador, tanto mas se acerca el quebrado al valor de toda la unidad, cuyas partes representa el denominador. El quebrado $\frac{4}{4}$ v. gr. vale toda la unidad, porque se toman todas las quatro partes de que esta se compone; $\frac{3}{4}$ es una cantidad mayor que $\frac{2}{4}$.

65 El numerador y el denominador se llaman términos del quebrado; 4 y 5 son los dos términos del quebrado $\frac{4}{5}$.

De los Enteros considerados á manera de Quebrados.

66 De las operaciones que se practican con los quebrados suelen salir números fraccionarios, cuyo numerador es mayor que el denominador, tales son v. gr. estos números $\frac{8}{5}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{27}{6}$, cuyas expresiones, y las que se les parecen no son quebrados propios; son números enteros juntos con quebrados.

67 Para sacar de ellos los enteros que tienen, se parte el numerador por el denominador, el cociente señala los enteros, y la resta de la division es el numerador del quebrado que acompaña al entero. Este quebrado v. gr. $\frac{27}{5}$ dá $5\frac{2}{5}$, esto es, cinco enteros, y dos quintos de otro. Porque el denominador 5 de la expresion $\frac{27}{5}$ manifiesta que la unidad se compone de 5 partes, luego to-

da

da la unidad vale 5 partes; luego quantas veces quepa 5 en 27, otras tantas unidades enteras habrá en $\frac{27}{5}$.

68 *Las multiplicaciones y divisiones de los números enteros juntos con quebrados piden, á lo menos para mayor facilidad, que se reduzcan los enteros á quebrados.* Esta transformacion se practica multiplicando el número entero por el denominador del quebrado, al qual se quiere reducir el entero. Si se me ofrece reducir v. gr. 8 enteros á quintavos, multiplico 8 por 5, y saco $\frac{40}{5}$. La razon es, que quando reduzco 8 á quintavos, considero la unidad como compuesta de 5 partes; luego las ocho unidades tendrán 40 de ellas: por la misma razon 7 $\frac{4}{9}$ vale $\frac{67}{9}$, despues de reducir 7 á novenos.

Modo de alterar los dos términos de un quebrado sin que mude de valor.

69 No hay duda en que quantas mas partes se conciben en una misma unidad, tanto menores han de ser, y tanto mayor número de ellas se habrá de tomar para componer una determinada cantidad. Si divido ó supongo dividida una unidad, sea la que fuere, en quinzavos, v. gr. será cada parte mayor que si divido la misma unidad en treintavos. Luego si quiero tomar un tercio de dicha unidad en el primer supuesto, tomaré $\frac{5}{15}$ no mas, y en el segundo habré de tomar $\frac{10}{30}$.

70 Luego se puede duplicar, triplicar, quadruplicar &c. el denominador de un quebrado sin que esta opera-

racion mude el valor del quebrado, con tal que al mismo tiempo se duplique, triplique, quadruplique &c. su numerador.

Luego queda probado que *no muda de valor un quebrado quando se multiplican sus dos términos por un mismo número.* Por consiguiente $\frac{3}{4}$ es lo mismo que $\frac{6}{8}$; $\frac{1}{2}$ lo mismo que $\frac{5}{10}$.

De aquí se infiere que quantas menos partes se suponen en la unidad, tanto menor número de ellas se necesita para componer una cantidad determinada: que por lo mismo se puede hacer que el denominador de un quebrado sea 2, 3, 4, &c. veces menor, con tal que al mismo tiempo se haga su numerador 2, 3, 4, &c. veces menor. Esto quiere decir, que *no muda de valor un quebrado, porque se partan sus dos términos por un mismo número.*

Para percibir con evidencia la verdad de estas dos proposiciones, basta tener presente que destino tienen el numerador y el denominador de un quebrado.

70 *a* Téngase, pues, presente que multiplicar ó partir los dos términos de un quebrado por un mismo número, no es multiplicar ni partir el quebrado; pues segun acabamos de manifestar, estas operaciones no le mudan su valor.

71 En los dos principios que acabamos de sentar se fundan dos operaciones muy importantes en la doctrina de los quebrados, que son; la una reducir dos, ó mas quebrados á un mismo denominador; la segunda, abreviar

un

un quebrado, esto es, reducirle á que sean sus dos términos los menores que sea posible.

Reduccion de los quebrados á un mismo Denominador.

72 I. Para reducir dos quebrados á un mismo denominador, ó, lo que es lo propio, á que expresen partes de un mismo nombre, se multiplican ambos términos del primer quebrado por el denominador del segundo, y ambos términos del segundo por el denominador del primero.

Para reducir v. gr. á un mismo denominador los dos quebrado $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, multiplicó 2 y 3, términos del primero, por 4, denominador del segundo, y saco $\frac{8}{12}$, de igual valor (70) que $\frac{2}{3}$. Multiplico igualmente 3 y 4, términos del segundo quebrado, por 3, denominador del primero, y saco $\frac{9}{12}$, de igual valor (70) que $\frac{3}{4}$; por manera que los dos quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$ quedan transformados en estotros $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$, de igual valor que los propuestos, y de un mismo denominador.

No puede menos de ser por este método uno mismo el denominador de ambos quebrados, porque en cada operacion resulta el nuevo denominador de la multiplicacion, uno por otro, de los dos primeros.

73 II. Quando hay que reducir mas de dos quebrados á un mismo denominador, se multiplican los dos términos de cada uno por el producto que dá la multiplicacion de los denominadores, unos por otros, de los demas quebrados.

Pa-

Para reducír v. gr. á un mismo denominador los quatro quebrados siguientes $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$, multiplico los dos términos 2 y 3 del primero por el producto de los denominadores, 4, 5 y 7 de los demas quebrados. Este producto le saco, diciendo: 4 veces 5 son 20, despues 7 veces 20 son 140; multiplico, pues, 2 y 3 por 140, y saco $\frac{280}{420}$, cuyo valor es igual al de $\frac{2}{3}$ (70).

Multiplico igualmente los dos términos 3 y 4 del segundo quebrado por el producto $3 \times 5 \times 7$, cuyo producto saco, diciendo: 3 veces 5 son 15, despues 7 veces 15 son 105; multiplico, pues, 3 y 4 cada uno por 105, y saco $\frac{315}{420}$, de igual valor que $\frac{3}{4}$.

Llego al tercer quebrado, y multiplico sus dos términos 4 y 5 por 84, producto de los tres denominadores 3, 4 y 7, y saco $\frac{336}{420}$, de igual valor que $\frac{4}{5}$.

Finalmente, multiplico los dos términos 5 y 7 del quarto quebrado por 60, producto de los denominadores 3, 4 y 5 de los tres primeros, y saco $\frac{300}{420}$ de igual valor que $\frac{5}{7}$; por manera que los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ quedan transformados en estotros, $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$, menos sencillos á la verdad que los primeros, pero de igual valor, y mas apropiados para executar con ellos, mediante el denominador comun, las operaciones de sumar y restar. Porque así como no se pueden sumar pesos con reales y maravedises, sino pesos con pesos, reales con reales, y maravedises con maravedises; tampoco se pueden sumar tercios con quartos, con quintos &c. sino tercios con ter-

cios,

cios, quartos con quartos &c. unos con otros; en una palabra, no se pueden sumar unidades unas con otras á no ser que sean de una misma especie, ó mismo nombre. Lo propio digo de la operacion de restar, &c.

Como el denominador de cada nuevo quebrado es el producto de todos los denominadores primitivos, no puede menos de ser uno mismo en cada quebrado, despues de la operacion.

73 *a* *Mediante la* reduccion que acabamos de declarar, *se averigua* qual es mayor ó menor de dos ó mas *quebrados propuestos*, v. gr. estos dos $\frac{2}{3}$, $\frac{5}{7}$. Porque si les doy un mismo denominador, el primero será $\frac{14}{21}$, y el segundo $\frac{15}{21}$; lo que manifiesta que el segundo quebrado es el mayor de los dos, y que lleva al otro $\frac{1}{21}$ de exceso.

Por el mismo camino se hallará que de los dos quebrados $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{8}$ el segundo es mayor que el primero; pues despues de la reduccion, el segundo vale $\frac{25}{40}$, y el primero $\frac{24}{40}$, lo que manifiesta que $\frac{5}{8}$ lleva á $\frac{3}{5}$ $\frac{1}{40}$ de exceso.

Modo de abreviar un quebrado.

74 Abreviar un quebrado es transformarle en otro de igual valor, cuyos términos sean menores que los del primero, porque entonces queda mas sencillo. Es cosa fácil abreviar un quebrado, siempre que sus dos términos se pueden partir por un mismo número. Como esta operacion no muda el valor (70) del quebrado, debe practicarse siempre que se pueda, ya porque los quebrados son

tan-

tanto mas fáciles de calcular quanto mas breves, ya porque en muchas ocasiones se percibe mas fácilmente su valor, ya finalmente porque debe ser máxîma de todo calculador expresar las cantidades con los números menores que pueda.

75 Esta reduccion de los quebrados á menores términos se consigue del modo siguiente. Se parten ambos términos del quebrado propuesto por 2, cuya division se repite quantas veces se puede.

Despues se parten ambos términos por 3, repitiendo la division quantas veces se puede.

Lo mismo se hace con los números 5, 7, 11, 13 &c. esto es, con los números que no tienen mas divisor que á sí mismos y la unidad, y que por esta razon se llaman *números primos*.

Toda la dificultad, si la hay, solo puede estar en saber quando es posible la division por 2, por 3, por 5 &c. pero los principios siguientes la apean.

76 Todo número cuyo último guarismo es par se puede partir por 2.

Todo número cuyos guarismos sumados unos con otros, como si expresaran unidades sencillas, diere por suma 3, ó un múltiplo de 3, podrá partirse por 3; tal es este número 54231, porque sus guarismos 5, 4, 2, 3, 1 componen 15, cuyo número es multiplo de 3. Todo número cuya última figura es 5 ó cero puede partirse por 5.

Por lo que toca al número 7 y á los números mayores

que

que se le siguen, aunque seria fácil hallar tambien reglas semejantes á las que acabamos de proponer respecto de los demas números primos menores, escusamos buscarlas, porque tendríamos que empeñarnos en cálculos tan prolíxos como la operacion que deseamos abreviar.

Propongámonos v. gr. simplificar el quebrado $\frac{2016}{5796}$. Parto sus dos términos por 2, porque el último guarismo de cada uno es par, y saco $\frac{1008}{2898}$. Parto otra vez por 2, y saco $\frac{504}{1449}$. De lo dicho poco ha infiero que puedo partir por 3; hago la division, y saco $\frac{168}{483}$; vuelvo á partir por 3, y saco $\frac{56}{161}$. Finalmente, pruebo la division por 7, sale bien, y saco $\frac{8}{23}$.

La division debe solamente probarse con los números primos 2, 3, 5, 7, &c. porque una vez apurada la division por 2, es inútil probarla por 4; porque si el número propuesto pudiera partirse por 4, con mas razon se le hubiera podido partir por 2.

77 Pero de quantos medios pueden practicarse para abreviar un quebrado, el mas directo consiste en partir sus dos términos por el máximo comun divisor de ambos. Por lo mismo hemos de enseñar como se halla este divisor.

Aplicarémos esta investigacion al quebrado $\frac{96}{180}$. Claro está que este máxîmo comun divisor no puede ser mayor que el menor de los dos términos del quebrado, que es su numerador 96. Pruebo, pues, si 96 es el tal divisor; veo que 96 se parte á sí mismo, pero no parte

ca-

cabal 1 8 0, porque queda el residuo 8 4; luego el quebrado $\frac{96}{180}$ es lo mismo que $\frac{96}{96+84}$. Puesto en esta forma, echo de ver que el máxîmo divisor que busco no puede ser mayor que 8 4, porque si lo fuera no partiria la parte 8 4. Pruebo, pues; si 8 4 es el tal divisor, hallo que 8 4 se parte á sí mismo, pero no parte cabal 9 6, queda el residuo 1 2; por consiguiente se le puede dar al quebrado esta forma $\frac{84+12}{84+12+84}$. Aquí se vé á las claras que el divisor que busco no puede ser mayor que 1 2; porque si lo fuera no podria partir 1 2. Véamos, pues, si 1 2 es el tal divisor; hallo que 1 2 se parte á sí mismo, parte por lo mismo tambien 8 4; luego parte todas las partes del quebrado. Luego es divisor comun del numerador y del denominador; es tambien el máxîmo divisor de ambos términos, porque la serie de las operaciones practicadas manifiesta que un número mayor que 1 2 no podria partir ambos términos. De aquí se saca la siguiente

Regla para hallar el máxîmo comun divisor de dos números.

77 *a* Pártase el mayor de los dos términos por el menor; si la division saliere cabal, el término menor será el mayor número que pueda partir los dos términos del quebrado.

Si hubiese una resta, pártase por ella el término menor; si la division saliere cabal, la primer resta será el mayor comun divisor.

Apliquemos la regla al quebrado $\frac{799}{2961}$. Parto, pues, 2 9 6 1

por 799, saco el cociente 3 y la resta 564; parto despues 799 por 564, saco el cociente 1, y la resta 235; parto 564 por 235; saco el cociente 2, y la resta 94; últimamente parto 235 por 94, saco el cociente 2, y la resta 47; y como esta última resta es partidor cabal de la resta antecedente y de sí misma, es el máxîmo comun divisor de los dos términos del quebrado propuesto. Pártolos, pues, ambos por 47, y queda el quebrado reducido á $\frac{17}{63}$.

77 *b* Despues de hallado el máxîmo comun divisor de los dos términos de un quebrado, se le puede abreviar, sin echar mano de él, por un método mas breve; el qual consiste en el modo de disponer los cocientes, y las restas que se sacan al tiempo de buscar el máxîmo comun divisor. Manifestarémos qual es esta disposicion, recorriendo lo que pasó en el caso propuesto (77 *a*).

2961	799	564	235	94	47
	3	1	2	2	2
63	17	12	5	2	1

Despues de dispuestas las diferentes restas que sirven de partidores, y los cocientes que dán, conforme aquí se ve, y hallado el número 47, que parte cabal la resta antecedente 94, siento la unidad debaxo de este número, y digo: una vez 2 es 2, y le siento debaxo del cociente que an-

antecede; digo despues: 2 veces 2 son 4, y añadiéndole la unidad sentada á la derecha, son 5, que siento debaxo del tercer cociente á mano izquierda. Prosiguiendo al mismo tenor, digo: 2 veces 5 son 10, y 2 son 12 que siento debaxo del quarto cociente 1: multiplico este cociente 1 por 12, y añadiéndole 5 son 17. Finalmente, multiplico 17 por 3, debaxo del qual está sentado, saco 51, y añadiéndole 12 son 63; los dos últimos números hallados por este método son el quebrado $\frac{17}{63}$, el qual es el mismo que el propuesto abreviado.

Si aplicamos la regla al quebrado $\frac{2627}{5893}$, hallarémos que despues de abreviado queda reducido á $\frac{37}{83}$. Aquí va figurada la operacion.

5893	2627	639	71
	2	4	9
83	37	9	1

Varios modos de considerar un Quebrado, y conseqüencias que de aquí se pueden sacar.

78 Por el concepto que hemos dado de todo quebrado, se saca que el denominador expresa quantas son las partes de la unidad, á la qual se refiere un quebrado propuesto, y el numerador quantas de dichas partes tiene el quebrado.

 Tam-

Tambien se puede considerar de otro modo un quebrado; se puede considerar que el numerador representa cierta cantidad, la qual se ha de partir en tantas partes quantas unidades tiene el denominador. En $\frac{4}{5}$ v. gr. se puede considerar que el 4 representa quatro cosas qualesquiera, v. gr. quatro reales, que se han de partir en cinco partes, ó entre cinco compañeros; porque claro está que lo mismo es partir quatro reales en cinco partes, que partir un real en cinco partes para tomar quatro de ellas.

79 Se puede, pues, considerar el numerador de todo quebrado como un *dividendo*, y el denominador como un *divisor*. Esta consideracion manifiesta á las claras que cosa significan las restas de divisiones expresadas en la forma que dexamos enseñada (49 *a*).

80 De aquí y de lo dicho (64) se infiere, que si en la resta de una division, puesta en forma de quebrado, el numerador vale mas de la mitad del denominador, se podrá despreciar la tal resta figurada á manera de quebrado, con tal que se añada una unidad al último guarismo del cociente puesto. Supongamos que el cociente de una division sea 23, y la resta $\frac{3}{4}$; puedo omitir la cantidad $\frac{3}{4}$, con tal que añada una unidad al último guarismo 3 del cociente, el qual con esto será 24. La razon es clara, porque como $\frac{3}{4}$ vale mas de la mitad del entero, ó unidad (64), el cociente discrepará menos del verdadero, añadiéndole una unidad en lugar de la cantidad $\frac{3}{4}$, que si omitiésemos esta cantidad.

Es-

Este arbitrio se puede usar siempre que no se quiera sacar tan cabal como cabe el cociente por el método que mas adelante darémos, ó quando son de tan poca monta las partes en que se supone dividida la unidad, que no hay necesidad de expresarlas con mucha precision.

81 De aquí se infiere que todo número se puede escribir, siempre que se quiera, en forma de quebrado, poniéndole por numerador del quebrado, y la unidad por denominador: v. gr. 8 es lo mismo que $\frac{8}{1}$; 5 lo propio que $\frac{5}{1}$.

Operaciones de la Arismética por Quebrados.

82 Con los quebrados se hacen las mismas operaciones que con los enteros; se suman, restan, multiplican y parten unos por otros. Para la adicion y sustraccion de estos números, se necesita las mas veces una operacion preparatoria; para las otras dos, ninguna.

Adicion de los Quebrados.

83 Siempre que los quebrados por sumar tienen un mismo denominador, se suman todos los numeradores, á cuya suma se dá el denominador comun de todos los quebrados propuestos. Para sumar $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{7}$ unos con otros, saco la suma 9 de los numeradores, dóile por denominador el 7, y la suma de los tres quebrados propuestos es $\frac{9}{7}$.

84 Si los quebrados no tuviesen un mismo denominador, será menester primero dársele (72), despues de cuya preparacion se sumarán los quebrados, conforme aca-

bamos de enseñar. Para sumar v. gr. estos tres quebrados, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$, los transformo en estotros tres $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$, cuya suma es $\frac{133}{60}$, la qual se reduce á $2\frac{13}{60}$ (67).

84 *a* La regla que acabamos de dar para sumar quebrados es la general; casos hay, particularmente quando son muchos, donde se puede hallar su suma por un camino mas breve. Se suman primero dos quebrados, despues la suma de los dos primeros con el tercero, &c.

Por esta regla, quando me ocurra sumar los quatro quebrados $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, reduciré los dos primeros á $\frac{8}{12}$, $\frac{9}{12}$ cuya suma es $\frac{17}{12}$; despues reduciré $\frac{17}{12}$ y $\frac{4}{5}$ á $\frac{85}{60}$ y $\frac{48}{60}$, cuya suma es $\frac{133}{60}$; despues reduciré $\frac{133}{60}$ y $\frac{5}{6}$ á $\frac{798}{360}$ y $\frac{300}{360}$, cuya suma es $\frac{1098}{360} = 3\frac{3}{60}$, suma de los quatro quebrados propuestos.

84 *b* Quando hay que sumar unos con otros números fraccionarios, se suman primero los quebrados con los quebrados, y despues los enteros con los enteros. Para sumar v. gr. los tres números fraccionarios $3\frac{1}{2}$, $4\frac{1}{3}$, $10\frac{3}{8}$, reduzco primero los quebrados á un mismo denominador, con lo que se transforman en $\frac{24}{48}$, $\frac{16}{48}$ y $\frac{18}{48}$, ó $\frac{12}{24}$, $\frac{8}{24}$, $\frac{9}{24}$; despues escríbolo todo, enteros y quebrados, como aquí se vé.

$$\begin{array}{r} 3\frac{12}{24} \\ 4\frac{8}{24} \\ 10\frac{9}{24} \\ \hline 17\frac{29}{24} \\ \hline 18\frac{5}{24} \end{array}$$

Saco finalmente la suma de todo $17\frac{29}{24}$, que se reduce á $18\frac{5}{24}$ (67), porque $\frac{29}{24}$ vale $1\frac{5}{24}$.

Sustraccion de Quebrados.

85 Si los dos quebrados con los quales se ha de hacer esta operacion tuviesen un mismo denominador, se restará el numerador del uno del numerador del otro, dando á la resta el denominador de ambos. Si resto $\frac{5}{9}$ de $\frac{8}{9}$, la resta será $\frac{3}{9}$, lo mismo que $\frac{1}{3}$ (70).

86 Quando hay que restar un número fraccionario de otro, se resta el quebrado del quebrado, y el entero del entero. Para restar $24\frac{1}{8}$ de $25\frac{1}{4}$, preparo desde luego los dos quebrados dándoles un mismo denominador, y despues escribo los dos números como aquí se ve.

$$\begin{array}{r|l} 25 & \frac{8}{32} \\ 24 & \frac{4}{32} \\ \hline 1 & \frac{4}{32} = 1\frac{1}{8} \end{array}$$

87 Si los quebrados no tuviesen un mismo denominador, se les dará, y despues se hará la sustraccion conforme hemos propuesto. Para restar v. gr. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, transformo los dos quebrados en $\frac{8}{12}$ y $\frac{9}{12}$, resto 8 de 9, y queda la resta $\frac{1}{12}$.

Multiplicacion de Quebrados.

88 *Para multiplicar un quebrado por un quebrado, se multiplica el numerador del uno por el numerador del otro, y el denominador por el denominador.* Si se me ofrece multiplicar v. gr. $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$, multiplico 2 por 4, saco el nu-

merador 8, multiplico 3 por 5, saco el denominador 15; de modo que el producto es $\frac{8}{15}$.

Fúndase esta regla en que multiplicar un número por otro, es tomar tantas veces el multiplicando, quantas cabe la unidad en el multiplicador. Multiplicar, pues, $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$ es tomar $\frac{4}{5}$ veces el quebrado $\frac{2}{3}$, ó, con mas propiedad, es tomar 4 veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$: pero quando se multiplica el denominador 3 por 5, se transforman los tercios en quinzavos, *quiero decir*, en partes cinco veces menores, y quando *se multiplica* el numerador 2 por 4, se toman *las nuevas partes* 4 veces; se toma, pues, 4 veces la quinta parte de $\frac{2}{3}$; se multiplica con efecto $\frac{2}{3}$ por $\frac{4}{5}$.

89 Quando ocurre multiplicar un entero por un quebrado, se reduce el entero á la forma de quebrado, dándole la unidad por denominador (81). Si se me ofrece multiplicar v. gr. 9 por $\frac{4}{7}$, multiplico $\frac{9}{1}$ por $\frac{4}{7}$, de lo que, *por la regla dada*, sale el producto $\frac{36}{7}$, que se reduce á $5\frac{1}{7}$.

Se echa, pues, de ver que para multiplicar un entero por un quebrado, ó un quebrado por un entero, se reduce la operacion á multiplicar por el entero el numerador del quebrado propuesto.

90 Si hubiese enteros con quebrados, se reducirán primero los enteros á quebrados de un mismo denominador que los que los acompañan. Si he de multiplicar $12\frac{3}{5}$ por $9\frac{3}{4}$, transformo el multiplicando en $\frac{63}{5}$ (68), y el multiplicador en $\frac{39}{4}$, multiplico $\frac{63}{5}$ por $\frac{39}{4}$ por la regla dada (105), y saco el producto $\frac{2457}{29}$, que vale $122\frac{17}{20}$.

Quan-

90 *a* Quando el numerador del uno de los dos quebrados, y el denominador del otro se pueden partir por un mismo número, se practicará primero la division, y despues se multiplicará un quebrado por otro.

Supongo que me toque multiplicar $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{7}$, parto primero 8 y 4 por 4, con cuya preparacion los dos quebrados quedan transformados en $\frac{3}{2}$ y $\frac{1}{7}$; será, pues, $\frac{3}{2}\times\frac{1}{7}=\frac{3}{14}$ el producto de un quebrado por otro.

Si he de multiplicar $\frac{3}{8}$ por $\frac{4}{9}$, partiré primero 8 y 4 por 4, y 3 y 9 por 3, sacaré, pues, $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$.

90 *b* Qnando ocurre multiplicar un quebrado por un número igual á su denominador, el producto es el numerador mismo del quebrado.

90 *c* Quando ocurre multiplicar unos por otros muchos quebrados, se señala no mas la multiplicacion, y se borran en el numerador y el denominador del producto figurado todos los divisores. Si he de multiplicar unos por otros estos tres quebrados $\frac{2}{7}$, $\frac{14}{15}$, $\frac{5}{8}$, me contento con figurar desde luego el producto en esta forma $\frac{2\times14\times5}{7\times15\times8}$ lo mismo que $\frac{2\times7\times2\times5}{7\times3\times5\times2\times2\times2}$, porque $14=7\times2$, $15=5\times3$ y $8=2\times2\times2$; borro despues en ambos términos los factores comunes, porque en la misma proporcion que los del numerador aumentan la cantidad, los del denominador la disminuyen, y queda $\frac{1}{2\times3}=\frac{1}{6}$, producto verdadero.

La razon de esta práctica es muy fácil de percibir, porque no muda de valor un quebrado quando se parten sus dos términos por un mismo número; y quando esta di-

division pueda executarse no se debe omitir, porque dexa mas sencillos y mas fáciles de calcular los quebrados.

La última regla que acabamos de dar es de grandísimo recurso en cálculos muy prolixos y dificultosos.

Division de Quebrados.

91 Para partir un quebrado por otro, se trastornan los dos términos del quebrado divisor, y despues se multiplica por él el quebrado dividendo.

Para dividir v. gr. $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, trastorno el quebrado $\frac{2}{3}$, y sale $\frac{3}{2}$; multiplico $\frac{4}{5}$ por $\frac{3}{2}$, y saco el cociente $\frac{12}{10}$, que se reduce á $1\frac{2}{10} = 1\frac{1}{5}$.

La razon de esta regla es, que partir $\frac{4}{5}$ por $\frac{2}{3}$, es buscar quantas veces $\frac{2}{3}$ cabe en $\frac{4}{5}$; pero se viene á los ojos que pues el divisor expresa tercios, cabrá en el dividendo tres veces mas que si expresara enteros; luego se ha de dividir primero por 2, y multiplicar despues por 3, lo mismo cabalmente que tomar tres veces la mitad del dividendo, ó multiplicar por $\frac{3}{2}$, que es el quebrado divisor trastornado.

92 Si ocurriese partir un quebrado por un entero, ó un entero por un quebrado, se le dará primero al entero la forma de quebrado, y la unidad por denominador. Para partir v. gr. 12 por $\frac{5}{7}$, se reducirá la operacion á partir $\frac{12}{1}$ por $\frac{5}{7}$, lo que por la regla dada es lo mismo que multiplicar $\frac{12}{1}$ por $\frac{7}{5}$, de lo que saldrá el cociente $\frac{84}{5}$, ó $16\frac{4}{5}$. Partir $\frac{3}{4}$ por 5 es partir $\frac{3}{4}$ por $\frac{5}{1}$, ó multipli-

car

car $\frac{3}{4}$ por $\frac{1}{5}$, de donde sale el producto $\frac{3}{20}$.

Por consiguiente se echa de ver, que quando hay que partir un quebrado por un entero, la operacion se reduce á multiplicar el denominador por el entero.

93 Si hubiese enteros con quebrados, se reducirán primero los enteros á quebrados, cada uno de la misma especie que el que le acompaña. Quando se ofrezca partir $54\frac{3}{5}$ por $12\frac{2}{3}$, se transformará el dividendo en $\frac{273}{5}$, y el divisor en $\frac{38}{3}$; quedará, pues, reducida la operacion á partir $\frac{273}{5}$ por $\frac{38}{3}$, ó á multiplicar (91) $\frac{273}{5}$ por $\frac{3}{38}$, de donde saldrá $\frac{819}{190}$, ó $4\frac{59}{190}$.

93 *a* Como se pueda, la division de un quebrado por otro se executa partiendo el numerador del dividendo por el numerador del divisor, y el denominador por el denominador. El cociente de $\frac{8}{15}$ partido por $\frac{2}{3}$ será $\frac{4}{5}$.

93 *b* Siempre que ambos numeradores, ó denominadores se puedan partir por un mismo número, se hace la division antes de partir un quebrado por otro. Si he de partir $\frac{12}{27}$ por $\frac{8}{5}$, ya que 12 y 8 se pueden partir por 4, reduzco los dos quebrados á $\frac{3}{27}$ y $\frac{2}{5}$, partiendo sus numeradores por 4; hago despues la division segun la regla, y saco el cociente $\frac{15}{54}$.

Algunas aplicaciones de las reglas antecedentes.

94 De lo dicho (78) es fácil inferir lo que debe practicarse para valuar un quebrado: se me pregunta v. gr. quanto valen los $\frac{5}{7}$ de un doblon. Ya que los $\frac{5}{7}$ de

un

un doblon son lo mismo (78) que el séptimo de 5 doblones, reduzco los 5 doblones á pesos (45), y parto por 7 los 20 pesos que salen, el cociente dá 2 pesos, y la resta 6 pesos que he de partir por 7. Reduzco los 6 pesos á reales, y parto por 7 los 9 reales que salen; el cociente dá 12 reales, y la resta 6 reales, que he de partir por 7; reduzco los 6 reales á maravedises, parte por 7 los 204 maravedises que salen; el cociente dá 29 maravedis y $\frac{2}{7}$ de *maravedí*; por manera que los $\frac{5}{7}$ de un doblon valen 2 pesos 12 rs. $29\frac{1}{7}$ mrs.

Si se preguntara quanto valen $\frac{5}{7}$ de 24 doblones, es patente que se podrian tomar desde luego, conforme lo acabamos de practicar, los $\frac{5}{7}$ de un doblon, y multiplicar despues por 24 lo que saliere. Pero es mucho mas acomodado multiplicar primero los $\frac{5}{7}$ por 24 doblones, lo que que dá $\frac{120}{7}$ (89) doblones, y valuar despues este quebrado, cuyo valor se hallará que es 17 doblones, 8 reales, $19\frac{3}{7}$ maravedises.

95 La regla que hemos dado para valuar los *dos* quebrados propuestos manifiesta que quando se trata de valuar un quebrado, sea el que fuere, se ha de multiplicar su numerador por el número que expresa quantas veces en la unidad, á la qual se refiere el quebrado, caben las partes en que se le quiere valuar, y partir despues el producto por el denominador del quebrado. En el primer exemplo donde habiamos de valuar en pesos los $\frac{5}{7}$ de un doblon, hemos multiplicado primero el numerador 5 por

4,

4, porque un doblon tiene quatro pesos, y despues hemos partido el producto 20 por el denominador 7. Lo propio hemos practicado para valuar las partes de peso en reales.

96 La valuacion de los quebrados nos encamina naturalmente á considerar los quebrados de quebrados. Dase este nombre á una serie de quebrados separados, unos de otros por la preposicion *de*; v. gr. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$. &c. son quebrados de quebrados. Estos se reducen á un quebrado solo, multiplicando unos por otros todos los numeradores, y los denominadores tambien unos por otros; por manera que el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{4}{5}$ se reduce á $\frac{8}{15}$; el quebrado $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$ se reduce á $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Y con efecto, claro está, que tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ es lo propio que multiplicar $\frac{3}{4}$ por $\frac{2}{3}$, pues es tomar $\frac{2}{3}$ veces el quebrado $\frac{3}{4}$. Asimismo, tomar los $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{5}{6}$, viene á ser lo propio que tomar los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$; pues $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ son $\frac{6}{12}$. Lo que acabamos de decir manifiesta que los $\frac{6}{12}$ de $\frac{5}{6}$ son $\frac{30}{72}$ ó $\frac{5}{12}$.

Si se preguntase el valor de $\frac{3}{4}$ de $5\frac{3}{8}$ se convertiria el entero 5 en octavos, y la operacion quedaria reducida á hallar el valor del quebrado de quebrado $\frac{3}{4}$ de $\frac{43}{8}$, y se hallaria que es $\frac{129}{32}$, ó $4\frac{1}{32}$.

96 *a* La valuacion de los quebrados de quebrados es el fundamento de la doctrina de los cambios, esto es, de la reduccion de las monedas de una nacion á las monedas de otra; como tambien de las medidas, pesos, &c.

de

de diferentes naciones; quiero decir, de lo que debe practicarse para expresar las monedas, pesos, &c. de un pais en monedas, pesos, &c. de otro.

Estas reducciones se executan por medio de la *regla conjunta*, así llamada porque junta muchas reglas de tres, que todas paran en una sola. En esta regla se comparan de dos en dos muchas monedas, pesos, &c. de diferentes paises y valores, para averiguar lo que la primera, ó una parte determinada suya es respecto de la última, ó de una parte determinada suya. En otro lugar trataré con individualidad de las reducciones que se executan por medio de la regla conjunta.

De los Quebrados continuos.

96 *b* Quebrado continuo, ó fraccion continua se llama todo quebrado cuyo numerador es un número entero, el que se quiera, y el denominador otro número entero; pero acompañado de otro quebrado, combinado del mismo modo con otro, y así prosiguiendo, ora sea finito, ora indefinito el número de estos quebrados.

Quebrado continuo es este.

$$\cfrac{5}{7+\cfrac{2}{3+\cfrac{4}{11+\cfrac{8}{9+\cfrac{6}{13}}}}}$$

Los

96 *c* Los quebrados continuos se reducen con facilidad á quebrados comunes. Porque $\frac{8}{9+\frac{6}{13}} = \frac{8}{\frac{9\times 13+6}{13}} = \frac{8\times 13}{9\times 13+6} = \frac{104}{123}$; luego en lugar de los quebrados $\frac{4}{11+\frac{8}{9+\frac{6}{13}}}$ se podrá tomar $\frac{4}{11+\frac{104}{123}} = \frac{4\times 123}{11\times 123+104} = \frac{492}{1457}$. Si substituimos este quebrado en lugar de los tres últimos, las quatro fracciones se reducirán á esta $\frac{2}{3+\frac{492}{1457}} = \frac{2\times 1457}{3\times 1457+492} = \frac{2914}{4863}$. Finalmente, si se substituye este quebrado en lugar de los quatro, con los quales hemos visto que es igual, el quebrado continuo propuesto será $\frac{5}{7+\frac{2914}{4863}} = \frac{5\times 4863}{7\times 4863+2914} = \frac{24315}{36955}$, el qual, despues de abreviado se reduce á $\frac{4863}{7391}$, último valor del quebrado continuo.

96 *d* Los quebrados continuos sirven siempre que ocurre valuar cantidades fraccionarias, ú otras llamadas *irracionales*, de que se hablará mas adelante; en cuyo caso se va sacando una serie de quebrados simples, alternadamente mayores y menores que el propuesto, bien que ex-

expresados con números mucho menores. Para cuya operacion se echa mano de los cocientes que dán las diferentes divisiones con que se halla el máxîmo comun divisor de ambos términos del quebrado, haciendo de ellos el uso que manifiesta la regla que vamos á dar, aplicándola al quebrado siguiente $\frac{547}{2835}$.

96 *e* Harémos con sus dos términos las mismas operaciones que quando se busca el máxîmo comun divisor de ambos, y sentarémos los cocientes de las diferentes divisiones como aquí se vé.

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 5 & 2 & 7 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{5}{26} & \frac{11}{57} & \frac{82}{425} & \frac{93}{482} = \frac{547}{2835} \end{array}$$

96 *f* *Regla*. Multiplíquense el numerador y el denominador del quebrado que está inmediatamente antes del que se busca por el número, al qual este quebrado ha de corresponder, y á cada producto añádase succesivamente el numerador y el denominador del quebrado que inmediatamente antecede al quebrado precedente; las dos sumas serán respectivamente el numerador y el denominador del quebrado que se busca.

96 *g* Esta regla supone, como se echa de ver, que estén hallados ya los dos primeros quebrados simples, de los quales el primero se halla sobre la marcha tomando por numerador la unidad y por denominador el primer cociente. El segundo quebrado puede sacarse por la regla general, suponiendo antes del primer quebrado esta expresion $\frac{0}{1}$. Esto presupuesto,

Pa-

Para hallar el quebrado que he de sentar debaxo del tercer número, ó cociente 2, multiplico por el mismo 2 el numerador 5 del segundo quebrado $\frac{5}{26}$, á cuyo producto añado 1, numerador del primer quebrado, lo que dá 11, cuyo número será el numerador del quebrado que busco; multiplico tambien por el mismo 2 el denominador 26 del segundo quebrado, á cuyo producto 52 añado 5 denominador del primer quebrado, de donde sale 57, este será el denominador del quebrado que busco; por manera que el tercer quebrado será $\frac{11}{57}$. Para hallar el quarto quebrado, que ha de corresponder al quarto cociente 7, multiplico por el mismo 7 el numerador 11 del tercer quebrado, y al producto 77 añado 5, numerador del segundo quebrado, y sale 82 para el numerador del quarto quebrado; multiplico tambien por el mismo 7 el denominador 57 del tercer quebrado, al producto 399 añado 26 denominador del segundo quebrado, y saco 425 para denominador del quebrado que busco; es, pues, este quebrado $\frac{82}{425}$. Por el mismo camino se sacarán todos los demas quebrados.

96 *b* Los quebrados continuos de que hemos hablado hasta aquí, cuyos diferentes numeradores son números distintos de la unidad, ocurren rara vez en los cálculos: los que mas se usan son los quebrados continuos compuestos de quebrados simples, cuyos numeradores son todos la unidad. Es, pues, del caso manifestar como se reducen aquellos á estos, para lo qual servirá de exemplo el quebrado $\frac{547}{2835}$.

Hemos probado (70) que un quebrado no muda de valor porque se partan por un mismo número sus dos términos; por consiguiente si parto los dos términos del quebrado propuesto por 547, el cociente para el numerador será 1, y 5 para el denominador con la resta 100. Luego en lugar del quebrado propuesto podré tomar $\dfrac{1}{5+\dfrac{100}{547}}$.

Si parto ahora el numerador y el denominador del quebrado $\dfrac{100}{547}$ *por* 100, en lugar de $\dfrac{100}{547}$ tendré $\dfrac{1}{5+\dfrac{47}{100}}$, y por consiguiente $\dfrac{1}{5+\dfrac{1}{5+\dfrac{47}{100}}}$ en lugar del primero; facil será reducir el quebrado $\dfrac{47}{100}$ el qual, se reducirá á $\dfrac{1}{2+\dfrac{6}{47}}$, *y todos los demas*, hasta llegar á una resta igual á la unidad, la qual es el numerador del último quebrado, el qual en nuestro caso es $\frac{1}{5}$. Por consiguiente el quebrado $\frac{547}{2835}$ reducido á quebrado continuo es igual á esta serie finita.

$$\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{5}}}}}}$$

Ope-

Operaciones de Arismética con números denominados.

97 Hemos dicho en otro lugar que los números denominados son aquellos que expresan unidades de diferentes especies; v. gr. 3 horas; 4 minutos y 6 segundos es un número denominado.

Hay números denominados de varias especies; pero el modo de calcularlos pende en mucho del modo con que está dividida la unidad principal, y sobre todo de la relacion que con esta tienen, y tambien unas con otras, sus diferentes partes; cuya relacion respecto de algunos números denominados expresamos en las siguientes tablas, y apuntamos los signos con que se señalan las de las diferentes unidades.

Medidas de extension.

punto.					p.
12	linea.				l.
144	12	pulgada.			p.
1728	144	12	pie.		P.
9484	432	36	3	vara.	V.

Tiempo.

tercero.					'''
60	segundo.				''
360	60	minuto.			'
216000	3600	60	hora.		h.
5184000	86400	1440	24	dia.	d.

Pesos.

grano.						gr.
24	escrúpulo.					escr.
72	3	adarme.				adarm.
576	24	8	onza.			O.
4428	192	64	8	marco.		M.
9216	384	128	16	2	libra.	lib.

Monedas.

maravedí.						mrs.
34	real.					r^{l}.
340	10	escudo.				esc.
370	11	$1\frac{1}{10}$	ducado.			duc.
510	15	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{11}$	peso.		Pe.
2040	60	6	$4\frac{5}{11}$	4	doblon.	dobl.

El que entienda una de estas tablas entenderá todas las demas, por cuyo motivo explicarémos la primera.

Esta tabla empieza como todas las siguientes por la menor de todas las partes que componen la unidad principal, que aquí es la vara. Siguen por su órden las partes inmediatamente mayores, expresando quantas de las partes menores componen una de las inmediatamente mayores. Como la parte mínima de la vara es el punto, ocupa el primer lugar empezando desde arriba; como debaxo de *punto* hay 12, y al lado hay *linea*, esto significa que 12 puntos componen una linea; debaxo de *linea* hay 12 y al lado hay *pulgada*, esto significa que 12 lineas

com-

componen una pulgada ; debaxo de *pulgada* hay 12 , y al lado *pie*, porque 12 pulgadas componen un pie ; debaxo de *pie* hay 3 , y al lado *vara* , porque 3 pies componen una vara.

Adicion de números denominados.

98 . Se escriben todos los números por sumar unos debaxo de otros , por manera que todas las partes de una misma especie estén en una misma columna ; y tirando una raya por debaxo de todo , se empieza á sumar por las partes menores. Si su suma no llega á una unidad de la especie inmediatamente mayor , se pone debaxo de las unidades de su especie ; si llega á componer una ó muchas unidades cabales de la especie inmediatamente mayor, se pone cero ó nada debaxo de la columna , llevando el número cabal de unidades para agregarlas á la columna siguiente ; si el número de unidades de la primer columna excede una ó muchas , el exceso se pone debaxo , y se llevan las partes cabales conforme acabamos de decir; lo propio se practica con todas las columnas.

Quiero sumar las partidas siguientes

227 Pe.	14 rs.	8 mrs.
184	11	11
2549	13	15
17	10	7
2980	4	7

La suma de los maravedises llega á 41, que valen 1 real y 7 mrs.; pongo los 7 mrs. y llevo 1 real, para agregarle á la columna siguiente que expresa reales, y saco 49 reales, que componen 3 pesos y 4 reales mas; pongo estos debaxo de la segunda columna, y llevo los 3 pesos para juntarlos con las unidades de la columna siguiente que son pesos, cuya suma hallo que es 2980. Luego las quatro partidas montan 2980 pesos, 4 rs. y 7. mrs.

Voy á sumar las quatro partidas siguientes

54 V.	2 P.	3 p.	9 l.
12	1	4	11
9	2	11	11
8	2	9	10
86	0	6	5

La suma de las lineas llega á 41, que son 3 pulg. y 5 lineas; pongo, pues, 5 lin. y llevo 3 pulg. que agrego á las de la columna siguiente: saco la suma 30 que vale 2 pies y 6 pulg., pongo las 6 pulg. y llevo 2 pies, los quales añadidos á los de la columna siguiente, componen 9 pies, que valen 3 varas cabales: por lo mismo pongo cero debaxo de la columna de los pies, pues ninguno queda que apuntar: agrego las tres varas á las de la columna siguiente; y saco la suma 86; por manera que las quatro partidas componen 86 V. 0 P. 6 p. 5. l.

Sus-

Sustraccion de números denominados.

99 Escríbanse los números propuestos como en la Adicion, y empiécese la operacion por las unidades de menor especie. Si el número inferior se puede restar del superior, póngase debaxo la resta; si no se puede restar quítese á la especie inmediatamente mayor una unidad, reduciéndola á la unidad inmediatamente menor (45), para añadirla á la partida de arriba de la primer columna. Practíquese lo propio con cada especie, y siempre que se quite una unidad á alguna partida, se la mirará como una unidad menor; finalmente, escríbase la resta á medida que se vaya sacando, debaxo de su respectiva columna.

De.	143 Pe.	14 rs.	8 mrs.
he de restar. . .	75	10	20
	68	3	22

Como no puedo restar 20 mrs. de 8 mrs., quito á la partida superior de los reales 1 real, que vale 34 mrs., los agrego á los ocho, y compongo 42 mrs., de los quales resto los 20, y queda la resta 22. Despues resto 10 reales, no de 14 rs., sino de 13 que quedan por razon del real que quité, y queda la resta 3; finalmente, resto 75 pesos de 148 pesos, y restan 68 Pe.

De.	163 Pe.	0 rs.	5 mrs.
he de restar. . .	84	14	30
	78	0	9

Porque de 5 mrs. no puedo restar 30 mrs. ni tampoco puedo quitar 1 real á cero reales, quito un peso de los 163; pero de los 15 rs. que vale dexo con el pensamiento 14 èn lugar del cero, ó los apunto encima, y el otro real, reducido á mrs. le añado á los 5, lo que compone 39 mrs. Hecho esto, hago la operacion como arriba, y saco la resta 78 Pe. 0 rs. 9 mrs.

Multiplicacion de números denominados.

100 La multiplicacion de un número denominado por otro se puede reducir á la multiplicacion de un quebrado por otro, cuya operacion ya queda dicho (88) como se practica. Si se pregunta v. gr. quanto ha de costar una obra de 54 V. 2. P. á razon de 18 P. 5 rs. 15 mrs. la vara; se puede reducir todo el multiplicando 18 P. 5 rs. 15 mrs. á maravedises (45), de lo que saldrán 9365 mrs. y como el maravedi es la 510ma parte del peso, será el multiplicando $\frac{9365}{510}$ de peso: se reducirá igualmente todo el multiplicador 54 V. 2. P. á pies, de lo que resultarán 164 pies; y como el pie es la tercera parte de la vara, el multiplicador será $\frac{164}{3}$ de vara: por manera que la operacion queda reducida á multiplicar $\frac{9365}{510}$ de peso por $\frac{164}{3}$ de vara, cuya multiplicacion dará el pro-

duc-

ducto $\frac{1535860}{1530}$ de peso, que valen 1003 Pe. 12 rs. 15 mrs. (57 *a*).

101 Pero se pueden multiplicar unos por otros los números denominados sin reducirlos á quebrados. Primero que declaremos como se hace la operacion, es del caso prevenir, que quando se han de multiplicar uno por otro dos números, cuyas unidades son de distinta especie, se ha de tomar por multiplicando aquel cuyas unidades son de la misma especie que las que ha de expresar el producto. Si quiero saber v. gr. quanto importan 12 varas de paño á 50 rs. la vara, he de considerar como multiplicando el número 50 rs. pues el producto ha de expresar reales; porque han de salir al producto tantas veces 50 rs. quantas varas hay, esto es, 12 veces.

De donde se infiere que el multiplicador siempre es un número abstracto, que no expresa unidades, ni partes de unidad de determinada especie, sino quantas veces se ha de tomar el multiplicando. En el exemplo propuesto, el multiplicador 12 es un número abstracto, lo que no puede dexar de ser, porque si le consideráramos como que representa 12 varas, y executásemos la multiplicacion, cometeriamos un absurdo; pues lo seria multiplicar varas por reales.

102 Sentado esto, que, segun se echa de ver, debe entenderse de los números denominados igualmente que de los que no lo son, hay tres reglas que practicar quando se han de multiplicar uno por otro dos números denomi-

minados. 1.° Se han de reducir ambos á la menor de las especies que expresan: 2.° se multiplican uno por otro despues de esta reduccion: 3.° se parte el producto por el número que expresa quantas veces la unidad menor del multiplicador cabe en la mayor; el cociente es el producto que se busca. Pero como este producto expresará las unidades menores del multiplicando, será menester reducirle á las unidades mayores. Los casos prácticos lo acabarán de aclarar.

¿Quanto *importan* 4 V. 2. P. 8. p.
Costando la vara 2. P. 3 rs. 4 mrs?

1.° Reduzco á maravedises toda la cantidad 2 Pe. 3 rs. 4 mrs., y salen 1126 mrs. Reduzco tambien toda á pulg. la cantidad 4 V. 2 P. 8 p., y saco 176 p. 2.° multiplico 1126 por 176, sale el producto 198176; 3.° parto este producto por 36, que expresa quantas veces la unidad menor del multiplicador, que es la pulgada, cabe en la mayor, que es la vara. Salen al cociente 5504 mrs. y $\frac{32}{36}$ ó $\frac{8}{9}$ de maravedi; y porque este quebrado vale muy cerca de un maravedi, le omito, pero añado una unidad (80) al último guarismo del cociente hallado, el qual por consiguiente será 5505. Practicando lo dicho (57 *a*), hallarémos que estos maravedises valen 10 pesos, 11 reales y 31 mrs.

¿Que ganancia han de dar 10 Pe. 3 rs. 4 mrs. en el supuesto de que cada peso dé 3 Pe. 2 rs. 6 mrs. de ganancia?

Por

Por la pregunta se conoce que hemos de multiplicar 3 Pe. 2 rs. 6 mrs. por 10 Pe. 3. rs. 4 mrs.; reduzco 3 Pe. 2 rs. 6 mrs., todo á maravedises, y saco 1604 mrs. y el multiplicando á 5206 mrs. 2.° multiplico 1604 por 5206: saco el producto 8350424 mrs. 3.° parto este producto por 510, cuyo número expresa quantos maravedises caben en un peso; salen al cociente 16373 mrs. y $\frac{194}{510}$ de maravedi, que por lo dicho (57 *a*) será fácil reducir á pesos y reales, y saldrán 32 Pe. 1 r. 19 mrs.

De las tres operaciones que hay que practicar en la multiplicacion de dos números denominados uno por otro, la razon de las dos primeras se percibe fácilmente: por lo que solo hemos de manifestar la de la tercera, y aplicarémos su declaracion al exemplo primero. Si cada pulgada valiera 1126 mrs., claro está que 4. V. 2 P. 8 p. ó 176 pulg. valdrian 198176 mrs. por ser este número el producto de 1126 por 176. Pero 126, son por lo supuesto, el valor de la vara, y no de la pulgada; luego ya que la vara vale 36 pulg. el precio de la vara es 36 veces menor que el de la pulg. ó que el producto 198176; luego para sacar en maravedises el valor de 176 pulg. hay que partir 198176 por 36.

103 Si se hubiesen de multiplicar uno por otro dos números denominados, que ambos expresasen medidas de longitud, quales serian estos dos 5 V. 1 P. 6 p. y 3 V. 2 P. 3.p., se omitiria la tercera operacion, y compondria el producto una superficie, conforme se manifestará en la Geometría.

Di-

Division de los números denominados.

104 Esta operacion será muy fácil de entender para los que se hubiesen enterado de la antecedente. Solo prevengo que así como en la multiplicacion de los números denominados se considera el multiplicador como un número abstracto, en la division de los mismos números se considera algunas veces como número abstracto el divisor, y otras el dividendo. La naturaleza de las preguntas que dán motivo á esta division, determina qual de los *dos números debe considerarse* como número abstracto.

105 Supongamos que 7 M. 2 O. han costado 346 Pe. 14 rs. 6 mrs., y se pregunta á como sale el marco?

Para executar esta division. 1.° se reduce el divisor á las unidades de su menor especie: 2.° se hace la division empezando *por las unidades* mayores del dividen*do, para hacer despues lo* propio con las que se siguen; 3.° se multiplica todo el cociente por el número que expresa quantas veces la unidad menor del divisor cabe en la mayor.

106 Si despues de hecha la division de las unidades mayores del dividendo, pongo por caso que sean pesos, queda alguna resta, se la debe reducir á reales, los que se añaden á los que lleva ya el dividendo, y la suma se parte por el número que partió antes los pesos. Si quedase tambien alguna resta despues de divididos los reales, se la debe reducir á maravedises para añadirlos á los que lleve

ya

ya el dividendo, y la suma se parte por el mismo divisor.

Apliquemos la regla al exemplo propuesto. 1.° Reduzco el divisor 7 M. 2 O. á 58 onzas: 2.° parto 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. por 58, empezando por los pesos, y saco el cociente 5 pesos, y queda la resta 56, que reduzco á reales, multiplicándola por 15, sale el producto 840, al qual añado los 14 rs. del dividendo. Sale la suma 854, que parto por 58, sale el cociente 14 rs., y queda la resta 42, que reduzco á 1428 mrs.; junto con ellos los 6 del dividendo, sale la suma 1434, que divido por 58; salen 24 mrs., y queda el quebrado $\frac{42}{58}$ que expresa partes del maravedi. 3.° Multiplico este cociente por 8, porque caben 8 onzas en el marco; sale el producto 47 Pe. 12 rs. 27 mrs. y $\frac{46}{58}$ de maravedi, cantidad despreciable.

He comprado 55 V. y 3 quartas de paño que me han costado 642 Pe. 12 rs. 8 mrs. quiero saber á como sale la vara. 1.° Reduzco las 55 V. $\frac{3}{4}$ á quartas, que son las unidades menores del divisor, saco 220 quartas, las quales con las $\frac{3}{4}$ componen 223 quartas, cuya cantidad será el divisor. Empiezo la division por las unidades mayores del dividendo, y saco el cociente 2 Pe. y la resta 196, la qual reducida á reales, y añadida á los 12 rs. que hay en el dividendo, dá 2952, pártolos por 223, saco el cociente 13, y queda la resta 53, la qual reducida á maravedises, y añadida á los 8 que hay en el dividendo; dá 1810 mrs.; pártolos por 223, saco el cociente 8 y el quebrado $\frac{26}{223}$, parte despreciable de maravedi. Hallo, pues,

que

que el cociente total es 2 Pe. 13 rs. 8 mrs. los multiplico por 4, porque la unidad menor del divisor cabe 4 veces en la *mayor*, y sale el verdadero cociente 11 P. 7 rs. 32 mrs. y á esto sale cada vara de paño.

107 Resta explicar la tercer regla del método, porque las dos primeras se perciben fácilmente; aplicaremos la explicacion al exemplo primero. No hay duda en que el cociente que dán 346 Pe. 14 rs. 6 mrs. partidos por 58 es el valor de *una onza*, una vez que el divisor 58 expresa *onzas*. Por consiguiente para sacar el valor que buscamos del marco, se ha de multiplicar el tal cociente por 8 que expresa quantas onzas hay en el marco.

108 Quando el divisor no tiene unidades mas que de una especie, se excusan la primera y tercer regla del método. Si 26 arrobas de vino v. gr. han costado 1467 rs. 31 mrs., y quiero saber á como sale la arroba, bastará partir por 26 primero los reales y despues los mrs. del dividendo, añadiéndoles los que expresare la resta que quedare despues de partidos los reales por 26.

109 En los exemplos propuestos debe considerarse el divisor como un número abstracto, porque solo expresa en quantas partes iguales se ha de partir el dividendo. En otros casos se ha de mirar el cociente como un número abstracto, porque no tiene mas oficio que expresar quantas veces el divisor cabe en el dividendo.

Si me tocase partir 67 Pe. 12 rs. 6 mrs. por 5 Pe. 4 rs. 6 mrs. echaria de ver que aquí solo me tocaria bus-

car

car un número que exprese quantas veces cabe el divisor en el dividendo, en cuyo caso debe reducirse el dividendo á la menor cantidad del divisor antes de practicar la division. En el caso que aquí propongo, el dividendo será 34584, el divisor 2692, y el cociente será $12\frac{2280}{2692}$. Se viene á los ojos que en las qüestiones parecidas á esta debe omitirse la tercer regla del método, pues para saber quantas veces cabe el divisor en el dividendo, basta hallar quantas veces todas las unidades menores del divisor caben en las unidades de la misma especie del dividendo, y queda hecha la operacion.

De las cantidades Decimales.

110 Ahora declararémos un método particular de dividir y subdividir la unidad en varias partes, cuyo método facilita muchísimo los cálculos. Consiste en dividir la unidad en partes que cada una es diez veces menor que la primera, por cuyo motivo las llamamos partes *Decimales*. Bien se echa de ver que un número que expresa solas partes decimales es un quebrado, y fraccionaria toda cantidad que ademas de expresar unidades, expresa tambien partes decimales de su unidad. Como las decimales son tan fáciles de calcular como los enteros, son sumamente socorridas en todos los ramos de la matemática, y en muchísimos cálculos manifestarémos quan fundada es la preferencia que han merecido respecto de los quebrados comunes.

Pa-

111 Para valuar en decimales las partes menores que la unidad, se concibe esta, sea la que fuere, peso, vara, &c. compuesta de 10 partes, al modo que se concibe la decena compuesta de 10 unidades sencillas, ó del mismo modo que concebimos el peso compuesto de 15 reales. Estas nuevas unidades, contrapuestas á las decenas, se llaman *décimas*; se pintan con los mismos guarismos que las unidades sencillas; y como son diez veces menores que ellas, se colocan *á la derecha* del guarismo que representa las unidades *sencillas*.

Pero con la mira de precaver las equivocaciones que se podrían padecer si se tomasen estas décimas por unidades, se señala el lugar de las unidades con un signo particular, el qual suele ser una coma puesta despues del guarismo que expresa las unidades á mano derecha, ó lo que es lo mismo entre las unidades y las *décimas*; veinte y quatro unidades y *tres décimas* se escriben así 24,3.

112 Tambien se considera cada décima como compuesta de otras diez unidades, cada una de ellas diez veces menor por lo mismo que una décima, y se escriben despues de las décimas á mano derecha. Estas unidades diez veces menores que las décimas, son cien veces menores que las unidades principales, por cuya razon las llamamos *centésimas*: veinte y quatro unidades, tres décimas y cinco centésimas se escriben así 24,35.

113 Consideramos igualmente las *centésimas* como compuestas de diez partes, las quales son mil veces me-

no-

nores que la unidad principal, por cuya razon se llaman *milésimas*, y por ser diez veces menores que las centésimas, se escriben despues de ellas á mano derecha. Prosiguiendo esta division de diez en diez, se forman nuevas unidades, que llamamos por su órden *diez milésimas*, *cien milésimas*, *millonésimas*, *diez millonésimas*, *cien millonésimas*, &c. las quales se escriben en lugar tanto mas apartado de la coma, quanto menores son.

114 Las partes de la unidad que acabamos de dar á conocer, se llaman *decimales*.

115 Se leen del mismo modo que los números enteros. Despues de leer los guarismos que están antes de la coma á mano izquierda, se leen las decimales del mismo modo, añadiendo al fin el nombre de las unidades decimales de la última especie. Para leer v. gr. este número 34, 572, diríamos: treinta y quatro unidades, y quinientas setenta y dos milésimas. Si se tratase v. gr. de varas, diríamos: 34 varas, y 572 milésimas de vara.

Es muy ovia la razon de este modo de leer las decimales, porque en el número 34, 572, el guarismo 5 puede expresar como queramos, ó cinco *décimas*, ó quinientas *milésimas*; porque valiendo la *décima* (112) 10 centésimas, y la centésima 10 milésimas, la décima tendrá diez veces diez milésimas, ó 100 milésimas, por lo que, las 5 décimas valen 500 milésimas. Por lo mismo podrémos leer el 7 diciendo setenta *milésimas*, porque cada *centésima* vale 10 *milésimas*.

116 Por lo que mira á la especie de las unidades del último guarismo, es muy fácil de hallar, nombrando succesivamente desde la izquierda á la derecha cada guarismo desde la coma, como sigue: *décimas*, *centésimas*, *milésimas*, *diezmilésimas*, &c.

117 Quando no hay unidades enteras, y el número solo expresa partes de la unidad, se pone un cero en lugar de las unidades; por lo que, 125 milésimas se escriben así 0,125. Si quisieramos expresar 25 milésimas, escribiriamos 0,025, poniendo un cero entre la coma y los demas guarismos, ya para señalar que no hay *décimas*, ya para dar á las figuras que se siguen su verdadero valor. Por la misma razon seis *diez milésimas* se pintan de este modo 0,0006.

118 Considerémos ahora las mudanzas que padece el valor de un número decimal quando se muda la coma de lugar.

Ya que la coma determina el lugar de las unidades, y el valor de todos los demas guarismos pende de la distancia á que están de la coma, si esta se pone uno, dos, tres, &c. lugares mas adelante á mano izquierda, saldrá un número 10,100,1000, &c. veces menor de lo que era; y al contrario será 10,100,1000, &c. veces mayor de lo que era, si se pone la coma uno, dos, tres, &c. lugares mas adelante á la derecha.

No hay cosa mas fácil de entender; porque si se nos ofrece v. gr. el número 4327 5264, y le escribimos de

este modo 432,75264, poniendo la coma un lugar mas adelante á la izquierda, es claro que los millares del primer número son centenares en el segundo; los centenares, decenas; las decenas, unidades; las unidades, décimas; las décimas, centésimas, &c. Porque en 4327,5264 el 4 antes de la coma expresa millares, y el 5 despues de la coma décimas; en estotro número 432,75264, el 4 antes de la coma expresa centenares, pues el 2 expresa unidades, y el 3 decenas; el 7 despues de la coma expresa décimas, y el 5 centésimas, &c.

Luego cada parte del primer número es diez veces menor despues de la transposicion de la coma. Si trasladamos al contrario la coma un lugar mas adelante á mano derecha, y escribimos 43275,264, los millares del primer guarismo serán ahora decenas de millar; los centenares, millares; las decenas, centenares; las unidades, decenas; las décimas serán unidades; las centésimas, décimas, &c. Luego el último número es diez veces mayor que el primero.

119 Por los mismos principios probaríamos que adelantando la coma dos, ó tres lugares á mano izquierda, el número será 100, ó 1000 veces menor; y que será 100 ó 1000 veces mayor, si se adelanta la coma dos ó tres lugares mas á mano derecha.

120 Prevenimos finalmente que un número decimal no muda de valor aunque á continuacion de su última figura decimal se añadan los ceros que se quiera; v. gr.

43,25 es lo propio que 43,250; que 43,2500; que 43,25000, &c. Porque como cada *centésima* vale 10 *milésimas*, ó 100 diezmilésimas, &c.; las 25 *centésimas* han de valer 250 milésimas, ó 2500 *diezmilésimas*, &c. En una palabra, esto es lo mismo que si en lugar de decir 25 doblones, dixeramos 100 pesos, ó en lugar de 6 arrobas 150 libras: finalmente aunque con añadir ceros exprese el número mas decimales, tambien las expresa menores en la misma proporcion.

El modo de calcular por decimales se funda, conforme se echa de ver en el sistema de numeracion que seguimos y hemos declarado al principio (8). Porque ya que desde la unidad ácia la izquierda las unidades que los guarismos expresan van siendo diez veces mayores, es conseqüencia forzosa que las unidades de los guarismos que hay despues de la unidad á la derecha vayan siendo diez veces menores. En 31,3; si el 3 de la izquierda expresa decenas, el 3 de la derecha no puede menos de expresar décimas, por cuyo motivo es lo mismo que $\frac{3}{10}$; en 431,34, si el 4 de la izquierda vale centenares, el 4 de la derecha ha de valer centésimas, ó partes cien veces menores que la unidad, por cuyo motivo el último 4 es lo mismo que $\frac{4}{100}$; en virtud de esto la cantidad decimal 0,572 es lo mismo que $\frac{5}{10}$, $\frac{7}{100}$, $\frac{2}{1000}$ ó $\frac{572}{1000}$.

Por medio de las decimales se reducen las subdivisiones de las diferentes medidas al sistema de numeracion que seguimos (8), lo que facilita inmensamente su cálcu-

lo;

lo; por decimales se saca tambien tan próxîmo al verdadero como se quiere el valor de algunas cantidades que no es posible valuar cabalmente.

Adicion de las Decimales.

121 Como las decimales se cuentan del mismo modo que los enteros, por decenas de la derecha á la izquierda, la regla para sumarlas es de todo punto la misma, ocupando las decimales de un mismo nombre una misma columna.

Para sumar, pues, unas con otras las siguientes decimales 72,957; 12,8; 124,03, ó sacar el valor de 72,957+12,8+124,03 se asentarán las tres partidas como aquí.

$$\begin{array}{r} 72{,}957 \\ 12{,}8 \\ 124{,}03 \\ \hline 209{,}787 \end{array}$$

Practicando lo propio que en los exemplos de antes (22), sale la suma 209,787.

Substraccion de las Decimales.

122 Para restar una decimal de otra, se practica de todo punto lo mismo que para restar un entero de otro; pero para excusar tropiezos en la práctica, se procura que en ambas partidas haya un mismo número de figuras

decimales, añadiendo los ceros necesarios á la partida que tuviere menos decimales, cuya preparacion no alterará su valor (120).

De. 5403,25
quiero restar. . . 385,6532

Añado dos ceros á continuacion de las decimales de la partida superior, hago despues la substraccion propuesta del mismo modo que si las dos partidas fuesen números enteros.

La resta es 5017,5968.

5403,2500
385,6532
5017,5968

Multiplicacion de las Decimales.

123 Las decimales se multiplican unas por otras del mismo modo que los enteros, sin hacer caso alguno de la coma; pero despues de hecha la multiplicacion, se separan á mano derecha, en el producto despues de la coma tantas figuras, quantas decimales hay en ambos factores.

He de multiplicar.	54,23
por.	8,3
	16269
	43384
	450,109

Mul-

Multiplico 5423 por 83, saco el producto 450109; y como hay dos decimales en el uno de los factores, que es el multiplicando, y una en el otro factor, que es el multiplicador, separo tres figuras á la derecha del producto hallado despues de la coma, el qual con esto es 450,109, y el que corresponde en realidad.

La razon es clara; porque si el multiplicador fuese 83, las partes decimales del producto expresarian centésimas, pues se tomaria 83 veces el multiplicando 54,23, cuyas decimales son centésimas; pero como el multiplicador es 8,3 esto es (118), diez veces menor que 83, el producto no puede menos de expresar unidades diez veces menores que las centésimas; luego el último guarismo de sus decimales ha de expresar milésimas; luego ha de haber tres figuras decimales en el producto, esto es, tantas quantas hay en ambos factores juntos.

La misma razon se aplica á otro caso qualquiera.

Si he de multiplicar.	0,12
por.	0,3
	0,036

Multiplico 12 por 3; y sale el producto 0,036.

Como por la regla se han de separar en este caso tres figuras decimales, podria haber alguna duda, porque el producto no tiene mas de dos; pero el que tuviere presente la razon dada de esta regla en el exemplo antecedente, echará de ver que es preciso añadir, como aquí

 se

se vé, un cero entre 36 y la coma. La razon es que si hubiese de multiplicar 0,12 por 3, el producto seria patentemente 0,36; pero como he de multiplicar por 0,3, esto es, por un número diez veces menor que 3, no puede menos de salir un producto diez veces menor que 0,36, el qual por lo mismo ha de expresar milésimas, cuya condicion se verifica con escribir 0,036, pues el 3 que en 0,36 expresa décimas en 0,036 expresa centésimas, &c.

123 *a* De lo *dicho* (118) se saca el método de multiplicar *una cantidad* decimal por 10, 100, 1000, &c. esto es, por *la unidad* acompañada de muchos ceros. *Adelántase ácia* la derecha la coma tantos lugares quantos ceros lleva el multiplicador, el producto será la decimal que resultare de esta mudanza. Así

$0,578 \times 10 = 5,78$; $0,578 \times 100 = 57,8$

$0,578 \times 1000 = 578$; $0,578 \times 10000 = 5780$.

123 *b* Quando se han de multiplicar una por otra dos partidas que tienen muchas figuras decimales, se hace la multiplicacion por un método compendioso, y al reves, conforme voy á proponer.

Se multiplica primero todo el multiplicando, empezando á mano derecha, por el primer número del multiplicador, á mano izquierda.

Se señala despues con un punto el guarismo del multiplicando por donde empezó la operacion, y se multiplican las demas figuras por el segundo guarismo del multiplicador á mano izquierda.

Se

Se señala con un punto el guarismo del multiplicando por donde empezó la última multiplicacion, y se multiplican los que se le siguen á la izquierda por el tercer guarismo del multiplicador á la izquierda. Se prosigue á este tenor hasta multiplicar de la derecha á la izquierda todo el multiplicando succesivamente por todos los guarismos del multiplicador de la izquierda á la derecha, apuntando con cuidado en cada multiplicacion particular el guarismo del multiplicando por donde empezó; y teniendo presente lo que se ha de llevar del guarismo antecedente.

Los productos particulares se pondrán todos unos debaxo de otros, por manera que sus primeros guarismos á mano derecha estén en una misma columna, y despues se sumarán.

Ultimamente, al tiempo de multiplicar por las unidades, si el multiplicador las tuviese, repárese que lugar ocupa en el multiplicando la figura por donde empieza la multiplicacion particular; habrá tantas decimales en el producto total quantas unidades tenga el número que expresa el lugar que entre las decimales del multiplicando ocupa la figura por la qual empezó dicha multiplicacion.

O sino mírese que lugar ocupa en las decimales del multiplicando el guarismo de la multiplicacion particular, contándolas desde la coma ácia la derecha, y que lugar ocupa en las decimales del multiplicador, contándolas del mismo modo, el guarismo de la misma multiplicacion; el producto tendrá tantas decimales, quantas unidades hu-

bie-

biere en la suma de los números que señalan los dos lugares. Todo esto declarado, vamos á aclararlo con unos exemplos.

	. . . . .
Quiero multiplicar. .	76,84375
por.	8,21054
	61475000
	1536875
	76843
	3842
	307
producto.	630,92867

Multiplico.	0,3570643
por.	0,0210576
	7141286
	357064
	17853
	2499
	214
producto.	0,0075189 16

Mul-

Multiplico.	17,002576|830
por.	0,35608204
	5100773o
	8501288
	1020154
	13602
	340
	7
Sale.	6,0543121

Vamos á manifestar la práctica de este método abreviado, aplicando el discurso al primer exemplo.

Multiplico todo el multiplicando por 8, y saco el producto 61475000. Apunto el 5, y multiplico por 2: diciendo primero 2 veces 5 son 10, llevo 1, y despues digo 2 veces 7 son 14, y una que llevo son 15; pongo, pues, 5, pero en la primer columna de la derecha: 2 veces 3 son 6, y 1 que llevo son 7, &c.; saco el producto 153687 5. Apunto el 7, y digo: una vez 3 es 3, una vez 4 es 4, &c.; saco, pues, el producto 768+3. Apunto el 3, y digo: o veces 4 es o, &c. Apunto el 4, y digo: 5 veces 4 son 20, llevo 2; 5 veces 8 son 40, y 2 que llevo son 42, &c.; saco el producto 3843. Ultimamente apunto el 8, y digo: 4 veces 8 son 32, llevo 3; 4 veces 6 son 24, y 3 que llevo 27; 4 veces 7 son 28, y 2 que llevo son 30; sale, pues, el producto 307; la su-

suma de todos los productos particulares, ó el producto total es 630,92867.

En el segundo exemplo, el primer multiplicador es 2, y el primer multiplicando es el 3 de la derecha; el 2 ocupa en su partida el segundo lugar decimal, el 3 ocupa en el multiplicando el séptimo lugar, 7 y 2 son 9; serán, pues, nueve las figuras decimales del producto. Esta regla se verifica igualmente en todas las demas multiplicaciones particulares; v. gr. en la quinta, los factores son el 7 del multiplicando, y el 7 del multiplicador; aquel ocupa en su partida el tercer lugar decimal, y el otro el sexto; 3 y 6 son 9.

Por este método se sacan los productos con las decimales que se quiere. En el tercer exemplo, donde no queremos mas que siete, reparo que el 3 del multiplicador por el qual ha de empezar la multiplicacion ocupa el primer lugar decimal; luego empiezo por la decimal del multiplicando que ocupa el sexto lugar; por lo que desecho las tres figuras decimales 830.

Quando se hubieren de multiplicar partidas decimales muy grandes, será de mucho alivio tener á la vista una tabla como la propuesta (46 *a*).

Division de las Decimales.

124 Quando ocurre partir una decimal por otra, se ponen á continuacion de la que tiene menos decimales tantos ceros quantos se necesitan para que en ambas partidas

das haya igual número de figuras decimales, cuya preparacion no muda (120) su valor: se borra la coma en ambas cantidades, y se hace la division del mismo modo que si fuesen enteros; el cociente que sale es el verdadero.

He de partir 12,52 por 4,3.

$$\text{escribo.}\;\dots\; 12{,}52 \,\big|\, \underline{4{,}3}$$

$$\text{ó mejor.}\;\dots\; 12{,}52 \,\big|\, 4{,}30$$

añadiendo un cero al divisor, á fin de que tenga tantas decimales como el dividendo: borrando la coma, el dividendo es 1252, y el divisor 430; hago la operacion, y saco el cociente 2, y la resta 392, quiero decir que el cociente es $2\frac{392}{430}$.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline & 2\frac{392}{430} \end{array}$$

125 Pero como la principal utilidad del cálculo por decimales es excusar los quebrados comunes, en vez de escribir la resta 392 á manera de quebrado como está figurado, prosigo la operacion como aquí se vé.

$$\begin{array}{r|l} 1252 & 430 \\ \hline 3920 & 2{,}9116 \\ 500 & \\ 700 & \\ 2700 & \\ 120 & \end{array}$$

Despues de sacar el cociente entero 2, añado un cero á la resta 392, cuyo cero le hace diez veces mayor de

de lo que es; prosigo partiendo por 430, y pongo el cociente 9 que sale; pero primero señalo el lugar de las unidades enteras con poner la coma despues del 2, y el 9 expresará *décimas* no mas. Hecha la multiplicacion y sustraccion, añado un cero á la resta 50, lo que es lo mismo que si al principio hubiera añadido dos ceros al dividendo. Escribo despues del 9 el cociente 1 que saco, lo que le señala su verdadero valor, pues de este modo expresa centésimas. Prosigo á este tenor la operacion quanto me parece, y ciñéndome en este exemplo á quatro figuras decimales, saco un cociente que no discrepa del verdadero una diez milésima parte, pues no le puedo añadir, ó quitar una unidad sin que sea mayor ó menor de lo que corresponde.

Falta decir 1.° Porque el borrar la coma *en el dividendo y el divisor no altera en manera alguna el valor del cociente, despues de ser uno mismo en ambos el número de figuras decimales.* En el exemplo propuesto el dividendo 12,52, y el divisor 4,30 son respectivamente 1252 centésimas, y 430 centésimas, pues las unidades enteras valen centenares de centésimas (112); pero claro está que en 1252 centésimas caben 430 centésimas, del mismo modo que en 1252 unidades 430 unidades; luego no hace falta la coma, una vez que en ambas partes hay igual número de figuras decimales.

2.° Porque del añadir un cero v. gr. á la resta 392 no se sigue error alguno en la operacion, con tal que se pon-

ponga el cociente donde valga diez veces menos que si expresara unidades. Es constante que quando añado un cero á un dividendo le hago diez veces mayor; pero si al tiempo de executar la division por un número determinado, hago que el cociente valga diez veces menos, compenso ó rebaxo con esto el exceso que dí al dividendo quando le añadí el cero. Esta razon sirve tambien para quando se añaden mas ceros al dividendo.

125 *a* Para abreviar la division de las decimales quando son partidas grandes, en lugar de apuntar á cada division particular un guarismo del dividendo se apunta uno del divisor, y quando se multiplica todo el divisor por el número puesto al cociente, se empieza la multiplicacion por el último guarismo apuntado en el divisor, sin omitir lo que corresponde llevar de la multiplicacion del guarismo antes apuntado.

```
630,92878 | 76,84375
614 75000 | 8,210541
---------
 16 17878
 15 36875
 --------
   81003
   76843
   -----
    4159
    3842
    ----
     317
     307
     ---
      10
       7
      --
       3
```

Quando hago la division aquí figurada, parto todo el di-

dividendo por todo el divisor, saco 8 al cociente, por cuyo número multiplico todo el divisor, y despues de executada la correspondiente sustraccion, queda la resta que se vé.

Apunto el último guarismo 5 del divisor, el qual en la segunda division particular será 76,8437 no mas. Hago la operacion, saco el cociente 2 por cuyo número multiplico el divisor 76,8437; pero como si multiplicara por 2 el 5 omitido, saldria el producto 10, y tendria que llevar 1, la llevo con efecto, y la añado á 14; producto del último guarismo del nuevo divisor por 2, último guarismo del cociente, y sale 15, por cuyo motivo pongo 5 debaxo del 8 del segundo dividendo particular.

Quando ocurra partir una cantidad decimal por 10, por 100, &c. la operacion se reduce á adelantar ácia la izquierda la coma tantos lugares quatos ceros acompañen á la unidad del divisor.

El cociente de 32,075 partido por 10 es 3,2075; el cociente de 25,7 partido por 1000 es 0,0257.

La razon se saca de lo dicho (118), pues partir un número por 10 es hacerle diez veces menor, lo que en las decimales se consigue con adelantar la coma un lugar á la izquierda.

Si las partidas decimales con las quales se ha de hacer la division fuesen muy crecidas, tendrá mucha cuenta formar una tabla de todos los productos del divisor por cada uno de los nueve guarismos.

126 Queda patente despues de lo dicho hasta aquí, que

que las decimales se calculan con igual facilidad que los enteros. Por consiguiente será muy del caso, siempre que ocurran quebrados, reducirlos á decimales, y serán mas fáciles las operaciones que con los tales quebrados se ofrezca hacer.

126 *a* Si quiero reducir $\frac{4253}{9678}$ á decimales, y sacar su valor con menos de una milésima de unidad; tendré que partir 4253000 por 9678, de cuya operacion sacaré 0,439; por manera que el valor de $\frac{4253}{9678}$ es 0,439, que no discrepa del verdadero una milésima parte de la unidad.

126 *b* Es tambien muy fácil reducir á quebrado comun una cantidad decimal, v. gr. esta 0,024. Porque como $0,024 = \frac{24}{1000}$ (120), despues de puesta en esta forma la decimal, se partirán sus dos términos por su máxîmo comun divisor 8, y saldrá que $\frac{24}{1000} = \frac{3}{125} = 0,024$. De este caso es fácil inferir lo que se habrá de hacer en otro qualquiera.

Algunos usos de las Decimales.

127 Supongamos que se me ofrezca reducir 3 V. 2 P. 8. p. 7. l. á decimales de vara, de modo que no se pierda ni siquiera media linea. Reparo que la vara tiene 432 lineas, y por consiguiente 864 medias lineas; cuyo número manifiesta que si no quiero despreciar ni media linea siquiera, he de llevar la aproxîmacion mas allá de las centésimas, esto es, hasta las milésimas. Porque si me

contentara con llevarla hasta las centésimas no mas, omitiendo una centésima, omitiria una de las 864 medias líneas que componen la vara, y por consiguiente erraria el intento.

Sentado esto, reduzco los 2 P. 8. p. 7 l. todo á lineas, y salen 391 lin. ó $\frac{391}{432}$ de vara: transformo este quebrado en decimal hasta las milésimas por el método declarado (126 *a*), salen 0,905, de donde infiero que el número propuesto vale 3 V. 905 de vara.

Para reducir 8 Pe. 4 rs. 5 mrs. á decimales de peso, de manera que no se desperdicie ni siquiera medio maravedí; considero que pues el peso vale 15 rs. y el real 34 mrs. un peso vale (45) 510 maravedises, ó 1020 medios maravedises, y que por consiguiente la decimal que busco ha de llegar hasta las diez milésimas. Reduzco los 4 rs. 5 mrs. á maravedises, y salen 141, ó $\frac{141}{510}$ de peso. Reduzco este quebrado decimal hasta las diez milésimas, y hallo que los 8 Pe. 4 rs. 5 mrs. valen 8 Pe. 2764 de peso.

128 Declaremos ahora como se ha de valuar una cantidad decimal, como si quisiéramos saber quantos reales y maravedises valen las 0,2764 de peso. En esta reduccion hemos de tener presente que una cantidad decimal es un quebrado (126 *b*), y que para valuar un quebrado se multiplica el numerador por el número que expresa quantas veces la unidad, en que deseo determinar el valor del quebrado, cabe en la unidad á la qual

per-

pertenece el quebrado, y dividir el producto por el denominador (94): quiero decir, que para sacar en reales el valor de un quebrado de peso, he de multiplicar el numerador por 15, porque 15 rs. componen un peso, y partir el producto por el denominador del quebrado propuesto.

Pero como las decimales no tienen denominador para valuarlas, basta la multiplicacion, y se ahorra el calculador el trabajo de partir el producto por el denominador, cuya operacion se executó ya quando se reduxo el quebrado comun á decimal. Por consiguiente, en el caso propuesto bastará multiplicar 0,2764 por 15; lo que no dexa duda acerca de lo mucho que se abrevian algunas operaciones haciendo por decimales los cálculos.

Multiplico, pues, 0,2764 por 15, sale el producto 4,1460, esto es, el entero 4 que vale 4 rs. y 0,1460 de real. Para valuar esta última cantidad la multiplico por 34, porque 34 maravedises componen un real; saco el producto 4,9640; esto es, 4 maravedises, y 0,9640 de maravedí, que muy en breve dirémos lo que vienen á valer, con muy corta diferencia.

Por este método sacaré que 0,5687 de vara valen 1 P. 8 p. 5 l. y 0,6784 de linea.

129 Con igual facilidad se valuará una decimal de otra unidad qualquiera, v. gr. 0,0046 de vara á razon de 17 rs. la vara. Ya que un real vale 34 mrs. y en el caso propuesto la vara cuesta 17 rs., su valor importa-

rá 17 veces 34 mrs. (45). Multiplico, pues, la decimal 0,0046 por el producto de $17\times34=578$; sale el producto 2,6588, el qual manifiesta que costando una vara 17 rs., las 0,0046 de vara importan 2 mrs. y 0,6588 de maravedí.

130 La última operacion está diciendo que siempre que se calcula por decimales, no es necesario poner muchas, sino quando es preciso sacar sumamente cabal el valor que se busca, lo que dán á conocer las mismas preguntas que dán motivo al cálculo; bastan comunmente una, dos, ó á lo mas tres decimales.

Porque ya hemos visto lo que importan 0,0046 de vara á razon de 17 rs. la vara. Pero si se pagase la vara á razon de 10000 reales, sacarémos por el método enseñado (128) que las 0,0046 de vara importarian 46 reales, cuya cantidad merece alguna consideracion.

131 *Siempre que se omita el último guarismo de una cantidad decimal; si pasa de 5, debe añadírsele una unidad al último de los guarismos que quedan.* Sea v. gr. esta decimal 0,386 el último resultado de un cálculo, en el supuesto de que para resolver la cuestion propuesta pueda contentarme con dos figuras decimales, ó con esto 0,38. Como el 6 que voy á desechar vale mas de 5, añadiré una unidad al 8, y quedará 0,39.

La razon de esta práctica es muy clara; porque si diez unidades de la columna donde está el 6 ó 10 milésimas valen una unidad de la columna donde está el 8, ó

una

una centésima (112); quando desecho el 6, desecho mas de la mitad de una centésima, y con añadir una unidad al 8, añado á 0,386 menos de lo que quitaria á toda la cantidad con desechar el 6. Si se omitieren las dos últimas figuras de una decimal, que valgan mas de 50, se añadirá una unidad á la última de las figuras que quedaren. Sin tanta explicacion entenderá esta práctica el que tuviese presente lo dicho (80).

Quando hallamos poco ha que las 0,2764 de peso valen 4 rs. 4. mrs., y 0,9640 de maravedí ; en lugar de 4 mrs. podiamos poner 5 mrs., porque la cantidad decimal 0,9640 de maravedí se acerca, ó aproxîma mucho al valor de un maravedí, pues su primer figura 9 expresa nueve décimas de maravedí.

131 *a* Despues de lo que acabamos de manifestar acerca de algunos usos de las decimales, no puede quedar ninguna duda sobre lo mucho que facilitan los cálculos de los quebrados comunes y de los números denominados. Aconsejamos por lo mismo á los principiantes se dediquen á su práctica quanto puedan ; y aunque no faltarán en el discurso de esta obra muchas qüestiones, donde acabarán de conocer con total evidencia quan provechosa es esta advertencia, no puedo menos de hacer la aplicacion de lo dicho en este particular al cálculo de los números denominados, repitiendo aquí por este método los cálculos que hicimos antes por el método ordinario.

131 *b* Me propongo sumar las quatro partidas. Para aplicar á esta operacion la doctrina de las decimales, he de hacer con las quatro partidas la reduccion propuesta, mediante lo qual se transforman en las que aquí se vén.

227 Pe.	14 rs.	8 mrs.
184	11	11
2545	13	15
17	10	7

227,949	
184,754	9
2549,896	
17,680	
2980,280	

Hago la adicion, y sale la suma 2980,280, esto es, 2980 pesos, y 280 milésimas de peso. Para saber los reales maravedises que vale, la multiplico primero por 15, saco el entero 4, y el decimal 0,200 de real; para saber los maravedises que esta vale la multiplico por 34, saco el producto 6,800, esto es, 6 mrs. y 0,800 de maravedí, y porque el 8 vale mas de 5, añado una unidad al 6, lo que me dá 7 mrs. De modo que la suma es 2980 Pe. 4 rs. 7 mrs. la misma que antes (98).

131 *c* En estas aplicaciones importa tener muy presente que la reduccion á decimales debe continuarse dos figuras, ó una por lo menos mas de las que se desea lleve la suma, ó el último resultado; porque si acaso la figura decimal que se siguiese á la última, valiera mas de 5, seria necesario añadir una unidad á la última; donde

no,

no; se errara el cálculo. En el caso propuesto v. gr. la segunda partida reducida á decimales hasta quatro figuras, es 184,7549. Si nos hubiéramos contentado con sacar tres figuras decimales no mas, no hubiéramos sabido que el 4 habia de ser un 5, por causa del 9 desechado. La suma no habria salido cabal, y el error hubiera caido en los mrs. como puede facilmente comprobarlo el lector.

131 *d* En el segundo exemplo las partidas reducidas á decimales se transforman en las aquí puestas, y la suma es 86 varas, y 0,179 de vara. Si multiplico esta decimal por 3, número de pies que hay en la vara, saco 0,537 que no llega á un pie; de donde infiero que no hay pies en la suma; multiplico la decimal 0,537 por 12 para sacar las pulg. y saco 6 pulg. y 0,444 de pulg. Multiplico esta decimal por 12, y saco 5 lineas, y 0,328 de linea que desprecio. Infiero, pues, que la suma es 86 V. o Pe. 6 p. 5 l. lo mismo que antes.

V
54,771
12,470
9,998
8,940
86,179

131 *e* Las dos partidas del primer exemplo de sustraccion se transforman en las que aquí se vén, y la resta tambien.

143,949
75,706
68,243

La decimal 0,243 multiplicada por 15 dá 3 rs. y 0,645 de real; esta última decimal multiplicada por 34 dá 21 mrs. y 0930, 6, añadiendo una unidad al último guarismo de 21 (131), 22 mrs. De donde saco la

 mis-

misma resta 68 pesos 3 reales 22 maravedises que antes.

Para restar 84 Pe. 14 rs. 30 mrs. de 163 Pe. 0 rs. 5 mrs. como antes (99), veo que despues de hecha la preparacion allí encargada, he de restar 84 Pe. 14 rs. 30 mrs. de 162 Pe. 14 rs. 39 mrs.; considero que los 14 rs. 39 mrs. son 515 mrs. y los 14 rs. 30 mrs. son 506 mrs.; veo que la operacion se ha de hacer con las dos partidas aquí puestas, y que la resta es la misma que se sacó antes (99).

162 Pe.	0 rs.	515 mrs.
84	0	506
78	0	9

131 *f* En la multiplicacion, los dos factores del primer exemplo son

$$\begin{array}{r} 4,889 \\ 2,208 \\ \hline 39112 \\ 9778 \\ 9778 \\ \hline 10,794912 \end{array}$$

Multiplico la decimal por 15, saco 11 reales, y 0,923680 de real, esta última decimal por 34, saco 31 mrs. y 0,405120 de maravedí; por manera que el producto es, como antes, 10 Pe. 11 rs. 31 mrs.

Los factores del segundo exemplo se transforman como aquí se vé; despues de hecha la multiplicacion se leen 32 Pe. y 0,104160 de peso. Multiplicada esta decimal por 15, dá 1 real, y 0,562400 de real; multiplico la de-

decimal por 34, salen 19 mrs. y una decimal despreciable que es 0,121600 de maravedí. Sale, pues, el mismo producto 32. Pe. 1 real, 19 mrs. como antes.

$$\begin{array}{r} 10208 \\ 3145 \\ \hline 51040 \\ 40832 \\ 10208 \\ 30624 \\ \hline 32,104160 \end{array}$$

131 g En el primer exemplo de division, el dividendo se transforma en 346,945, y el divisor en 7,250: hago la division, y saco el cociente 47,854; haciendo con la decimal 0,854 las operaciones tantas veces encargadas, saco 12 rs. 27 mrs. Por manera que el cociente es tambien aquí 47 Pe. 12 rs. 27 mrs.

En el segundo exemplo, el dividendo es 642,816, y el divisor 55,750. Hecha la division sale al cociente 11 Pe. y 0,530 de peso. Hago finalmente con esta decimal lo dicho (128), y saco 7 rs. y 32 mrs. De modo que el cociente es tambien aquí como fué antes (106) 11 Pe. 7 rs. 32 mrs.

De los Números Quadrados y de sus raices.

132 Llámase *quadrado* de un número el producto que sale quando se multiplica dicho número por el mismo; 25 v. gr. es el quadrado de 5, porque si multiplico 5 por 5, el producto es 25.

133 *Raiz quadrada* de un número se llama aquel nú-

número que multiplicado por el mismo dá el mismo número propuesto; 5 v. gr. es la raiz quadrada de 25; 7 es la raiz quadrada de 49.

134 Es, pues, todo número que quadramos multiplicando y multiplicador á un tiempo; es por consiguiente dos veces factor (31) del producto: por cuyo motivo este producto ó quadrado se llama tambien *segunda potencia* del tal número.

135 Para señalar que un producto se compone de dos factores *iguales*, ó es un quadrado; pongo por caso, para señalar el quadrado de una cantidad, de 4 v. gr. la escribo así 4^2 ó $(4)^2$, lo que está diciendo que 4 es dos veces factor en el producto que resulte. Si la cantidad cuyo quadrado se quiere señalar, consta de muchos guarismos, qual es v. gr. 234, se señala su quadrado de este modo $(234)^2$, ó de destotro $\overline{234}^2$.

De aquí se sigue que 2 puesto á la derecha de un guarismo ó número, y algo mas arriba, señala el quadrado, ó la segunda potencia del tal guarismo ó número. Y para figurar la raiz quadrada usamos de este signo $\sqrt{}$, que se llama *signo radical*, poniendo el guarismo 2 entre sus dos piernas. La raiz quadrada de 64 v. gr. se señala $\sqrt[2]{64}$. Pero lo comun es omitir el 2 entre las piernas del signo radical, y pintar la raiz quadrada de este modo $\sqrt{64}$. Quando el número tiene muchos guarismos, y tiene v. gr. 3458, se señala la raiz quadrada en esta forma $\sqrt[2]{(3458)}$, ó $\sqrt[2]{\overline{3458}}$.

Co-

135 *a* Como una cantidad, sea la que fuere, no es mas que una vez factor en ella misma, tambien es ella misma su primer potencia, la qual se señala con la unidad. La primer potencia de 3 v. gr. es 3^1.

Los guarismos que señalan de este modo las potencias, ó sus grados, se llaman *exponentes* de las tales potencias.

136 Para quadrar un número, basta multiplicarle por el mismo, conforme á las reglas dadas (40); pero para extraer ó sacar la raiz quadrada de un número, esto es, para volver del quadrado á la raiz, es preciso socorrerse de algun método particular, á lo menos quando el número ó quadrado propuesto tiene mas de dos guarismos.

Quando el número propuesto no tiene sino uno ó dos guarismos, su raiz en número entero es fácil de sacar por la tabla aquí puesta, cuya primer linea se forma de los quadrados de los nueve guarismos, que forman la segunda.

1	4	9	16	25	36	49	64	81
1	2	3	4	5	6	7	8	9

La raiz quadrada de 72 v. gr. es 8 en número entero; porque como 72 está entre 64 y 81, su raiz estará entre las raices de estos dos números, esto es, entre 8 y 9; es, pues, 8 y un quebrado, de cuyo quebrado no podemos hallar á la verdad el valor cabal; pero podemos aproxîmarnos, ó acercarnos á él quanto queramos, conforme enseñarémos en su lugar.

La

137 La raiz quadrada de un número que no es quadrado perfecto, se llama número *sordo*, *irracional*, ó *incomensurable*.

138 Tratemos de los números que no tienen mas de dos guarismos, y considerando el rumbo que se sigue quando se forma el quadrado de un número, ó se levanta un número al quadrado, ó á la segunda potestad, hallarémos el rumbo que debe seguirse para sacar su raiz.

Quadremos con esta mira el número 54 v. gr.

Despues de escritos el multiplicando y el multiplicador como corresponde, multiplico el 4 de arriba por el 4 de abaxo, cuyo producto es patentemente el *quadrado de las unidades*.

$$\begin{array}{r} 54 \\ 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array}$$

Multiplico despues el 5 de arriba por el 4 de abaxo, de lo que sale el *producto de las decenas por las unidades*.

Paso despues al segundo guarismo del multiplicador, y multiplico el 4 de arriba por el 5 de abaxo, de lo que resulta el producto de las unidades por las decenas, ó (33) el *producto de las decenas por las unidades*.

Finalmente, multiplico el 5 de arriba por el 5 cinco de abaxo, cuyo producto es el *quadrado de las decenas*.

Sumo estos dos productos, y saco que el quadrado de 54 es el número 2916, el qual se compone del *quadrado de las decenas*, *de dos veces el producto de las decenas por las unidades*, *y del quadrado de las unidades del número* 54.

Co-

139 Como lo que acabamos de observar es conseqüencia inmediata de las reglas de la multiplicacion, se verifica no solo respecto del número 54, sino tambien respecto de otro número qualquiera que tenga decenas y unidades; de suerte que, por regla general, el quadrado de todo número compuesto de decenas y unidades, consta de las tres partidas que acabamos de especificar, que son, *el quadrado de las decenas del mismo número*, *dos veces el producto de las decenas por las unidades*, *y el quadrado de las unidades*.

140 Sentado esto, ya que el quadrado de las decenas expresa centenares (pues 10 veces 10 son 100), es evidente que el quadrado de las decenas no puede estar en los dos últimos guarismos del quadrado, que solo expresan decenas y unidades.

Ya que el producto del duplo de las decenas multiplicado por las unidades no puede menos de expresar decenas, no puede estar en el último guarismo del quadrado, que solo expresa unidades.

141 Luego para volver del quadrado 2916 á su raiz, practicarémos lo siguiente.

2916	54 raiz
416	
104	
000	

Empecemos buscando las decenas de la raiz. Desde luego la formacion del quadrado me enseña que el quadrado de dichas decenas está en 2916; pero que no puede estar en los dos últimos guarismos; ha de estar, pues, en 29; y como la raiz quadrada de 29 no pue-

puede pasar de 5, infiero que el número de las decenas de la raiz es 5; pongo, pues, 5 al lado de 2916, como aquí se vé.

Quadro 5, y resto de 29 el producto 25; queda la resta 4, á cuyo lado baxo los otros dos guarismos 16 del número 2916.

Para hallar ahora las unidades de la raiz, considero que partidas del quadrado quedan en la resta 416; hay dos, es á saber, el duplo de las decenas de la raiz multiplicado *por las* unidades, y el quadrado de las unidades de *la misma* raiz.

De la primera de estas dos partidas sacarémos las *unidades* que buscamos; porque una vez que se compone del duplo de las decenas multiplicado por las unidades, si las partimos por el duplo de las decenas halladas ya, el cociente expresará las unidades (56). Solo falta saber *en que guarismo de* 416 está el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, segun reparamos antes, no puede estar en el último guarismo; estará, pues, en 41. Por consiguiente he de partir 41 por 10 duplo de las decenas 5; executo la division, y el cociente 4 es el número que busco de las unidades. Pongo, pues, 4 á la derecha de las 5 decenas halladas, y veo que la raiz que buscaba es 54.

Aquí importa mucho advertir que sin embargo de ser el cociente 4 el que corresponde en el caso propuesto, hay muchos casos donde el cociente hallado por este camí-

mino debe desecharse por mayor de lo que conviene. Porque 4 1, esto es, el número que queda despues de separado el último guarismo, incluye no solo el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, mas tambien las decenas procedentes del quadrado de las unidades; por cuya razon, para salir de dudas acerca del guarismo de las unidades, es preciso hacer la siguiente comprobacion.

Despues de hallado y puesto á la raiz el guarismo 4 de las unidades, le pongo al lado del duplo 1 0 de las decenas, de lo que sale el número 1 0 4, cuyos guarismos multiplico unos despues de otros por el 4, restando los productos á medida que salen, de las partes correspondientes de 4 1 6; y como no queda resta alguna, infiero que 5 4 es la raiz quadrada cabal de 2 9 1 6.

La comprobacion que acabo de proponer se funda en la formacion misma del quadrado; porque es evidente que 1 0 4 multiplicado por 4 dá el quadrado de las unidades, y el duplo de las decenas multiplicado por las unidades, esto es, lo que completa el quadrado cabal.

1 4 2 De lo que acabamos de decir debe inferirse, que para sacar la raiz quadrada de un número que no tiene mas de quatro guarismos, ni menos de tres, se ha de buscar, despues de separar dos guarismos á la derecha, la raiz quadrada de los que quedan á la izquierda; cuya raiz será el número de las decenas de la raiz total que se busca, poniéndola al lado del quadrado propuesto, del qual se la separará con una raya.

De los mismos guarismos se restará el quadrado de la raiz hallada, y despues de escrita la resta debaxo, se baxarán á su lado los dos guarismos separados.

Se pondrá una coma á la izquierda del último de los dos guarismos que se acabaren de baxar, y el número que quedare á la izquierda de la coma se partirá por el duplo de las decenas puesto debaxo de la raiz.

Se pondrá desde luego el cociente al lado del primer guarismo de la raiz, y despues al lado del duplo de las decenas que hubiere servido de divisor.

Finalmente se multiplicarán por el mismo cociente todos los guarismos de esta última linea, y á medida que salgan sus productos se restarán de los correspondientes guarismos de la linea de encima. Con un exemplo quedará muy clara toda esta doctrina.

75,69	87 raiz
116,9	
167	
000	

Se me pide la raiz quadrada de 7569; separo los dos guarismos 69, y busco la raiz quadrada de 75; es 8; pongo 8 al lado: quadro 8, y de 75 resto el quadrado 64; queda la resta 11, póngolo debaxo de 75, y al lado de 11 baxo los guarismos 69 que separé al empezar.

En 1169 separo el último guarismo 9, porque la partida que he de dividir para hallar las unidades es 116.

El divisor ha de ser el duplo de las 8 decenas halladas, cuyo divisor le pongo debaxo de 116; saco el cocien-

ciente 7, que pongo á la raiz al lado del 8.

Pongo tambien este cociente al lado del divisor 16; multiplico 167, que forma la última linea, por el mismo cociente 7, y á medida que saco los productos, los resto de 1169; como no queda resta alguna, es prueba de ser 7569 un quadrado cabal, y el quadrado de 87.

143 Téngase muy presente que solo debe partirse por el duplo de las decenas la parte que queda á la izquierda, despues de separado el último guarismo; de suerte que quando en ella no quepa el duplo de las decenas, no por eso se deberá echar mano del guarismo separado; pero se pondrá cero á la raiz. Si al contrario el duplo de las decenas cupiese mas de 9 veces en dicha parte, no por eso se pondrá mas de 9 á la raiz; la razon es la misma de antes (54).

144 El que estuviese bien enterado de lo que acabamos de decir acerca de la extraccion de la raiz quadrada de las cantidades de quatro guarismos no mas, se impondrá facilmente en lo que se ha de practicar quando el quadrado propuesto tiene mayor número de guarismos. Por mas guarismos que correspondan á la raiz, siempre se la puede considerar como que consta de dos partes, que la una expresa decenas, y la otra unidades; v. gr. podemos considerar que 874 tiene 87 decenas, y 4 unidades.

Sentado esto, despues de hallados los dos primeros guarismos de la raiz por el camino enseñado, por el mismo se hallará tambien el tercero, considerando los dos pri-

meros guarismos como un solo número de decenas, y aplicándoles, para hallar el tercero, todo quanto hemos dicho del primero para hallar el segundo, quando el número no tiene mas de dos guarismos.

Despues de sacados los tres primeros guarismos, si ha de haber otro, se considerarán los tres primeros como que componen un solo número de decenas, al qual se aplicará para hallar el quarto, lo mismo que se hubiese practicado con los dos primeros para hallar el tercero; se proseguirá á este tenor.

Pero, para mayor seguridad, conviene partir desde luego el número propuesto en rebanadas ó periodos de dos guarismos cada una de la derecha á la izquierda; y podrá suceder que la última conste de un guarismo *solo*.

Fúndase esta preparacion en que considerando la *raiz* como compuesta de decenas y unidades, lo primero que hay que hacer es separar (141) los dos últimos guarismos de la derecha, porque en el periodo que queda á la izquierda, ha de estar el quadrado de las decenas; pero como este periodo tiene tambien mas de dos guarismos, igual razon hay para separar otros dos á la derecha; y se proseguirá al mismo tenor.

Se

Se me pide la raiz quadrada de 7 6 8 0 7 6 9 6.

```
76,80,76,96 |8764 raiz
128,0
 167
------
 1117,6
  1746
------
  7009,6
  17524
------
  00000
```

Parto desde luego el número propuesto en periodos de dos guarismos cada uno, de la derecha á la izquierda; y busco la raiz quadrada del periodo 7 6, el primero á la izquierda: hallo que es 8, y pongo 8 al lado del número propuesto; quadro 8; el quadrado 6 4 le resto de 7 6, queda la resta 1 2, y la pongo debaxo de 7 6; á su lado baxo el periodo 8 0, separando con una coma su último guarismo; debaxo de 1 2 8 pongo 1 6, duplo de la raiz hallada. Despues digo ¿en 1 2 8 quantas veces 1 6? 7 veces; pongo 7 al lado de la raiz 8, y tambien al lado de su duplo 1 6; multiplico 1 6 7 por el 7, y resto de 1 2 8 0 el producto que sale; queda la resta 1 1 1, á cuyo lado baxo el periodo 7 6, y resulta 1 1 1 7 6. Separo su último guarismo 6, y debaxo de la partida 1 1 1 7, que queda á la izquierda, pongo 1 7 4, duplo de la raiz 8 7; parto 1 1 1 7 por 1 7 4, y pongo el cociente 6 á la raiz y al lado del duplo 1 7 4. Multiplico 1 7 4 6 por el 6, y resto

el producto de 11176; queda la resta 700, á su lado baxo 96, separando el último guarismo; debaxo de 7009 que queda á la izquierda, pongo 1752, duplo de la raiz hallada 876; parto 7009 por 1752, pongo á la raiz el cociente 4 y al lado del duplo 1752; multiplico 17524 por el 4, y de 70096 resto el producto, no queda nada. Por consiguiente 8764 es la raiz cabal de 76807696.

145 Quando el número propuesto no es un quadrado cabal, queda una resta al fin de la operacion, y la raiz quadrada que sale, es la raiz del mayor quadrado que hay en el número propuesto; entonces no es posible sacar cabal la raiz quadrada; pero se puede hallar, prosiguiendo la operacion, una raiz tan próxîma á la verdadera quanto se quiera, y tal que levantando al quadrado esta raiz aproxîmada, sale un número que discrepa del verdadero una cantidad tan corta ó despreciable quanto se quiera.

Para esta aproxîmacion sirven las decimales. Se supone á continuacion del número propuesto un número de ceros duplo de las decimales que se quiere lleve la raiz; quiero decir, quatro ceros, si la raiz ha de llevar dos figuras decimales, &c.; despues de esta preparacion, se hace la extraccion de la raiz por el método enseñado, separando con una coma á la derecha de la raiz un número de figuras decimales igual á la mitad del número de ceros añadidos al número propuesto. La razon es, que como el producto de un número decimal por otro ha de llevar tantas decimales quantas hay en ambos factores juntos, es preciso

que

que el quadrado, cuyos dos factores son iguales, tenga doblado número de las que lleva qualquiera de ellos, esto es doblado número de las que lleva la raiz.

Se me pide la raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima, esto es, tan aproxîmada á la verdadera, que no discrepe de ella ni siquiera una milésima.

Para expresar milésimas se necesitan tres decimales, luego hemos de añadir seis ceros al quadrado 87567, por lo mismo he de sacar la raiz quadrada de 87567000000.

```
8,75,67,00,00,00 | 295,917 raiz
47,5
49
346,7
585
5420,0
5909
10190,0
59181
427190,0
591827
129111
```

Haciendo la operacion del mismo modo que en los exemplos antecedentes, hallo que la raiz quadrada, con diferencia de menos de una unidad, es el número 295917; cuya raiz es la de 87567000000; pero como se me pide

la de 87567, ó de 87567,000000, separo en la raiz un número de guarismos igual á la mitad de los ceros que añadí al quadrado; mediante lo qual saco 295,917, raiz quadrada de 87567 con diferencia de menos de una milésima.

146 Si hubiésemos de sacar la raiz quadrada de 2 con diferencia de menos de una diez milésima, sacaríamos la raiz quadrada de 200000000, y hallaríamos 14142; separando con una coma quatro guarismos á la derecha, saldría 1,4142, *raiz* quadrada de 2 aproxîmada, de modo que *no discreparía* ni una diez milésima de la verdadera.

146 *a* Hemos visto (88) como para multiplicar un quebrado por un quebrado, se multiplica el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador; luego para quadrar un quebrado, se debe *quadrar el numerador y* el denominador; en virtud de esto $\frac{4}{9}$ es el quadrado de $\frac{2}{3}$; $\frac{16}{25}$, el de $\frac{4}{5}$.

147 Luego recíprocamente, para sacar la raiz quadrada de un quebrado, se ha de sacar la raiz del numerador, y la del denominador; la raiz quadrada de $\frac{9}{16}$ es $\frac{3}{4}$, porque la de 9 es 3, y la de 16 es 4.

148 Pero casos ocurren donde uno de los dos términos del quebrado ó ninguno es un quadrado cabal; quando solo el numerador dexa de serlo, se saca su raiz aproxîmada por el método poco ha declarado; se saca la del denominador, la qual sirve de denominador de un quebrado cuyo numerador es la raiz hallada del numerador. Para ha-

hallar la raiz de $\frac{2}{9}$, se saca primero aproxîmada la del numerador 2, y será 1,4 ó 1,41, ó 1,414, ó 1,4142 &c. segun se quiera mas ó menos aproxîmada; y como la raiz quadrada de 9 es 3, la raiz aproxîmada de $\frac{2}{9}$ será $\frac{1,4}{3}$ ó $\frac{1,41}{3}$, ó $\frac{1,414}{3}$, ó $\frac{1,4142}{3}$.

149 Pero si tampoco el denominador fuese un quadrado cabal, se multiplicarán ambos términos del quebrado por su denominador, cuya preparacion no muda el valor del quebrado (70), y transforma el denominador en quadrado cabal; hecho esto, se practicará lo que en el caso último. Si se me pidiese v. gr. la raiz de $\frac{3}{5}$, transformaré este quebrado en $\frac{15}{25}$; sacaré la raiz quadrada de 15, hasta tres decimales v. gr. saldrá 3,872; y como la raiz quadrada de 25 es 5, la raiz quadrada de $\frac{3}{5}$ ó $\frac{15}{25}$ será $\frac{3,872}{5}$.

150 Con la mira de escusar muchas especies de quebrados á un tiempo, se reducirá la cantidad $\frac{3,872}{5}$ á decimal, partiendo 3,872 por 5, y será 0,774 la raiz de $\frac{3}{5}$ puesta en forma decimal.

151 Finalmente, quando hubiere enteros juntos con quebrados, se reducirán los enteros á quebrados (83), y se practicará lo mismo que con un quebrado solo. Para sacar v. gr. la raiz quadrada de $8\frac{3}{7}$ transformaré $8\frac{3}{7}$ en $\frac{59}{7}$, y este en $\frac{413}{49}$ (149), cuya raiz, sacada por aproxîmacion, es $\frac{20,322}{7}$ ó 2,903.

152 Tambien se puede reducir á decimales el quebrado que acompaña al entero, pero es preciso que lleve un número par de decimales, y doblado de las que ha de

llevar la raiz; porque una vez que el producto de la multiplicacion de dos números que llevan decimales, ha de llevar tantas quantas hay en ambos factores juntos (123), el quadrado de todo número que tiene decimales, ha de llevar doblado número de las suyas. Para aplicar esta regla á $8\frac{3}{7}$, le transformo en 8,428571 (126 *a*), cuya raiz es 2,903, como antes.

153 Si se ofreciese sacar la raiz de una cantidad decimal, se procurará *primero* que sea par, si no lo fuese, el número de *sus decimales*, lo que se conseguirá poniendo *á continuacion* de las que llevare uno, tres, ó cinco, &c. *ceros*, cuya preparacion no muda el valor de la cantidad decimal (120). Para sacar v. gr. la raiz quadrada de 21,935 con diferencia de menos de una milésima, saco la raiz quadrada de 21,935000, la qual es 4,683, y es tambien la de 21,935. Por el mismo método se hallará que la de 0,542 es, con diferencia de menos de una milésima, 0,736, y que la de 0,0054 es, con diferencia de menos de una milésima, 0,073.

153 *a* Casos ocurren donde es preciso expresar con quebrados muy sencillos la raiz quadrada de los números que no son quadrados cabales; para cuyos casos sirve la doctrina de los quebrados continuos, y sobre todo lo dicho (96 *d* y 96 *e*) que dá sobre la marcha los quebrados mas simples que con un número determinado de guarismos en el numerador y el denominador se aproxîman mas al valor que se busca. Apliquemos el método á la inves-

vestigacion de los quebrados simples que dán el valor de la raiz de 2.

Como la raiz quadrada de 2 es $\frac{14142}{10000}$ con diferencia de menos de una diezmilésima, harémos con este quebrado las mismos operaciones que si buscáramos el máxîmo comun divisor de sus dos términos, cuyas operaciones ván aquí figuradas.

14142	10000	4142	1716	710	296	118	60	58	2
1	1	2	2	2	2	2	1	1	29

Echando mano de los cocientes con arreglo á lo dicho (74), saco esta serie de quebrados $\frac{1}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{17}{12}$, $\frac{41}{29}$, $\frac{99}{70}$, $\frac{141}{99}$, $\frac{239}{160}$, $\frac{7071}{5000} = \frac{14142}{10000}$, alternadamente menores y mayores que la raiz del número 2.

153 *b* Todo número cuya raiz quadrada se busca es considerado como quadrado; pero si no es quadrado perfecto, su raiz no puede salir cabal, y es forzoso sacarla, conforme queda enseñado, por aproxîmacion. Aunque no podemos hallar cabal dicha raiz, conocemos no obstante los límites que no pasa; la raiz quadrada de 12 no se puede conocer; sin embargo sabemos que es mayor que 3 y menor que 4, raices cabales de los dos números quadrados, el uno inmediatamente mayor, y el otro inmediatamente menor que 12.

153 *c* A los números irracionales tambien se les sujeta al cálculo. Desde luego se suman unos con otros, ó se restan, enlazándolos con el signo + ó —, segun sea la ope-

operacion. La suma de $\sqrt{2}$ y $\sqrt{3}$ es $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; para restar $\sqrt{3}$ de $\sqrt{5}$, se escribe $\sqrt{5}-\sqrt{3}$.

Para sacar el producto de una cantidad irracional por otra, se multiplican los números que están debaxo del signo, el qual se pone antes del producto: $\sqrt{3} \times \sqrt{5}$ es $\sqrt{15}$; $\sqrt{2} \times \sqrt{8}$ es $\sqrt{16}$, que vale 4. Para señalar el producto de una cantidad irracional por otra racional, se pone esta delante del radical; $2 \times \sqrt{5}$ es $2\sqrt{5}$; 3 veces $\sqrt{2}$ es $3\sqrt{2}$. Repárese que 3 es lo mismo que $\sqrt{9}$, y que por consiguiente $3 \times \sqrt{2}$ es lo mismo que $\sqrt{9} \times \sqrt{2}$, esto es $\sqrt{18}$; $2\sqrt{8}$ lo mismo $\sqrt{4} \times \sqrt{8}$ ó $\sqrt{32}$.

153 *d* En virtud de esto se entenderá fácilmente que 1.° $\sqrt{8}$ es $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{4}$ ó $2\sqrt{2}$; 2.° $\sqrt{12}$ es $\sqrt{3}\,.\,\sqrt{4}$ ó $2\sqrt{3}$; 3.° $\sqrt{18}$ es $\sqrt{2}\,.\,\sqrt{9}$ ó $3\sqrt{2}$ &c.

153 *e* Para partir una cantidad irracional por otra, se parte el número del radical dividendo por el número del radical divisor, dexando el cociente debaxo del signo; $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ es $\sqrt{\frac{8}{2}}$ ó $\sqrt{4}$ ó 2; $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ es $\sqrt{\frac{18}{2}}$ ó $\sqrt{9}$ ó 3, &c.

De los Números Cúbicos y de su raiz.

154 Para cubicar un número ó formar su *cubo*, primero se le quadra, y despues se multiplica su quadrado por el mismo número; 27 v. gr. es el cubo de 3, porque resulta de multiplicar 9, quadrado de 3, por el mismo 3.

Por consiguiente el número que se cubica es tres veces factor en su cubo. Esta es la razon por que el cubo de

de un número se llama tambien *tercera potestad* del mismo número.

155 En general, se dice que un número está elevado á su segunda, tercera, quarta, &c. potestad, quando se le ha multiplicado por el mismo una, dos, tres, quatro &c. veces, ó quando es dos veces, tres veces, quatro veces &c. factor en el producto.

156 La *raiz cúbica* de un cubo propuesto es el número que multiplicado por su quadrado dá dicho cubo; 3 es la raiz cúbica de 27.

157 No se necesita, pues, regla alguna para formar el cubo de un número; pero es preciso socorrerse de algun método para retroceder desde el cubo á su raiz. Este método vamos á sacarle de lo que veremos se practica para formar el cubo.

Desde luego no se necesita ningun método para sacar la raiz cúbica en números enteros, sino quando el cubo propuesto tiene mas de quatro guarismos; porque una vez que 1000 es el cubo de 10, todo número menor que 1000, el qual por consiguiente tendrá menos de quatro guarismos, tendrá por raiz un número menor que 10, ó su raiz tendrá menos de dos guarismos.

Así; la raiz cúbica en números enteros de todo número que esté entremedias de dos números de la primer linea de la tabla siguiente, donde están los cubos de los nueve guarismos, estará entremedias de los dos números correspondientes de la segunda linea.

1	8	27	64	125	216	343	512	729
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Como 30 v. gr. está entre los números 27 y 64 de la primer linea, su raiz cúbica estará entre 4 y 3, números del segundo renglon correspondientes á los otros dos del primero; será por lo mismo la raiz cúbica de 30 mayor que 3 y menor que 4: será por consiguiente 3 con un quebrado.

158 No todo número tiene raiz cúbica; pero se puede sacar por aproxîmacion un número que si se cubicara, se acercaría quanto quisiera el calculador al número propuesto. Declararémos esta operacion luego que dexemos explicado como se halla la raiz de un cubo cabal.

159 Veamos primero de que partidas se compone el cubo de un número que tiene decenas y unidades.

Ya que el cubo de un número es el producto de su quadrado multiplicado por el mismo número, importa tener presente (139) que el quadrado de un número que tiene decenas y unidades, se compone 1.° del quadrado de las decenas; 2.° de dos veces el producto de las decenas por las unidades; 3.° del quadrado de las unidades.

Es, pues, preciso multiplicar estas tres partidas por las decenas y las unidades del número propuesto para formar su cubo. A fin de distinguir mejor los productos que resultan, pondremos aquí el tipo de esta operacion.

El

El quadrado de las decenas	1.° multiplicado por las decenas dará	el cubo de las decenas.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades		dos veces el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
El quadrado de las unidades		el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.
El quadrado de las decenas	2.° multiplicado por las unidades dará	el producto del quadrado de las decenas multiplicado por las unidades.
Dos veces el producto de las decenas por las unidades		dos veces el producto de las decenas por el quadrado de las unidades.
El quadrado de las unidades		el cubo de las unidades.

Luego juntando estas seis partidas, y sumando unas con otras las que expresan cantidades de un mismo nombre, podremos decir que el cubo de un número que consta de decenas y unidades se compone de quatro partidas, que son 1.° *El cubo de las decenas*: 2.° *tres veces el quadrado de*

las

las decenas multiplicado por las unidades: 3.º *tres veces las decenas multiplicadas por el quadrado de las unidades*; *y* 4.º *finalmente el cubo de las unidades.*

Vimos antes (139) que el quadrado, ó la segunda potencia de un número de dos guarismos se compone de tres partidas, esto es, de tantas partidas, y una mas, quantas unidades tiene el exponente 2 de su grado. Ahora acabamos de ver que la tercer potencia, ó el cubo de un número de dos guarismos, ó que tiene decenas y unidades, se compone de quatro partidas, esto es, de tantas partidas y una mas, quantas unidades tiene el exponente 3 de su grado. De aquí se infiere por induccion que una potencia qualquiera de un número de dos guarismos se compone de tantas partidas, y una mas, quantas unidades tiene el número que expresa su grado. Así, la séptima potencia de un número de dos guarismos se compone de ocho partidas.

Formemos en virtud de esto el cubo de 43 v. gr. que consta de decenas y unidades.

Tomarémos, pues, el cubo de 4 que es 64; pero como este 4 expresa decenas, su cubo expresará millares, porque el cubo de 10 es 1000; por consiguiente el cubo de 4 decenas será 64000.

$$\begin{array}{r} 64000 \\ 14400 \\ 1080 \\ 27 \\ \hline 79507 \end{array}$$

3 veces 16, ó 3 veces el quadrado de las 4 decenas multiplicado por las 3 unidades, dará 144 centenares, porque el quadrado de 10 es 100; será, pues, este producto 14400.

3 veces 4, ó 3 veces las 4 decenas multiplicadas por el quadrado 9 de las unidades, darán decenas, y el producto será 1080.

Finalmente, el cubo de las unidades rematará en la columna de las unidades, y será 27.

Sumando las quatro partidas, sacarémos que el cubo de 43 es 79507, cuyo cubo se hubiera hallado, sin duda alguna, mas facilmente multiplicando 43 por 43, y despues por 43 el producto 1849. Pero hemos seguido un camino mas largo con la mira de investigar, al enterarnos de las partidas que componen el cubo, un método para extraer su raiz.

160 Sentado esto, declararémos este método.

Supongo que se me pida la raiz cúbica de 79507.

Para saber donde está en este número el cubo de las decenas de la raiz, separo con una coma los tres últimos guarismos, en los quales no puede estar dicho cubo, porque vale millares (159).

cubo	79,507	43 raiz
	155,07	
	48	

Busco la raiz cúbica de 79; es 4, y le pongo al lado. Cubico 4, y el producto 64 le resto de 79; queda la resta 15, que pongo debaxo de 79.

Al lado de 15 baxo 507, sale la partida 15507, en la qual ha de estar 3 veces el quadrado de las 4 decenas halladas, multiplicado por las unidades que busco; mas 3 veces las mismas 4 decenas multiplicadas por el quadrado

de

de las unidades, mas finalmente el cubo de las unidades.

Separo las dos figuras 07; en el número 155 que queda á la izquierda, está tres veces el quadrado de las decenas multiplicado por las unidades; hallaré, pues, las unidades (56) partiendo 155 por el triplo del quadrado de las 4 decenas, esto es, por 48.

Como 48 cabe 3 veces en 155, pongo 3 á la raiz.

Para comprobar esta raiz, y hallar la resta, si la hay, podríamos formar las tres partidas del cubo que han de estar en 15507, y ver si componen 15507, ó quanto discrepan de este número; pero con igual facilidad se hace esta comprobacion cubicando sobre la marcha 43, quiero decir multiplicando primero 43 por 43, y despues el producto 1849 por 43, de cuya multiplicacion sale por último 79507. Es, pues, 43 la raiz cúbica cabal de 79507.

Si el cubo propuesto tuviese mas de seis guarismos, se practicará lo que en el exemplo siguiente.

Se ha de sacar la raiz cúbica de 596947688.

Considerarémos su raiz como compuesta de decenas y unidades, por lo que, empezarémos separando los tres últimos guarismos.

Como el periodo 596947 donde está el cubo de las decenas, tiene

596,947,688	842
849,47	
192	
592704	
42436,88	
21168	
596947688	
000000000	

ne mas de tres guarismos, su raiz ha de tener mas de uno, y por consiguiente tendrá decenas y unidades; es, pues, preciso, para hallar el cubo de estas primeras decenas, separar los tres guarismos 947.

Hecha esta separacion, busco la raiz cúbica de 596: es 8, y pongo 8 al lado.

Cubico 8, y el producto 512 le resto de 596; queda la resta 84, y la pongo debaxo de 596.

Al lado de 84 baxo 947, sale 84947, de cuya partida separo los dos últimos guarismos 47.

Debaxo de 849 pongo 192, triplo del quadrado de la raiz 8, y parto 849 por 192; saco el cociente 4, y le pongo á la raiz.

Para comprobar esta raiz, y ver al mismo tiempo lo que resta, cubico 84, y resto el producto 592704 del número 596947, y queda la resta 4243.

A su lado baxo el periodo 688, y considerando la raiz como un solo guarismo que expresa las decenas de la raiz que ando buscando, separo los dos últimos guarismos 88 del periodo que baxé, y parto el número 42436 por el triplo del quadrado de 84, esto es, por 21168; saco el cociente 2, y le pongo al lado de 84.

Para comprobar la raiz 842, y sacar la resta, si la hay, cubico 842, y resto el producto 596947688 del número propuesto 596947688; como no queda resta alguna, infiero que 842 es la raiz cúbica cabal de 596947688.

Prevengo 1.° que en el discurso de esta operacion nunca se puede poner mas de 9 á la raiz; 2.° que si el guarismo puesto á la raiz fuese muy grande, no se podria hacer la sustraccion, por cuyo motivo se le quitarán succesivamente una, dos, tres, &c. unidades, hasta que la sustraccion se pueda practicar.

Quando el número propuesto no es un cubo cabal, la raiz que se saca no es mas que aproxîmada, y pocas veces basta sacarla en números enteros, para cuya aproxîmacion son muy socorridas las decimales, bien que ni aun con ellas se puede sacar cabal la raiz.

161 Para acercarse quanto uno quiera á la raiz cúbica de un cubo no cabal, se le han de añadir tres veces tantos ceros quantas decimales se quieren en la raiz. Despues de cuya preparacion se hará la extraccion de la raiz cúbica por el mismo método que en los exemplos antecedentes; y concluida que esté, se separarán con una coma en la raiz, á la derecha, las figuras decimales que se quiera.

Quiero sacar por aproxîmacion la raiz cúbica de 8755 con diferencia de menos de una centésima. Para que la raiz lleve centésimas, ó, lo que es lo mismo, dos decimales, es preciso que el número propuesto ó el cubo lleve seis (123); es pues necesario añadir seis ceros al número 8755.

Luego el empeño se reduce á sacar la raiz cúbica de 8755000000.

8,

8,755,000,000 | 2061

07,55

12

8000

7550,00

1200

8741816

1318 40,00

127308

8754552981

447019

Por lo dicho antes, parto este número en periodos de tres guarismos cada uno de la derecha á la izquierda.

Saco la raiz cúbica del último periodo 8; es 2, le pongo á la raiz; cubico 2, el producto le testo de 8; queda la resta 0, á cuyo lado baxo el periodo 755, y separo los dos últimos guarismos 55. Debaxo del 7 que queda pongo 12, triplo del quadrado de la raiz, parto 7 por 12, saco el cociente cero, pongo, pues cero á la raiz.

Cubico la raiz 20, me sale 8000, que resto de 8755; queda la resta 755. A su lado baxo el periodo 000, separando dos figuras á la derecha; debaxo de la partida restante 7550, pongo 1200, triplo del quadrado de la raiz 20; y parto 7550 por 1200, saco el cociente 6, que pongo á la raiz.

Cubico la raiz 206, y el producto le resto de 875000; queda la resta 13184, á cuyo lado baxo el último periodo 000, separando las dos últimas figuras. Debaxo de la partida restante 131840, pongo 127308, triplo del quadrado de la raiz hallada 206; parto 131840 por 127308, sale 1 al cociente, y le pongo á continuacion de 206. Cubico 2061, y restando de 8755000000 el producto 8754552981, queda la resta 447019.

Por consiguiente la raiz cúbica aproxîmada de 8755000000 es 2061; luego la de 8755,000000 es 20,61, porque todo cubo tiene tres veces tantas decimales quantas su raiz.

Si importara proseguir mas la aproxîmacion, se añadirian tres ceros á la última resta, y se practicaría lo mismo que hemos enseñado respecto de cada vez que se baxa un periodo.

162 Ya que para multiplicar un quebrado por un quebrado se multiplica el numerador por el numerador, y el denominador por el denominador; para cubicar una fraccion se cubica tambien cada uno de sus dos términos. Luego recíprocamente, para sacar la raiz cúbica de un quebrado, se saca la raiz cúbica de cada uno de sus dos términos. Así la raiz cúbica de $\frac{27}{64}$ es $\frac{3}{4}$, porque la raiz cúbica de 27 es 3, y la de 64 es 4.

163 Pero si solo el denominador fuese un cubo, se sacará la raiz aproxîmada del numerador, y será el numerador de un quebrado, al qual se dará por denomina-

dor

dor la raiz cúbica del denominador del quebrado propuesto. Si se me pidiera v. gr. la raiz cúbica de $\frac{143}{343}$; como el numerador no es un cubo, saco su raiz aproxîmada 5,22 con diferencia de menos de una centésima; saco despues la raiz de 343, que es 7; por lo que la raiz aproxîmada de $\frac{143}{343}$ es $\frac{5,22}{7}$, ó 0,74, reduciendo á decimales la primera, con diferencia de menos de una centésima.

164 Si tampoco el denominador fuese un cubo, se multiplicarán ambos términos del quebrado propuesto por el quadrado del denominador; y como el nuevo denominador será un cubo, se practicará lo que en el último exemplo.

Si se me pide v. gr. la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$, multiplico ambos términos del quebrado por 49, quadrado de su denominador 7; sale $\frac{147}{343}$ de igual valor que $\frac{3}{7}$ (70). La raiz cúbica de $\frac{147}{343}$ es $\frac{5,27}{7}$, ó 0,75 despues de reducirla á decimales; por consiguiente la raiz cúbica de $\frac{3}{7}$ es 0,75, la qual ni una centésima siquiera discrepa de la verdadera.

164 *a* Si enteros acompañasen á los quebrados, se reduciria todo á quebrados, y la operacion estaria reducida á sacar la raiz cúbica de un quebrado.

Si se quiere, se podrá transformar primero en decimal el quebrado propuesto, bien esté solo, bien con entero, pero será preciso continuar la transformacion hasta que haya tres veces tantas decimales quantas se quieran lleve la raiz. Si se me pidiese la raiz cúbica de $7\frac{3}{11}$ v. gr. aproxîmada hasta menos de una milésima, mudaré el quebra-

do $\frac{3}{11}$ en 0,272727272; de suerte que para sacar la raiz cúbica de $7\frac{3}{11}$ he de sacar la de 7,272727272, la qual es 1,937.

165 Para sacar la raiz cúbica de una cantidad toda decimal, se le añadirán los ceros suficientes, de modo que el número de sus decimales sea tres, seis, nueve &c. Despues se sacará su raiz como si no hubiese coma; y concluida la operacion, se separará con una coma en la raiz, á la derecha, un número de figuras que sea el tercio del número de las figuras decimales de la cantidad propuesta; por manera que si la raiz no tuviere bastantes guarismos para la práctica de esta regla, será preciso añadir ceros á la izquierda de la raiz. Si he de sacar v. gr. la raiz cúbica de 6,54 con diferencia de menos de una milésima, le añadiré siete ceros, y sacaré la raiz cúbica de 6540000000, la qual será 1870; separaré tres guarismos, porque hay nueve decimales en el cubo, con lo que será 1,870 ó 1,87 la raiz cúbica de 6,54. Por el mismo camino hallaré que la raiz cúbica de 0,0006, aproxîmada con diferencia de menos de una centésima, es 0,08.

165 *a* Despues de sacada por decimales la expresion aproxîmada de la raiz cúbica de un número, sea el que fuese, entero ó fraccionario, se podrá echar mano de los quebrados continuos para señalar los quebrados sencillos en números enteros inmediatamente mayores ó menores que el quebrado propuesto, que mas se acercan á su valor. Si se me pidiese v. gr. la raiz cúbica de 5, sacaré

ré primero su raiz con seis decimales, y es esta 1,709999; haré despues con el quebrado $\frac{1709999}{1000000}$ las mismas operaciones que si le quisiera abreviar. Despues echaré mano de los cocientes 1, 1, 2, 4, y haciendo con ellos lo propuesto (96 *f*), saco que la serie de los quebrados que mas se acercan á la raiz cúbica de 5 es $\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{12}{7}$, $\frac{53}{31}$, de los quales el último es un valor muy aproxîmado de $\sqrt[3]{5}$.

165 *b* Todo número cuya raiz cúbica se intenta sacar es considerado como un cubo; pero si no es cubo perfecto, es imposible hallar, á no ser por aproxîmacion, su raiz tercera. Podemos sin embargo señalar los límites que no pasa: la raiz cúbica de 45 v. gr. no es número alguno ni quebrado ni entero; pero sabemos que es mayor que 3 y menor que 4, por estar 45 entre los números cubos 27 y 64.

165 *c* Las raices cúbicas no cabales son tambien irracionales, y se señalan así $\sqrt[3]{}$, cuyo 3 significa raiz tercera; $\sqrt[3]{45}$ expresa la raiz cúbica de 45.

Despues de lo dicho acerca de las cantidades irracionales de segundo grado, es escusado detenernos á declarar como se aplica tambien el cálculo ô las de tercer grado. Con indicarlo bastará.

1.° $\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{5}$ es $\sqrt[3]{20}$; $\sqrt[3]{8} \times \sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{8 \times 3} = 2\sqrt[3]{3}$.

2.° $\frac{\sqrt[3]{20}}{\sqrt[3]{5}}$ es $\sqrt[3]{\frac{20}{5}}$ ó $\sqrt[3]{4}$.

3.° $\sqrt[3]{8 \cdot 3}$ es $2\sqrt[3]{3}$; $\sqrt[3]{64 \times 5}$ es $4\sqrt[3]{5}$.

De las Razones y Proporciones.

166 Llamamos *Razon* lo que resulta de la comparacion de dos cantidades.

167 Quando al comparar una con otra dos cantidades indagamos en quanto la una excede á la otra, ó esta á aquella, lo que sacamos es la diferencia de las dos cantidades, y se llama su *Razon arismética*. Si comparamos v. gr. 15 con 8 para averiguar su diferencia 7, este 7 es la razon arismética de 15 á 8.

Para señalar que se comparan dos cantidades con la mira de indagar su diferencia, se pone un punto entre las dos; por manera que 15 . 8 señala la razon arismética de 15 á 8.

168 Si en la comparacion de dos cantidades se lleva el fin de conocer las veces que la una cabe en la otra, ó esta en aquella, lo que sacamos se llama *Razon geométrica*. Si comparo v. gr. 12 con 3, para saber quantas veces 3 cabe en 12, el número 4 que saco es la razon geométrica de 12 á 3. Para señalar que se comparan dos cantidades con esta mira, se ponen dos puntos entre las dos; por manera que 12 : 3 v. gr. señala que se considera la razon geométrica de 12 á 3.

169 De las dos cantidades que se comparan, la primera se llama *antecedente*, y la segunda *consecuente*. En la razon 12 : 3, 12 es el antecedente, y 3 el consecuente; las dos cantidades juntas se llaman *los términos de la razon*.

Se

170 Se halla, pues, la razon arismética de dos cantidades solo con restar la menor de la mayor.

171 Y para hallar la razon geométrica de dos cantidades, se divide la una por la otra.

172 Valuaremos siempre esta razon dividiendo el antecedente por el consecuente; así la razon de 12 á 3 es 4, y la razon de 3 á 12 es $\frac{3}{12}$ ó $\frac{1}{4}$; esta última razon se llama *inversa* de la primera.

173 La razon arismética no se altera, quando á cada uno de sus dos términos se le añade ó quita una misma cantidad; porque la diferencia, en que consiste la razon, queda siempre la misma.

174 La razon geométrica no se altera quando se multiplican ó dividen sus dos términos por un mismo número; porque como la razon geométrica es (172) el cociente del antecedente partido por el consecuente, es una cantidad fraccionaria, cuyo valor no muda (70), aunque se multipliquen ó partan sus dos términos por un mismo número. *Así la razon* 3 : 12 *ó* $\frac{3}{12}$ *es la misma que* la de 6 : 24 ó $\frac{6}{24}$, que es la primera despues de multiplicados sus dos términos por 2; es tambien la misma que la de 1 : 4 ó $\frac{1}{4}$ que se saca dividiéndolos por 3.

175 Sirve esta propiedad para abreviar las razones. Si tuviera que averiguar v. gr. la razon de $6\frac{3}{4}$ á $10\frac{2}{3}$, diria, reduciendo cada término á quebrado, que dicha razon es la misma que la de $\frac{27}{4}$ á $\frac{32}{3}$, ó, reduciendo los dos quebrados al mismo denominador, la misma que la de $\frac{81}{12}$

á

á $\frac{128}{12}$, ó finalmente, suprimiendo el denominador 12 (que es lo mismo que si se multiplicasen por 12 los dos términos $\frac{81}{12}$, $\frac{128}{12}$ de la razon), la misma que la de 81 á 128, pues no hay duda en que 81 dozavos se han á 128 dozavos, como 81 unidades á 128 unidades.

176 Quando quatro cantidades son tales que la razon de las dos primeras es la misma que la de las dos últimas, decimos que las quatro cantidades forman una *proporcion*, cuya proporcion es *arismética* ó *geométrica*, segun sean arisméticas ó geométricas las razones iguales que la forman.

Las quatro cantidades 7, 9, 12, 14 forman una proporcion arismética, porque la diferencia de las dos primeras es la misma que la de las dos últimas. La proporcion arismética se señala así 7 . 9 : 12 . 14; quiero decir que se separan con un punto los dos términos de cada razon, y las dos razones con dos puntos. El punto que separa los dos términos de cada razon, significa *ó se lee es á* ó *se ha á*, y los dos puntos que separan las dos razones, significan *como*; por manera que lo proporcion escrita conforme hemos dicho se lee de este modo 7 *es á* 9 *como* 12 *es á* 14; ó 7 *se ha á* 9 *como* 12 *se ha á* 14.

Las quatro cantidades 3, 15, 4, 20 forman una proporcion geométrica; porque 3 cabe en 15 tantas veces quantas cabe 4 en 20. La proporcion geométrica se señala así 3 : 15 :: 4 : 20; quiero decir que se separan con dos puntos los dos términos de cada razon, y las dos

ra-

razones con quatro puntos. Los dos puntos significan lo mismo ó se leen del mismo modo que en la proporcion arismética, y los quatro puntos lo mismo que las dos de aquella, y se dice 3 *es á* 15 *como* 4 *es á* 20. No hay mas diferencia sino que, en la proporcion arismética, antes de la palabra *como* se añade la palabra *arisméticamente*.

177 El primero y el último término de la proporcion se llaman los *extremos*; el segundo y el tercero se llaman los *medios*. Como en toda proporcion hay dos razones, y por lo mismo dos antecedentes y dos consecuentes, se dice, en la primer razon, *primer antecedente*, *primer consecuente*; y en la segunda, *segundo antecedente*, *segundo consecuente*.

178 Quando los dos términos medios de una proporcion son iguales, la proporcion se llama *proporcion continua*; 3.7 : 7.11 es una proporcion arismética continua, se la señala de este modo ÷3.7.11; los dos puntos y la raya que están antes, sirven para avisar que al leer la proporcion debe repetirse el término medio que aquí es 7.

La proporcion 5 : 20 :: 20 : 80 es una proporcion geométrica continua, la qual, para abreviar, se señala de este modo ∺5 : 20 : 80; los quatro puntos y la raya sirven para lo mismo que en la proporcion arismética continua.

179 De lo que acabamos de decir acerca de las proporciones arisméticas y geométricas, se infiere 1.° que si á cada antecedente de una proporcion arismética se le añade ó quita la diferencia ó razon que tiene con su conse-

secuente, conforme aquel fuere mayor ó menor que este, cada antecedente será igual con su consecuente; porque entonces se le dá al término menor de cada razon lo que le falta para que sea igual con su correspondiente, ó se le quita al mayor el exceso que lleva á su correspondiente. Si en la proporcion 3.7 : 8.12 v. gr. añadimos la diferencia 4 al primer y tercer término, saldrá 7.7 : 12.12; bien se echa de ver que esto es general; 2.° si se multiplican por la razon ambos consecuentes de una proporcion geométrica quando son menores que sus antecedentes, cada uno será tambien igual con su antecedente; porque multiplicar el consecuente por la razon, es tomarse tantas veces quantas cabe en el antecedente. Si en la proporcion 12 : 3 :: 20 : 5, multiplico 3 y 5 cada uno por 4, saldrá 12 : 12 :: 20 : 20; la proporcion 15 : 9 :: 45 : 27 se transformará en 15 : 15 :: 45 : 45. Si multiplico 9 y 27 cada uno por la razon $\frac{15}{9}$ ó $\frac{5}{3}$.

Propiedades de las proporciones arisméticas.

180 La propiedad fundamental de la proporcion arismética es que la suma de los extremos es igual á la suma de los medios. En esta proporcion v. gr. 3.7 : 8.12, la suma de los extremos 3 y 12 es 15, y la de los medios 7 y 8 es tambien 15.

Hemos de probar que esta propiedad es general.

Si los dos primeros términos fuesen iguales uno con otro, y fuesen tambien iguales uno con otro los dos últimos, como

mo en esta proporcion 7.7 : 12.12, es patente que la suma de los medios sería igual con la de los extremos. Pero es muy facil dar esta forma á toda proporcion arismética (179) con añadir ó quitar á cada antecedente la razon, pues con esta adicion se aumentará igualmente la suma de los extremos y la de los medios, y no se alterará por consiguiente la igualdad de las dos sumas; por consiguiente, si son iguales despues de esta adicion, es porque yá lo eran antes.

181 De aquí se sigue, que como en la proporcion continua los dos términos medios son iguales, en toda proporcion continua la suma de los extremos es dupla del término medio, ó que el término medio es la mitad de la suma de los extremos. Para hallar, pues, un término medio arismético entre 7 y 15 v. gr. sumo 7 con 15, y la mitad de la suma 22, esto es 11 será el término medio, por manera que ÷7.11.15.

Propiedades de la proporcion geométrica.

182 La propiedad fundamental de la proporcion geométrica es que el producto de los extremos es igual al producto de los medios. En esta proporcion v.gr. 3:15::7:35, el producto de 35 por 3 y el de 15 por 7 son ambos 108. Hemos de demostrar que esta propiedad es general.

Si los antecedentes son iguales con sus consecuentes como en esta proporcion 3 : 3 :: 7 : 7, es patente que el producto de los extremos será igual al producto de los

me-

medios ; pero es muy facil dar esta forma á toda proporcion geométrica (179) con multiplicar ambos consecuentes por la razon. Verdad es que despues de esta multiplicacion el producto de los extremos será unas quantas veces mayor de lo que hubiera sido , ó unas quantas veces menor , si la razon fuese un quebrado ; pero tambien resultará la misma alteracion en el producto de los medios ; por consiguiente , si los dos productos son iguales uno con otro despues de la multiplicacion , es porque tambien lo eran antes.

Se puede , pues , tomar el producto de los medios por el de los extremos , y recíprocamente.

Luego en la proporcion continua el producto de los extremos es igual al quadrado del término medio , porque como los dos medios , ó son una misma cantidad , su producto es el quadrado del uno de los dos. Luego para hallar un medio geométrico entre dos números propuestos, se han de multiplicar uno por otro los dos números , y sacar despues la raiz quadrada del producto. Para hallar v. gr. un medio geométrico entre 4 y 9 , multiplico 4 por 9 , y la raiz quadrada 6 del producto 36 será el medio proporcional geométrico entre los dos números.

183 De la propiedad fundamental de la proporcion geométrica se infiere, que en conociendo los tres primeros términos de una proporcion , se determinará el quarto con multiplicar el segundo por el tercero , y partir el producto por el primero ; porque no hay duda (56) en que

si

si se parte el producto de los dos extremos por el primer término, saldrá el quarto término; y como el producto de los extremos es el mismo que el de los medios, saldrá tambien el quarto término si se parte el producto de los medios por el primer término.

Así, si se me pregunta v. gr. qual será el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros son 3 : 8 :: 12, multiplicaré 8 por 12, y saldrá 96, que partiré por 3, y el cociente 32 será el quarto término que se me pide; por manera que 3, 8, 12, 32 formarán una proporcion. Con efecto, la primer razon es $\frac{3}{8}$, y la segunda es $\frac{12}{32} = \frac{3}{8}$, despues de partir por 4 (71) los dos términos de $\frac{12}{32}$.

Por el mismo camino se hallará qualquier término de una proporcion, una vez que se conozcan tres. Si el término que se busca es uno de los extremos, se multiplicarán uno por otro los dos medios, y se partirá su producto por el otro extremo conocido. Si, al contrario, se busca uno de los medios, se multiplicarán uno por otro los dos extremos, y se partirá su producto por el medio conocido.

184 Esta propieded de ser igual el producto de los extremos al de los medios solo puede verificarse con quatro cantidades en proporcion geométrica. Porque si las quatro cantidades no estuviesen en proporcion geométrica, despues de multiplicar los consecuentes por la razon de las dos primeras, solo el primer antecedente sería igual

con

con su consecuente. Si tuviésemos v. gr. 3, 12, 5, 10, despues de multiplicar los consecuentes 12 y 10 por la razon de $\frac{1}{4}$ de los dos primeros términos 3 y 12, saldría 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$, donde es patente que el producto de los extremos no puede ser igual al de los medios; luego estos productos tampoco serian iguales, ann quando se multiplicasen los consecuentes por la razon de $\frac{1}{4}$. Esta demostracion se puede aplicar á todos los demas casos.

Luego, siempre que quatro términos sean tales que el producto de los extremos sea igual al de los medios, las quatro cantidades están en proporcion. De aquí inferiremos la segunda propiedad de la proporcion geométrica.

185 Si quatro cantidades están en proporcion, lo estarán igualmente, poniendo los extremos en lugar de los medios, y los medios en lugar de los extremos, cuya colocacion se llama *invertendo.*

186 Tambien subsistirá la proporcion si se muda el lugar de los extremos, ó el de los medios, cuya colocacion se llama *alternando.*

Porque en todos estos casos el producto de los extremos siempre será igual al de los medios.

En virtud de esta propiedad, la proporcion 3 : 8 :: 12 : 32 dará todas las proporciones siguientes solo con mudar el lugar de sus términos.

3 : 8 :: 12 : 32

3 : 12 :: 8 : 32 *alternando,*

32 : 12 :: 8 : 3 *invertendo,*

32

$32 : 8 :: 12 : 3$ *alternando*,
$8 : 3 :: 32 : 12$ *invertendo*,
$8 : 32 :: 3 : 12$ *alternando*,
$12 : 3 :: 32 : 8$ *invertendo*,
$12 : 32 :: 3 : 8$ *alternando*.

Lo mismo digo de otra qualquier proporcion.

187 Ya que se puede poner el tercer término en lugar del segundo, y recíprocamente, inferiremos que no se turba una proporcion, quando se multiplican ó parten sus dos antecedentes ó sus dos consecuentes por un mismo número; porque despues de dicha transposicion, los dos antecedentes de la proporcion dada formarán la primer razon, y los dos consecuentes la segunda. Por consiguiente multiplicar los dos antecedentes de la primer proporcion viene á ser entonces lo mismo que multiplicar ambos términos de una razon por un mismo número, lo que (174) no la muda. Puedo, pues, partir por 3 los dos antecedentes de la proporcion $3 : 7 :: 12 : 28$, y decir $1 : 7 :: 4 : 28$; porque puedo transformar la proporcion $3 : 7 :: 12 : 28$ (186) en $3 : 12 :: 7 : 28$; y dividiendo los dos términos de la primer razon por 3, saldrá $1 : 4 :: 7 : 28$ que (174) puedo transformar en $1 : 7 :: 4 : 28$.

188 Subsiste una proporcion quando se compara, en cada razon, el antecedente ó el consecuente con la suma del antecedente y del consecuente, esto se llama *componendo*, ó su diferencia, esto se llama *dividendo*.

V. gr. de la proporcion

$$12 : 3 :: 32 : 8$$

se pueden inferir las proporciones siguientes.

$12+3 : 3 :: 32+8 : 8$ *componendo*,

$12-3 : 3 :: 32-8 : 8$ *dividendo*.

$12+3 : 12 :: 32+8 : 32$ *componendo*,

$12-3 : 12 :: 32-8 : 32$ *dividendo*.

Porque quando se hace la comparacion con el consecuente se echa de ver que si le añadimos ó quitamos al antecedente cabrá aquel en este una vez mas ó una vez menos que antes; y como se hace lo mismo en la segunda razon, la qual, por la naturaleza de la proporcion, es igual con la primera, las dos nuevas razones serán tambien iguales una con otra.

Quando se hace la comparacion con el antecedente, se probará la proposicion del mismo modo, bastará figurarse que en la proporcion donde se hace esta mudanza, se ha puesto el antecedente de cada razon en lugar de su consecuente, y el consecuente en lugar del antecedente. Hemos visto (185) que esto se puede hacer.

189 Ya que poniendo el tercer término de una proporcion en lugar del segundo, y recíprocamente, subsiste todavía la proporcion (186), debe inferirse que los dos antecedentes caben uno en otro tantas veces, quantas los consecuentes caben uno en otro.

Luego en la suma de los dos antecedentes de toda proporcion cabe la suma de los dos consecuentes, ó esta

en

en aquella tantas veces quantas uno de los antecedentes cabe en su consecuente ó este en aquel.

V. gr. en la proporcion

12 : 3 :: 32 : 8

12 mas 32 : 3 mas 8 :: 32 : 8 en esto no hay duda; pero para probarlo en general, basta considerar que si en el primer antecedente cabe el segundo quatro veces v. gr. en la suma de los dos antecedentes cabrá el segundo cinco veces; y por la misma razon, en la suma de los consecuentes cabrá el segundo consecuente cinco veces. Luego la suma de los consecuentes cabrá en la de los antecedentes como el quíntuplo del uno de los consecuentes cabe en el quíntuplo de su antecedente; esto es como uno de los antecedentes cabe en su consecuente.

Del mismo modo se probará que la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente.

190 La proposicion que acabamos de demostrar viene á ser la misma que estotra. Si hay dos razones iguales v. gr.

la de 4 : 12
y la de 7 : 21

11 : 33

la misma razon subsistirá entre la suma de los dos antecedentes, y la suma de los dos consecuentes.

Luego, siempre que hubiere muchas razones iguales,

 la

la suma de todos los antecedentes será á la suma de todos los consecuentes, como uno de los antecedentes es á su consecuente. Si fuesen v. gr. las razones iguales $4 : 12 :: 7 : 21 :: 2 : 6$, podremos decir que $4+7+2 : 12+21+6 :: 4 : 12$ ó $:: 7 : 21$ &c.

Porque sumando unos con otros los antecedentes de las dos primeras razones, y tambien los consecuentes unos con otros, la razon entre las dos sumas, la qual, segun acabamos de probar, será la misma que cada una de las dos primeras, será tambien la misma que la tercera; por consiguiente se podrán sumar respectivamente los dos términos de esta con los de aquella, y resultará la misma razon, y así á este tenor.

191 De lo dicho (189 y 190) podemos inferir que en toda proporcion la suma de los antecedentes es á la suma de los consecuentes, como la diferencia de los antecedentes es á la diferencia de los consecuentes.

Ya que en la proporcion $48 : 16 :: 12 : 4$ v. gr. tenemos (190)

$$48+12 : 16+4 :: 12 : 4 \text{ y}$$
$$48-12 : 16-4 :: 12 : 4,$$

podemos inferir, por ser comun la razon de $12 : 4$, que

$$48+12 : 16+4 :: 48-12 : 16-4.$$

La misma demostracion se aplica á otra proporcion qualquiera.

192 Luego si en la última proporcion substituimos el tercer término en lugar del segundo, y el segundo en

lu-

lugar del tercero (186), probaremos facilmente que la suma de los antecedentes es á su diferencia, como la suma de los consecuentes es á su diferencia.

193 Si en la proporcion 48 : 16 :: 12 : 4 mudamos de lugar los medios, y sentamos 48 : 12 :: 16 : 4, y aplicamos á esta proporcion lo dicho poco ha (191), tendremos 48+16 : 12+4 :: 48—16 : 12—4, cuya proporcion comparada con estotra 48 : 16 :: 12 : 4, manifiesta que la suma de los dos primeros términos de una proporcion, es á la suma de los dos últimos, como la diferencia de los dos primeros es á la diferencia de los dos últimos; ó, con substituir el tercer término en lugar del segundo, y el segundo en lugar del tercero, la suma de los dos primeros términos es á su diferencia, como la suma de los dos últimos es á su diferencia.

194 La razon que resulta de multiplicar unos por otros los antecedentes de dos ó mas razones, y los consecuentes por los consecuentes se llama *razon compuesta*. Si hay v. gr. las dos razones 12 : 4 y 25 : 5, el producto de los dos antecedentes 12 y 25 será 300, el producto de los dos consecuentes 4 y 5 será 20; la razon de 300 á 20 se llamará razon compuesta de la de 12 á 4 y de la de 25 á 5.

195 Esta razon es la misma que la que resulta de valuar separadamente cada una de las razones componentes, y multiplicar despues unos por otros los números que expresan dichas razones, cuyos números se llaman *sus ex-*

ponentes. Con efecto la razon de 12 á 4 es 3, y la de 25 á 5 es 5; pero 3 veces 5 son 15, razon de 300 á 20. Esto es general, porque la medida de la razon (172) es un quebrado cuyo numerador es el antecedente, y el consecuente su denominador. Es, pues, preciso que la razon compuesta sea un quebrado cuyo numerador ha de ser el producto de los dos antecedentes, y el denominador el producto de los dos consecuentes: es, pues, la razon compuesta (88) el producto de dos quebrados que expresan las razones componentes.

196 Quando las razones que se multiplican son iguales, la razon compuesta se llama *razon duplicada*, si son dos no mas las componentes; quando las razones componentes son tres, la compuesta se llama *triplicada*; si son quatro, *quadruplicada*, &c.

Si multiplicamos v. gr. la razon de 2 á 3 por la de 4 á 6, iguales una con otra, saldrá la razon compuesta 8 : 18, y será la razon duplicada de 2 á 3 ó de 4 á 6.

197 Quando se multiplican ordenadamente dos proporciones, esto es, el primer término de la una por el primer término de la otra, el segundo por el segundo, y así prosiguiendo, los quatro productos estarán tambien en proporcion.

Porque quando se multiplican así dos proporciones, se multiplican dos razones iguales por dos razones iguales (176); luego las dos razones compuestas que re-

sul-

sultan serán iguales ; luego los quatro productos estarán en proporcion (176).

198 Inferiremos de aquí que los quadrados, los cubos, y en general las potencias de un mismo nombre de quatro cantidades en proporcion, estan tambien en proporcion ; porque para formar estas potencias no se hace otra cosa sino multiplicar muchas veces de seguida la proporcion por ella misma.

199 Las raices quadradas, cúbicas, y en general las raices de un mismo nombre de quatro cantidades en proporcion, están tambien en proporcion ; porque la razon de las raices quadradas de los dos primeros términos no es otra cosa que la raiz quadrada de la razon de dichos dos términos ; lo mismo digo de la razon de las raices quadradas de los dos últimos términos ; luego, ya que suponemos iguales las dos razones primitivas, sus raices quadradas son iguales ; luego la razon de las raices quadradas de los dos primeros términos será igual á la razon de las raices quadradas de los dos últimos. Del mismo modo se probará la proposicion respecto de las raices cúbicas, quartas, &c.

200 Quando una razon se compone del producto de otras muchas razones, se puede substituir en lugar de una de las razones componentes una razon expresada con otros términos, con tal que entre estos haya la misma razon que entre aquellos en cuyo lugar se substituyen.

En la razon $6 \times 10 : 2 \times 5$ v. gr. podremos subs-

tituir 3 y 1, en lugar de los factores 6 y 2, lo que dará la razon compuesta $3 \times 10 : 1 \times 5$. Porque ya que $6 : 2 :: 3 : 1$, podremos, sin que por esto se altere la proporcion (187), multiplicar los antecedentes por 10 y los consecuentes por 5; de donde saldrá $6 \times 10 : 2 \times 5 :: 3 \times 10 : 1 \times 5$. La proposicion se probará del mismo modo respecto de otra proporcion qualquiera.

201 Si dos ó mas proporciones son tales que en la primer razon de la una el antecedente sea igual al consecuente de la otra, quando se hubieren de multiplicar ordenadamente dichas proporciones, se podrán omitir los términos que fueren comunes al antecedente y al consecuente. Si las dos proporciones fuesen v. gr.

$$\begin{array}{l} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ \hline \end{array}$$

Podremos decir $6 : 3 :: 12 \times 20 : 8 \times 15$

Porque aunque se dexara el multiplicador comun 4, la razon que entonces sería la de 6×4 á 4×3, sería la misma que la de 6 á 3 (174), y es la que queda despues de borrado dicho factor comun.

Lo propio digo si las razones fuesen

$$\begin{array}{l} 6 : 4 :: 12 : 8 \\ 4 : 3 :: 20 : 15 \\ 3 : 7 :: 21 : 49 \\ \hline 6 : 7 :: 12 \times 20 \times 21 : 8 \times 15 \times 49 \end{array}$$

Al-

Algunos usos de las proposiciones antecedentes.

202 Las proposiciones que acabamos de demostrar son de un uso continuo en todos los ramos de la Matemática; pero sirven particularmente para la resolucion de varias cuestiones que á cada paso se ofrecen en el trato humano. Manifestarémos por lo mismo como se resuelven, variando los exemplos para facilitar la inteligencia de esta aplicacion.

De la Regla de Tres.

203 La primer regla que se funda en la doctrina hasta aquí enseñada de las razones y proporciones, es la que todos llaman *Regla de Tres* ó *Regla de Oro* por causa de su excelencia y uso continuo. Aunque hay varias reglas de tres, el fin de todas es hallar el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son conocidos.

Quando no son mas que tres las cantidades conocidas, la Regla se llama *Regla de Tres simple*; quando las cantidades conocidas son mas de tres, y concurren ciertas circunstancias que luego dirémos, la Regla se llama *Regla de Tres compuesta.*

Regla de Tres simple.

203 *a* Segun el orden por el qual se ha de sacar la cantidad que se busca, muda tambien de nombre esta regla, y se llama Regla de Tres *directa* ó Regla de Tres *inversa.* Porque las preguntas suelen ser tales, que en unas,

de

de lo mas hemos de sacar lo mas, ó de lo menos lo menos, y estas se responden por la regla de tres directa; en otras preguntas, de lo menos hemos de sacar lo mas, ó de lo mas lo menos, y estas se responden por la regla de tres inversa.

203 *b* A fin de hacer muy perceptible esta diferencia, que suele ser un escollo para los principiantes, conviene saber que de las quatro cantidades que entran en una regla de tres, dos son de un mismo nombre ó especie, y las otras dos tambien de un mismo nombre ó especie, bien que diferentes de las dos primeras, con las quales son correlativas. Un caso práctico nos guiará mejor en la declaracion de este punto.

Sé que tres hombres han hecho 14 varas de obra en 12 dias, y quiero saber quanta obra harán 15 hombres trabajando otros tantos dias, y siendo iguales todas las demas circunstancias, como que sea la obra de una misma calidad, sean los 15 hombres igualmente trabajadores que los 3, y trabajen un mismo número de horas al dia, &c.

Las cantidades de un mismo nombre son aquí 3 hombres y 15 hombres; las 14 varas de obra que han hecho los primeros, y las que harán los otros son las otras dos cantidades de un mismo nombre, correlativas, como se vé, con las primeras, bien que de diferente especie. Se viene á los ojos que así como 15 hombres son mas que 3 hombres, tambien los primeros harán mas varas de obra en igualdad de circunstancias: ó que en la mis-

ma

ma razon que 3 es menor que 15, el número 14 de varas que han hecho los primeros será menor que el número de varas que trabajarán los otros. Vamos por consiguiente aquí de lo mas á lo mas, esto es de mas hombres á mas varas, y por consiguiente la regla de tres es directa. Esto supuesto,

Cuestion. *Si 40 hombres hacen en cierto tiempo 268 varas de obra ¿quanta obra harán 60 hombres en el mismo tiempo?*

Las cantidades de un mismo nombre son aquí 40^h y 60^h, y como estos son mas que aquellos, tambien el número de varas que trabajarán será mayor que el número de varas que han trabajado los primeros. Vamos por lo mismo de lo mas á lo mas, esto es de mas hombres á mas varas, por cuyo motivo la regla es directa. Pongo las tres cantidades en proporcion

$$40^h : 60^h :: 268^v :$$

partiendo ambos términos de la primer razon por su máximo comun divisor 20, lo que no altera la razon (174), y debe practicarse siempre que se pueda, por lo mucho que simplifica la operacion

$$2^h : 3^h :: 268^v :$$

Multiplico por lo dicho (182 y 183) 268 por 3; el producto 804 le parto por 2, y sale al cociente 402, número de varas que trabajarán los 60 hombres.

203 *c* La práctica de esta regla se abrevia mucho dividiendo los dos términos de la primer razon por el prime-

mero, y multiplicando el tercero por el cociente que dá la division del segundo; claro está que el quarto término que se busca será el producto del tercer término de la proporcion por el cociente de esta division, sin necesidad de partirle por el primer término, el qual será la unidad. En el caso propuesto, los términos son

$$2 : 3 :: 268 :$$

partiendo 2 y 3 por 2, sale 1 : 1,5 :: 268. La regla manda que multiplique 268 por 1,5, y parte el producto por 1; cuya division es escusada. Claro está que $268 \times 1{,}5 = 402$ como antes.

La razon de esta práctica es muy patente; porque los dos primeros términos despues de divididos por el primero, tienen uno con otro la misma razon que antes.

Cuestion. *Un caminante ha andado 34 leguas en 6 dias ¿en quantos dias andará 255 leguas?*

Una vez que ha de andar mas leguas, gastará mas dias; luego vamos de mas leguas á mas dias, y la regla es directa. Las dos cantidades de un mismo nombre son 34 leguas y 255 leguas, y las tres conocidas se hán de poner en proporcion como se sigue

$$34^{l} : 255^{l} :: 6^{d} :$$

Multiplicando 255 por 6, y partiendo el producto 1530 por 34, el cociente 45 leguas satisfará la pregunta.

De la Regla de Tres inversa.

204 En la regla de tres inversa vamos, segun queda

da insinuado, de lo mas á lo menos, ó de lo menos á lo mas. Supongamos que se me haga esta pregunta: 16 *hombres han hecho diez varas de obra en 8 dias ¿quantos hombres harán la misma obra en 4 dias?* Es patente que pues la misma obra se ha de hacer en menos dias, habrán de trabajar mas hombres. Luego aquí vamos de lo menos á lo mas, esto es de menos dias á mas hombres, y por lo mismo es inversa la regla. Las tres cantidades conocidas son 16 horas, 8 dias, 4 dias, y no podemos decir: como 8 dias son mas que 4 dias, y así 16 hombres son mas que los que saldrán, antes ha de ser todo al reves. Pero como el número de hombres que buscamos ha de ser mayor que el conocido, y es el segundo consecuente, dispondremos las otras dos cantidades de un mismo nombre, de modo que la menor ocupe el primer lugar, y tendremos $4^d : 8^d :: 16^h$: lo que salga. El quarto término se sacará por el mismo método que antes; partirémos 128, producto de 16 por 8, por el primer término 4, y el cociente 32 será el número de hombres pedido.

Cuestion. *Un navio que no tiene bastimentos mas que para 15 dias, ha de navegar 20 dias, claro está que ha de gastar menos víveres cada dia ¿á quanto se ha de reducir el consumo total diario?*

Llamaremos 1 el consumo total, y este sería con efecto el consumo diario, si la navegacion no hubiese de durar mas que 15 dias; pero como ha de durar mas, el consumo diario ha de ser menos; vamos, pues, de lo mas

á

á lo menos ; la regla es por lo mismo inversa , y sus dos cantidades de un mismo nombre son 15 dias y 20 dias, que con la otra conocida se han de poner en proporcion como sigue $20 : 15 :: 1 :$ ó por lo dicho (174)

$$4 : 3 :: 1 : \frac{1 \times 3}{4} = \frac{3}{4}.$$

Es pues necesario gastar cada dia las tres quartas partes de los víveres que se hubieran gastado , si la navegacion no hubiese de durar cinco dias mas.

Cuestion. *En una plaza sitiada hay 800 soldados con víveres para dos meses no mas ¿quantos soldados han de salir de la plaza para que los víveres duren 5 meses ?*

En sabiendo quantos soldados gastarán los víveres en 5 meses , rebaxaremos de 800 su número , y los restantes serán los que habrán de salir de la plaza. Bien se percibe que esta cuestion discrepa poco de la última.

Ya que los víveres han de durar 5 meses , los soldados han de ser menos , como 5 es mayor que 2. Digo , pues, $5^{m} : 2^{m} :: 800^{s} : 320^{s}$

Rebaxo 320 de 800 , y la resta 480 expresa los soldados que han de salir de la plaza.

Cuestion. *Si quatro quartos de pan candial han de pesar 8 onzas quando el trigo está á 28 reales la fanega ¿quanto habrán de pesar en estando el trigo á 22 reales la fanega ?*

Es natural que quando el trigo vale mas barato ó cuesta menos , por los 4 quartos se dé mas pan ; vamos, pues de lo menos á lo mas ; por lo que dispondremos

las

las cantidades como sigue.

$$22^{rs} : 28^{rs} :: 8^{o} : 10\tfrac{2}{11} \text{ onzas.}$$

Cuestion. *Quantas varas de coton de* $1\frac{1}{4}$ *varas de ancho se necesitan para colgar un lienzo de pared que tiene* 3 *varas y media de ancho, y* 10 *varas de alto?*

Se necesita mas coton á proporcion de lo que tiene menos de ancho que el lienzo de pared; vamos, pues, de lo menos á lo mas. Las dos cantidades de un mismo nombre son $1\frac{1}{4}$ vara y $3\frac{1}{2}$ vara, luego las tres cantidades conocidas se dispondrán como sigue.

$$1\tfrac{1}{4}^{v} : 3\tfrac{1}{2} :: 10 \quad 6$$
$$\tfrac{5}{4} : \tfrac{7}{2} :: 10 \quad 6$$
$$10 : 28 :: 10 : \tfrac{28 \times 10}{10} = 28.$$

se necesitarán 28 varas de coton.

Cuestion. *Pedro pide prestados á Juan* 250 *pesos por* 6 *meses de tiempo, obligándose á pagar por ellos cada mes un interes estipulado que no paga. Llega el caso de pedir prestados Juan á Pedro* 400 *pesos al mismo interes mensual, que no pagará para cobrarse del interes que le quedó debiendo Pedro: ¿quantos meses han de quedar los* 400 *pesos en poder de Juan, para cobrarse de lo que Pedro debe?*

El tiempo que buscamos ha de ser menos de 6 meses en la misma proporcion que 400 pesos son mas que 250; es, pues, inversa la regla. Por lo mismo dispongo las cantidades como sigue.

$$400^{pe} : 250^{pe} :: 6^{m} : 3^{m}\,7\tfrac{1}{2}^{d}.$$

De

De la Regla de Tres compuesta.

205 En la regla de tres simple, directa ó inversa, se halla la cantidad desconocida por medio de una sola proporcion; para sacarla por una regla de tres compuesta; es preciso hacer dos proporciones, siendo en muchos casos directa la una, é inversa la otra.

Cuestion. *Si 30 hombres han hecho 132 varas de obra en 18 dias ¿quanta obra harán 54 hombres en 28 dias?*

Busco primero que obra harán los 54 hombres en 18 dias, diciendo, como lo dá bastante á conocer la disposicion de las cantidades

$$30^{h} : 54^{h} :: 132^{v} : 237{,}6^{v}$$

si 30 hombres hacen 132 varas en 18 dias ¿quantas varas harán 54 hombres en el mismo tiempo? ya que son mas hombres, harán mas varas, y saco que harán 237,6 varas.

Ahora bien; ya que en 18 dias los 54 hombres hacen 237,6 varas de obra, en 28 dias harán mas. Dispongo, pues, las cantidades conocidas como sigue

$$18^{d} : 28^{d} :: 237{,}6^{v} : 369{,}6^{v}.$$

Luego los 54 hombres trabajando 28 dias harán 369,6 varas de obra. En esta pregunta ambas proporciones son directas.

Cuestion. *Si el porte de 15 arrobas de peso á la distancia de 134 leguas cuesta 180 reales ¿quanto costará el porte de 22 arrobas á la distancia de 12 leguas, pagando lo mismo por arroba?*

Bus-

Busco primero quanto costará el porte de las 22 arrobas á la distancia de 134 leguas, en el supuesto de que el porte de las 15 arrobas cueste 180 reales.

$$15^{ar} : 22^{ar} :: 180^{rs} : 264^{rs}.$$

Despues digo: como 12 leguas son menos que 134 leguas, tambien las 22 arrobas han de costar menos de 264 reales. Dispongo los términos de la proporcion como aquí se vé

$$134^{l} : 12^{l} :: 264^{rs} : 23{,}64^{rs} = 23^{rs}, 22^{mrs}.$$

Cuestion. *Si* 100 *pesos ganan* 6 *pesos de interes en un año ó* 12 *meses ¿que ganancia darán* 300 *pesos en* 9 *meses, pagando lo mismo por ciento?*

Busco primero el interes que darán en un año los 300 pesos, en el supuesto de dar 6 de interes los 100;

$$100^{p} : 300^{p} :: 6^{i} : 18^{i},$$

y hallo que dán 18 pesos.

Ahora buscaré el interés que darán los 300 pesos en 9 meses, supuesto que en un año dan 18 pesos. Claro está que así como 9 meses son menos que 12, el interes de los 9 meses será tambien menos

$$12^{m} : 9^{m} :: 18^{pe} : 13^{pe}, 5.$$

Cuestion. *Un hombre que camina* 7 *horas al dia, gasta* 30 *dias en andar* 230 *leguas ¿quantos dias gastará en andar* 600 *leguas, caminando* 10 *horas al dia?*

Veamos primero que dias gastará en andar las 600 leguas caminando 7 horas al dia; para lo qual reparo que si entonces gasta 30 dias para andar las 230 leguas,

para andar las 600 leguas gastará mas dias. Digo, pues,

$$230^{l} : 600^{l} :: 30^{d} : 78{,}261^{d}.$$

Pero como el caminante al andar las 600 leguas camina mas horas al dia, tardará menos dias en la razon que 10 es mayor que 7; por lo mismo

$$10^{h} : 7^{h} :: 78{,}261^{d} : 54{,}731^{d}.$$

Cuestion. *Si 15 mulas consumen 6 fanegas de cebada en 8 dias ¿en quantos dias consumirán 16 mulas 21 fanegas, dándoles el mismo pienso?*

Busco primero en quanto tiempo las 15 mulas consumirán las 21 fanegas.

$$6^{f} : 21^{f} :: 8^{d} : 28^{d}.$$

se las comerán en 28 dias.

Ahora considero que como 16 mulas son mas que 15, aquellas consumirán en menos dias las 21 fanegas; es, pues, inversa la segunda proporcion, y digo

$$16^{mul} : 15^{mul} :: 28^{d} : 26{,}25^{d}.$$

Cuestion. *¿Qual es el capital que en 8 meses dará 20 de ganancia, á razon de 6 por ciento al año?*

Busco primero que ganancia darán 100 pesos en 8 meses.

$$12^{m} : 8^{m} :: 6 : \frac{6\times 4}{12} = 4.$$

Considerando ahora que el interes ha de ser menos en la razon que 8 meses son menos que 12 meses, dispongo los términos del modo siguiente.

$$4^{int} : 20^{int} :: 100 : \frac{100\times 20}{4} = 500,$$

lo que manifiesta que el capital ha de ser de 500 pesos.

De

De la Regla de Compañía.

206 La regla de compañía sirve para averiguar la parte que le toca de las pérdidas ó ganancias á cada uno de muchos compañeros que han juntado sus caudales para alguna especulacion de comercio, á proporcion de la puesta ó del caudal de cada uno.

La regla de compañía puede ser simple y compuesta. Quando las puestas de todos los compañeros permanecen el mismo tiempo en el caudal ó puesta comun, la regla se llama *regla de compañía simple ó sin tiempo*. Claro está que para hallar la parte que á cada compañero toca de las pérdidas ó ganancias de la compañía, hemos de comparar la suma de todos los caudales ó puestas particulares, cuya suma es el caudal de la compañía, con el total de la ganancia ó pérdida; pues no hay duda que el caudal de la compañía es respecto de todo lo que ha ganado ó perdido, lo mismo que la puesta de cada compañero es respecto de la parte que le cabe en lo que se ha ganado ó perdido, ó, lo que es lo propio, lo que sea cada puesta particular en la suma de las puestas, ha de ser cada ganancia ó pérdida particular en el total de las ganancias ó pérdidas.

Todo esto bien entendido, qualquiera se hará cargo de que una regla de compañía es lo mismo que una regla de tres, sin mas diferencia sino que en la práctica de la regla de compañía se hacen tantas reglas de tres quantos son los compañeros.

En muchas ocasiones no quedan un mismo tiempo en el caudal comun los caudales particulares, entonces las ganancias ó pérdidas de la compañía se han de repartir con razon al caudal de cada compañero, y al tiempo que permanece en el caudal comun; y porque se ha de atender á estas dos circunstancias, la regla se llama *regla de compañía con tiempo.*

Para practicar esta regla se multiplica cada puesta por el tiempo que permanece en el fondo comun; despues se suman los productos, se comparan con las ganancias ó pérdidas, y finalmente se concluye la operacion del mismo modo que quando la regla es sin tiempo.

Cuestion I. *Tres mercaderes han formado una compañía cuyo caudal es de 96 pesos; la puesta del primero es de 24 pesos, la del segundo es de 32 pesos, y la del tercero es de 40 pesos; las ganancias de la compañía ascienden á 12 pesos ¿que parte de esta ganancia corresponde á cada compañero?*

Diré la suma 96 de las puestas es á la suma 12 de las ganancias, como la puesta de cada mercader es á la parte que le toca de las ganancias, y dispondré los términos como aquí se vé

$$96 : 12 :: \begin{cases} 24 : R = \frac{24 \times 12}{96} = 3 \\ 32 : R = \frac{32 \times 12}{96} = 4 \\ 40 : R = \frac{40 \times 12}{96} = 5 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 12 \quad}$$

son

son, pues, aquí tres las reglas de tres, así como son tres los compañeros. Por la primera le tocan al primero 3 pesos de la ganancia, por la segunda al segundo le tocan 4 pesos; por la tercera le tocan al tercero 5 pesos, cuyas partes componen 12 pesos, ganancia total, y esta es la prueba de la operacion; quiero decir, que la suma de lo que toca á los compañeros ha de ser igual á toda la pérdida ó ganancia.

Cuestion II. *Tres negociantes envian á América una embarcacion cargada de 248 pipas de vino; las 98 pipas son del primero; las 86 del segundo; y las 64 del tercero. Padece la nave en la travesía una tormenta que precisa echar al agua, para alijarla, 93 pipas ¿que parte toca de la pérdida á cada negociante?*

Atendiendo á los términos de la pregunta, las cantidades se disponen como aquí se vé.

$$248 : 93 :: \begin{cases} 98 : R = \frac{98 \times 93}{248} = 36\frac{3}{4} \\ 86 : R = \frac{86 \times 93}{248} = 32\frac{1}{4} \\ 64 : R = \frac{64 \times 93}{248} = 24 \end{cases}$$

$$\overline{92\frac{4}{4}}$$

$$\overline{93}$$

Cuestion III. *Un hombre se pone á comerciar con 100 pesos, y tres meses despues forma, para el mismo comercio, compañía con un amigo suyo, quien pone otros 100 pesos. Al cabo de tres meses ajustan cuentas, y hallan que han ganado 21 pesos ¿que parte de esta ganancia toca á cada uno?*

Se vé á las claras que la puesta del primer compañero ha estado 6 meses en el caudal comun, y la del segundo 3 meses no mas. Multiplico, pues, la una puesta por 3, y saco 300; multiplico la otra por 6, y saco 600, la suma de los dos productos es 900, por consiguiente digo

$$900 : 21 :: \begin{cases} 300 : R = \frac{300 \times 21}{900} = 7 \\ 600 : R = \frac{600 \times 21}{900} = 14 \end{cases}$$

$$\overline{\quad 21 \quad}$$

Cuestion IV. *Tres mercaderes forman una compañía, poniendo el primero* 65 *pesos que están* 8 *meses en el caudal comun; el segundo pone* 78 *pesos, que están* 12 *meses; y el tercero* 84 *pesos, que están* 6 *meses. Las ganancias ascienden á* 166 *pesos ¿que parte toca á cada compañero á proporcion de su puesta y del tiempo que ha estado en el caudal de la compañia?*

Ya se vé que la puesta del primero se ha de multiplicar por 8, la del segundo por 12, y la del tercero por 6, con lo que serán respectivamente 520, 936, y 504, y su suma será 1960. Diciendo, pues, la suma de las puestas 1960 es á toda la ganancia 166, como cada puesta es á la parte que le toca, los términos de la regla se sentarán como sigue

$$1960 : 166 :: \begin{cases} 520 : R = \frac{500 \times 166}{1960} = 44\frac{10}{245} \\ 936 : R = \frac{936 \times 166}{1960} = 79\frac{67}{245} \\ 504 : R = \frac{504 \times 166}{1960} = 42\frac{168}{245} \end{cases}$$

$$\overline{\quad 166 \quad}$$

De

De la Regla de Aligacion.

207 Consiste la regla de aligacion en hallar el precio medio de la mezcla de muchas cosas diferentes, con tal que se sepa el número y el precio de cada una; ó en averiguar en que proporcion se han de mezclar dichas cosas, una vez que se conoce su precio, y el precio medio á que se han de vender.

Caso I. *¿A como se ha de vender el marco de una mezcla hecha con 6 marcos de plata de á 200 rs. cada uno, y con 12 marcos de á 144 rs. de modo que ni se gane, ni se pierda?*

Multiplíquese cada porcion de la mezcla por su precio respectivo, y divídase la suma de los productos por la suma de las cantidades que se quieren mezclar; el cociente será el precio medio.

$$6 \times 200 = 1200 \qquad \frac{2928}{18} = 162\tfrac{2}{3} \text{ precio medio.}$$
$$12 \times 144 = 1728$$
$$\overline{2928}$$

Fúndase este método en la proporcion siguiente: la suma de los marcos es á la de su precio, como un marco de la mezcla es al precio medio. De cuya proporcion sale que

$$18 : 2928 :: 1 : \frac{2928}{18} = 162\tfrac{2}{3}.$$

Se comprueba este primer caso de la regla de aligacion, valuando toda la mezcla al precio medio; su valor ha de ser igual á la suma de los valores particulares.

Caso II. Aunque se conozca el precio medio, y el

de cada parte de la mezcla, puede suceder 1.° que no sea determinada ninguna de las cantidades que han de entrar en la mezcla; 2.° que lo sea una de ellas; 3. que esté ceñida la cuestion á una cantidad determinada de mezcla. Con los exemplos nos darémos mejor á entender.

1.° *Un vinatero quiere mezclar vino de á 15 rs. la arroba con vino de á 8 rs. para hacer una mezcla que pueda vender á 12 rs. la arroba; ¿que porcion necesita de cada uno de los dos vinos para hacer la mezcla que desea?*

Siento los tres precios como sigue

$$12 : \begin{cases} 15 \;..\; 4 \\ 8 \;..\; 3 \end{cases}$$

enfrente del 8 escribo la diferencia 3 que vá de 12 á 15, y enfrente de 15 la diferencia 4 que vá de 12 á 8, é infiero que 3 arrobas de vino de á 8 rs. mezcladas con 4 arrobas de vino de á 15, darán un vino de á 12 rs. la arroba. Esto es evidente por la compensacion de los dos precios, el uno mayor y el otro menor que el precio medio.

208 Pero no se debe inferir de esta compensacion, que sean 4 y 3 los únicos números que resuelvan la cuestion. La pregunta es de tal naturaleza que admite una infinidad de respuestas, aunque se pidan números enteros. Para hallarlas, basta tomar dos números que tengan uno con otro la misma razon que 4 y 3, para cuyo fin basta duplicarlos, triplicarlos, &c.

209 Si la mezcla se hubiera de hacer con vino de á 15, de á 10, y de á 8, para que saliera un vino de á

12,

12, se practicaría lo propio con poca diferencia. Quiero decir que despues de comparar 15 y 8 con el precio medio 12, y de escritas recíprocamente las diferencias 3 y 4, se compararía 15 y 10 con el precio medio 12, y se sentarían tambien recíprocamente sus diferencias 3 y 2. Véase el exemplo:

$$12 : \left\{\begin{array}{l} 15 \;..\; 4 \;..\; 2 = 6 \\ 10 \;..\; 3 \\ \;\;8 \;..\; 3 \\ \hline \;\;\;\;\;\;\;\; 12 \end{array}\right.$$

Por consiguiente con 6 arrobas de vino de á 15 rs. 3 arrobas de á 10, y 3 arrobas de á 8, se harian 12 arrobas de á 12. La razon se percibe facilmente.

Si se hubiera de hacer la mezcla con quatro, cinco ú seis especies de vino de distinto precio, se compararían succesivamente dos á dos con el precio medio, poniendo cuidado en no comparar cada vez sino dos precios el uno mayor, y el otro menor que el precio medio.

2.° *Un panadero ha determinado hacer en un año de escasez pan con cebada, centeno y trigo, y venderle á 7 quartos, ú 28 mrs. la libra. Tiene 8 celemines y medio de trigo, con los quales haria pan de á nueve quartos la libra. El pan hecho con centeno solo le saldria á 4 quartos 2 mrs, y el que haria con cebada le vendria á salir á 2 quartos, y 1 mri. Se pregunta ¿qué porcion de centeno y de cebada ha de mezclar con los 8 celemines y medio de*

tri-

trigo para sacar un pan que le salga á 7 quartos la libra?

$$28 : \begin{cases} 36 \,..\, 19 \,..\, 10 \\ 18 \,..\, 8 \\ 9 \,..\, 8 \end{cases}$$

El precio medio es en este caso 28 mrs: saco la diferencia que hay entre este precio y los demas, como en el exemplo antecedente, y digo:

Para hacer pan de á 7 quartos la libra con los precios señalados, se podrian tomar 29 celemines de trigo, y mezclarlos con 8 celemines de centeno y 8 de cebada. Pero como es determinada la cantidad de trigo que tiene el panadero, es evidente que si con 29 celemines de trigo se necesitan 8 de centeno y 8 de cebada, para $8\frac{1}{2}$ celemines de trigo se necesitará una cantidad proporcional de los demas granos, que determinaré executando la siguiente regla de tres:

$29 : 8\frac{1}{2} :: 8 : \frac{(8\frac{1}{2})\times 8}{29} = \frac{68}{29} = 2\frac{10}{29}$ celemines de centeno, y otros tantos de cebada.

Lo propio se practicaría aun quando fuese mayor el número de las cosas que se hubiesen de mezclar una vez que se conoce su precio, y la cantidad de una de ellas.

3.° *Hay café de tres precios: el uno cuesta* 10 *rs. la libra, el otro* 7, *y el otro* 3 *rs. Se pregunta ¿cómo se han de mezclar para que salga una porcion de* 64 *libras que se pueda vender á* 8 *rs?*

Tómense las diferencias, como antes, y despues de sumadas, dígase: la suma de las diferencias es á la canti-

tidad de la mezcla, como cada diferencia particular es á la cantidad que de ella ha de entrar en la mezcla.

$$8\begin{cases} 10 \;..\; 5 \;..\; 1 \\ 7 \;..\; 2 \\ 3 \;..\; 2 \end{cases}$$

$10 : 64 :: 6 : \frac{64 \times 6}{10} = 38\frac{2}{5}$ lib. del de á 10 rs.

$10 : 64 :: 2 : \frac{64 \times 2}{10} = 12\frac{4}{5}$ lib. del de á 7 y del de á 3.

De la Regla de Falsa posicion.

210 Sirve la regla de falsa posicion para hallar un número incógnito por medio de un número supuesto. Supongamos v. gr. que se nos pida un número tal que su mitad, su quarto y su quinto compongan 456.

Supondremos que dicho número es 20; y aunque la mitad, el quarto y el quinto de 20 no componen mas que 19, no por eso dexará de ayudarnos para hallar el número que buscamos. Porque una vez que dos cantidades tienen la misma razon que sus partes semejantes, se puede considerar la una como la suma de los antecedentes de una serie de términos proporcionales, y la otra como la suma de los consecuentes. Pero dichas dos sumas son una con otra (190) como un número qualquiera de antecedentes es al mismo número de consecuentes, y recíprocamente; luego la mitad mas el quarto mas el quinto de 20, son á la mitad mas el quarto mas el quinto del número

que

que buscamos, como el mismo número 20 es al número que se busca. Tenemos, pues,

$$19 : 456 :: 20 : \frac{456 \times 20}{19} = 480.$$

Tres negociantes han perdido 2400 pesos en una empresa, cuya pérdida se debe repartir entre ellos en razon de las puestas de cada uno. Las puestas son tales que el primero puso tanto como los otros dos juntos, y el segundo puso el duplo de la puesta del tercero. Se pregunta ¿que parte le toca á cada uno de la pérdida?

Si suponemos que el tercero puso 3 pesos, la puesta del segundo será 6 pesos, y la del primero 9. En virtud de esto, dirémos: la suma 18 de las puestas es á la pérdida total 2400, como la puesta de cada uno es á la porcion que le toca de la pérdida; esto es,

$$18 : 2400, \text{ ó } 3 : 400 :: \begin{cases} 3 : \frac{400 \times 3}{3} = 400 \\ 6 : \frac{400 \times 6}{3} = 800 \\ 9 : \frac{400 \times 9}{3} = 1200. \end{cases}$$

Tambien hubiéramos sacado el mismo resultado con otra infinidad de números formados con las mismas condiciones que 18.

¿Quanto tiempo sería menester para llenar un estanque, abriendo á un tiempo quatro caños, el primero de los quales le llenaría en 2 horas, el segundo en 3, el tercero en 5, y el quarto en 6?

Supongamos que sea menester una hora, y veamos si se llenaría el estanque. Es evidente que en este intervalo el primer caño llenaría la mitad, el segundo la tercera par-

te &c. y que de este modo los quatro á un tiempo llenarian en una hora los $\frac{36}{30}$ ó los $\frac{6}{5}$ del estanque. No se necesita, pues, una hora. Para determinar á punto fixo el tiempo que es menester, dirémos

$$\tfrac{6}{5} : \tfrac{5}{5} \text{ ó } 6 : 5 :: 1^{h} : \tfrac{5}{6} = 50'.$$

De la Progresion arismética.

211 La progresion arismética es una serie ó continuacion de términos, que cada uno lleva al que le precede ó sigue el mismo exceso, v. gr.

$\div 1 . 4 . 7 . 10 . 13 . 16 . 19 . 22 . 25$ &c.

es una progresion arismética, porque cada término lleva al que le precede un mismo exceso que es 3.

La raya con dos puntos, uno encima otro debaxo, puesta al principio de la progresion, sirve para avisar que al leer esta, debe repetirse cada término, menos el primero y el último en esta forma, 1 es á 4, como 4 es á 7, como 7 es á 10 &c.

La progresion se llama *creciente* ó *decreciente*, segun ván sus términos creciendo ó menguando; pero como las propiedades de ambas son unas mismas solo con mudar las voces *mas* en *menos*; *sumar* en *restar*, *restar* en *sumar*, considerarémos aquí sola la progresion creciente.

212 Se saca, pues, de la naturaleza de la progresion arismética, que con el primer término y la diferencia comun ó la razon de la progresion, se pueden formar

to-

todos los demas términos, añadiendo á cada término la razon, y que por lo mismo

El segundo término se compone del primero, mas la razon.

El tercero se compone del segundo, mas la razon, y por consiguiente del primero, mas dos veces la razon.

El quarto se compone del tercero, mas la razon; y por consiguiente del primero, mas tres veces la razon; y así prosiguiendo.

213 De suerte que se puede decir, en general, que un término qualquiera de una progresion arismética se compone del primero, mas tantas veces la razon quantos términos hay antes de él.

214 Luego si el primer término es cero, qualquier término de la progresion será igual á tantas veces la razon quantos términos hay antes de él.

215 Para dos cosas sirve este principio; 1.° para hallar el término que se quiera de una progresion, sin necesidad de calcular los que le preceden. Supongamos que se nos pregunte v. gr. qual es el 100mo término de esta progresion ÷4 . 9 . 14 . 19 &c.

Ya que el término pedido es el 100mo, hay 99 términos antes de él; por consiguiente se compone del primer término 4 y de 99 veces la razon 5; será, pues, 4+495, esto es, 499.

216 2.° Para interpolar entre dos números qualesquiera quantos números se quiera, de manera que todos jun-

juntos formen una progresion arismética; cuya operacion se llama interpolar entre dos números dados muchos medios arisméticos.

Podemos interpolar entre 1 y 7 v. gr. cinco números, que con ellos formen una progresion arismética, cuyos números son 2, 3, 4, 5 y 6. Pero como no siempre se conoce á primera vista, con igual facilidad que en el caso propuesto, quales han de ser los medios por interpolar, enseñarémos como se pueden hallar por medio del principio sentado (212). Todo está en hallar la razon de la progresion.

Pero como el mayor de los dos números propuestos ha de ser el último término de la progresion, se compone del primero, esto es, del menor de los dos números propuestos, mas de tantas veces la razon quantos términos hay antes de él. Luego si del mayor de los dos números restamos el menor, la resta tendrá la razon tantas veces quantos términos ha de haber antes del mayor; quiero decir que es el producto de la razon multiplicada por el número de los términos que hay antes del mayor; luego (56) partiendo dicha resta por el número de términos que ha de haber antes del mayor, se sacará al cociente la razon.

Pero el número de términos que ha de haber antes del mayor es una unidad mayor que el número de los términos que se quieren interpolar entre los dos; luego para interpolar entre los dos números dados quantos medios

dios arisméticos se quiera, se restará el menor de los dos del mayor, se partirá la resta por el número de los medios despues de añadirle una unidad. El cociente será la diferencia ó la razon de la progresion.

Si se nos ofrece interpolar entre 4 y 11 ocho medios arisméticos, restarémos 4 de 11, partirémos la resta 7 por 9, número de los medios con una unidad mas; el cociente $\frac{7}{9}$ será la diferencia de la progresion, la qual por consiguiente será

$$\div 4 . 4\tfrac{7}{9} . 5\tfrac{5}{9} . 6\tfrac{3}{9} . 7\tfrac{1}{9} . 7\tfrac{8}{9} . 8\tfrac{6}{9} . 9\tfrac{4}{9} . 10\tfrac{2}{9} . 11.$$

217 Si se me pidiesen 9 medios arisméticos entre 0 y 1; restaré 0 de 1, quedará 1, le partiré por 10, número de los medios con una unidad mas; el cociente $\frac{1}{10}$ ó 0, 1 será la razon, y por consiguiente la progresion será

$$\div 0 . 0,1 . 0,2 . 0,3 . 0,4 . 0,5 . 0,6 . 0,7 . 0,8 . 0,9 . 1.$$

Esto manifiesta que entre dos números, por mas próxîmos que estén uno á otro, se puedan interpolar quantos medios arisméticos se quiera.

De la Progresion Geométrica.

218 La progresion geométrica es una serie de términos, que cada uno cabe en el que le precede ó sigue un mismo número de veces.

$$\div\!\!\div 3 : 6 : 12 : 24 : 48 : 96 : 192$$

es una progresion geométrica; porque cada término cabe en el que se le sigue un mismo número de veces que es 2,

cu-

cuyo número de veces se llama la razon de la progresion.

La raya con quatro puntos, dos encima y dos debaxo, puesta al principio de la progresion, sirve para lo mismo que la que se pone con dos puntos antes de la progresion arismética (211). Se ponen aquí quatro puntos para avisar que la progresion es geométrica.

La progresion se llama *creciente* ó *decreciente*, segun los términos ván creciendo ó menguando.

Considerarémos aquí la progresion geométrica creciente, porque las propiedades de ambas son las mismas, mudando la voz *multiplicar* en la voz *partir*, y diciendo *caber* por *contener*.

Ya que en el segundo término cabe el primero tantas veces quantas unidades hay en la razon, el segundo se compone del primero multiplicado por la razon.

Ya que en el tercer término cabe el segundo tantas veces quantas unidades hay en la razon, se compone del segundo multiplicado por la razon, y por consiguiente del primero multiplicado por la razon, y multiplicado otra vez por la razon; esto es, del primero multiplicado por el quadrado, ó la segunda potestad de la razon.

Ya que en el quarto término cabe el tercero tantas veces quantas unidades hay en la razon, se compone del tercero multiplicado por la razon, y por consiguiente del primero multiplicado por el quadrado de la razon, y otra vez por la razon; esto es, multiplicado por el cubo, ó la tercer potestad de la razon.

En la progresion arriba puesta v. gr. 6 se compone del primer término 3 multiplicado por la razon 2; 12 se compone del primer término 3, multiplicado por el quadrado 4 de la razon 2; 24 se compone del primer término 3, multiplicado por el cubo 8 de la razon.

219 Esto manifiesta que un término qualquiera de la progresion geométrica se compone del primero multiplicado por la razon levantada á una potestad cuyo grado expresa el número de términos antes del tal término qualquiera.

Luego quando el primer término de la progresion es la unidad, cada término se compone de sola la razon levantada á una potestad cuyo grado le expresa el número de términos que le preceden; porque la multiplicacion por el primer término, que es la unidad, no aumenta el producto.

Para levantar un número á una potestad propuesta, v. gr. á la séptima, es menester, conforme diximos quando tratamos de las potestades, multiplicar el número por el mismo seis veces de seguida; así para levantar 2 á la séptima potencia, dirémos: 2 veces 2 son 4, 2 veces 4 son 8, 2 veces 8 son 16, 2 veces 16 son 32, 2 veces 32 son 64, 2 veces 64 son 128, y esta será la séptima potestad de 2.

220 Fundados en el principio que acabamos de sentar (219) en órden á la formacion de un término qualquiera de la progresion geométrica, probarémos facilmente,

te, 1.° que en una progresion geométrica el quadrado del primer término es al quadrado del segundo, como el primer término es al tercero; 2.° que el cubo del primer término es al cubo del segundo, como el primer término es al quarto.

El quadrado del segundo término es el quadrado del primero, multiplicado por el quadrado de la razon; si este producto se parte por el quadrado del primer término, el cociente será el quadrado de la razon. Pero ya que el tercer término es (219) el producto del primero multiplicado por el quadrado de la razon, el cociente del tercer término partido por el primero, será tambien el quadrado de la razon. Luego hay una misma razon entre el quadrado del primer término y el quadrado del segundo, que entre el primero y el tercero, pues pende la igualdad de las razones de la igualdad de sus exponentes.

Del mismo modo probaríamos que en toda progresion geométrica el cubo del primer término es al cubo del segundo, como el primer término al quarto.

221 El mismo principio (219) y la consideracion allí hecha tambien pueden servir para calcular un término qualquiera de la progresion, sin necesidad de calcular los términos antecedentes. Si se pregunta v. gr. qual será el término 12$^{\text{mo}}$ de esta progresion

∺ 3 : 6 : 12 : 24 : &c.

Como sé que este término 12$^{\text{mo}}$ se compone (219) del primero, multiplicado por la razon levantada á una po-

testad cuyo grado le expresa el número de los términos que hay antes del 12^{mo}, para formarle no tengo mas que hacer sino multiplicar el primer término 3 por la undécima potestad de la razon 2. Para formar esta undécima potestad de 2, multiplico 2 por el mismo diez veces de seguida, y saco que la undécima potencia de 2 es 2048. Multiplico, pues, 2048 por 3, y saco 6144, duodécimo término de la progresion.

222 Sirve igualmente el mismo principio para interpolar quantos medios proporcionales se quiera entre dos números dados. Supongamos que se piden tres medios geométricos entre 4 y 64; por poco que se atienda se echa de ver que los tres medios geométricos son 8, 16, 32; con efecto $\div\!\div$ 4 : 8 : 16 : 32 : 64; pero si los números propuestos fuesen otros que 4 y 64, ó se pidiera otro número qualquiera de medios geométricos, no seria tan fácil hallarlos.

Pero por el principio sentado (219) se hallarán muy en breve. Toda la dificultad se reduce á hallar la razon de la progresion; porque una vez hallada, se formarán facilmente los términos, executando multiplicaciones sucesivas por dicha razon.

Supongamos v. gr. que se piden nueve medios geométricos entre 2 y 2048.

Ya se vé que 2048 será el último término de una progresion geométrica, cuyo primer término es 2, y ha de tener nueve términos entre el primero y el último. Compó-

pónese, pues, 2048 del primer término 2, multiplicado por la razon levantada á una potestad cuyo grado le expresa el número de términos que ha de haber antes de 2048; luego sacando la raiz de esta potestad, saldrá la razon; pero esta potestad ha de ser la décima, porque como ha de haber nueve términos entre 2 y 2048, habrá diez cabales antes de 2048; luego se sacará la raiz décima del cociente que saliere partiendo el número mayor 2048 por el menor 2.

223 Como este modo de discurrir es general, inferirémos que para interpolar entre dos números dados quantos medios geométricos se quiera, se ha de partir el mayor de los dos por el menor; del cociente que saliere se sacará una raiz del grado que expresare el número de términos medios despues de añadirle una unidad.

Para volver á nuestro caso, parto 2048 por 2, sale el cociente 1024, de cuyo número la raiz décima es 2; luego la razon es 2; por consiguiente para formar los medios geométricos que se piden, multiplico el primer término 2 muchas veces seguidas por la razon 2; y despues de formados nueve medios, hallo que el último es 2048

$\div 2:4:8:16:32:64:128:256:512:1024:2048.$

Si se me pidiesen quatro medios geométricos entre 6, y 48, partiria 48 por 6, y sacaria la raiz quinta del cociente 8. Como 8 no tiene raiz quinta cabal, no se pueden sacar en números cabales los quatro medios geomé-

tricos entre 6 y 48; pero podemos aproxîmarnos á dicha razon todo lo que queramos por un método parecido al que seguimos al sacar la raiz quadrada. Basta figurarse que es posible hallar un número, el qual multiplicado quatro veces de seguida por sí mismo, se vaya acercando cada vez mas á 8; lo que se puede asegurar igualmente de otro número y de otra raiz qualquiera. Concluirémos infiriendo de aquí, que entre dos números qualesquiera, se hallarán siempre que convenga quantos medios geométricos se deseen, ó cabales, ó aproxîmados, y esto basta para inteligencia del importante asunto que luego trataremos. Bien que primero vamos á enseñar como se halla la suma de todos los términos de una progresion geométrica, porque dentro de poco nos importará saberlo.

223 *a* Empezarémos determinando primero la suma de una progresion particular v. gr. de la siguiente $\div\!\!\div$ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256; y suponiendo que la suma se llama ó es sum. tendrémos

$$\text{Sum.} = 1+2+4+8+16+32+64+128+256;$$

y si lo duplicamos todo, tendremos dos veces

$$\text{sum.} = 2+4+8+16+32+64+128+256+512;$$

Luego si de la segunda igualdad restamos la primera, saldrá la suma que se busca $=512-1=511$, porque con la sustraccion los términos comunes en los segundos miembros de estas equaciones se destruyen unos á otros. Luego quando el exponente de la progresion es 2, *la*

su-

suma de todos los términos es igual al duplo del último término menos el primero.

223 *b* Supongamos ahora que el exponente de la progresion sea 3, será ∻ 1 : 3 : 9 : 27 : 81 : 243. Si suponemos todos los términos juntos iguales á una suma, triplicando de cada lado, saldrá

3 sum. $= 3+9+27+81+243+729$. Si de esta igualdad restamos estotra

Sum. $= 1+3+9+27+81+243$, y borramos todos los números que con la sustraccion se destruyen unos á otros, tendremos

2 sum. $= 729 - 1$; y por consiguiente, partiéndolo todo por 2, sum. $= \frac{729-1}{2}$; quiero decir, que quando el exponente de la progresion es 3, la suma de todos los términos es igual al triplo del último, menos el primero, partido por 2.

Si el exponente de la progresion fuese 4, hallariamos que la suma de todos los términos es igual al quádruplo del último, menos el primero, partido por 3; de donde se saca la siguiente

Regla general para hallar la suma de una progresion geométrica de quantos términos se quiera quando se conoce el primero, el último y el exponente.

223 *c* Multiplíquese el último término por el exponente; del producto réstese el primer término, y pártase la resta por el exponente despues de rebaxada la unidad.

223 *d* Para sacar otra regla que nos guie en la averiguacion de la suma de una progresion geométrica decreciente, conviene considerar que con asentarla al reves, se transforma en progresion creciente, siendo el primer término el último, y el último el primero. Si á mas de esto suponemos infinito el número de los términos; como todos van menguando, el último llegará á ser infinitamente pequeño ó nulo; y si se toma la progresion al reves, el primer término será el que será nulo, ó se desaparecerá; luego con hacer nulo el primer término en la regla antecedente, saldrá la siguiente

Regla general para sumar todos los términos de una progresion geométrica decreciente.

223 *e* Multiplíquese el primer término por la razon, y pártese el producto por el exponente despues de rebaxada la unidad, el cociente será la suma de todos los términos de la progresion decreciente al infinito.

EXEMPLOS.

$$\div\!\!\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} : \frac{1}{32} \ \&c. = \frac{1\times 2}{2-1} = \frac{1}{2}$$

$$\div\!\!\div 1 : \frac{1}{3} : \frac{1}{9} : \frac{1}{27} : \frac{1}{81} : \frac{1}{243} \ \&c. = \frac{1\times 3}{3-1} = \frac{3}{2}$$

$$\div\!\!\div 1 : \frac{1}{4} : \frac{1}{16} : \frac{1}{64} : \frac{1}{128} \ \&c. = \frac{1\times 4}{3} = \frac{4}{3}$$

y si se rebaxa el primer término ó la unidad de cada una de estas progresiones, saldrá

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ \&c. = \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \ \&c. = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \ \&c. = \frac{1}{3}$$

Sí-

Síguese de aquí que es infinito el número de progresiones geométricas decrecientes cuya suma es igual á la unidad; porque si multiplicamos por 2 todos los términos de la serie $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$ &c. su suma será dupla de lo que era, y por lo mismo igual con la unidad; si se multiplican por 3 todos los términos de la serie $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{16}$ &c. la suma de esta serie será igual á la unidad.

De las Permutaciones y Combinaciones.

223 *f* *Permutaciones* llamamos los diferentes modos de disponer ó colocar unas respecto de otras muchas cosas ó cantidades conocidas. El número de estas diferentes disposiciones pende del número de las cantidades, pues claro está que quatro cosas v. gr. se pueden disponer ó colocar unas respecto de otras de mas modos diferentes que no dos cosas.

Combinaciones llamamos los diferentes modos de tomar muchas cantidades de una en una, de dos en dos &c. sin pararse en el orden por el qual se han de colocar. De lo qual se sigue que las combinaciones no son mas que un caso particular de las permutaciones.

De las Permutaciones.

223 *g* Supondrémos que las cantidades por permutar son las letras del abecedario, por ser estos signos los mas apropiados para este asunto. Claro está que una sola letra *a* no puede ocupar mas de un lugar; dos letras *a*

y

y *b* pueden ocupar dos lugares, pues cada una de ellas puede ocupar succesivamente el primero ó segundo lugar; de donde salen dos disposiciones diferentes que son *ab* y *ba*. Si añadimos otra letra *c*, esta podrá ocupar tres lugares diferentes en cada una de las dos disposiciones últimas de dos letras, pues podrá estar al principio, al fin, ó en medio de cada disposicion *ab*, *ba*; de donde saldrán las seis permutaciones *cab*, *acb*, *abc*, *cba*, *bca*, *bac*.

Una letra mas podrá ocupar quatro lugares diferentes en cada una de las seis permutaciones últimas; luego el número total de permutaciones será 24 ó $1\times2\times3\times4$. Una letra mas podrá ocupar cinco lugares diferentes en cada una de las 24 permutaciones últimas; luego el número de permutaciones de cinco letras será $1\times2\times3\times4\times5$ ó 120. Sácase de aquí por induccion que la expresion del número de permutaciones posible con un número señalado de letras, es el producto de todos los números que hay desde la unidad hasta el que expresa el número de las cosas por permutar. Si se nos pregunta de quantos modos diferentes pueden sentarse á la mesa 12 personas, la expresion de todos estos modos será el producto siguiente $1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12=479001600$. Y suponiendo que cada permutacion se hiciese en un segundo de tiempo, se hallará que tardarian las 12 personas en sentarse á la mesa 15 años y 69 dias.

223 *b* A veces del número dado de cantidades, muchas son unas mismas, cuya circunstancia no puede menos

nos de minorar el número de las permutaciones. Quando las cantidades son dos no mas, y una misma repetida dos veces, como si en a y b hacemos $a = b$, las dos permutaciones se reducen á una sola bb, y el número de permutaciones es $\frac{1 \times 2}{2 \times 1} = 1$. Si de tres cantidades a,b,c dos son iguales, por manera que las tres sean a,b,b, no habrá mas permutaciones que estas abb, bba, bab; y el número de permutaciones será $\frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 1}$. Si de quatro cantidades hay dos ó tres iguales, las 24 permutaciones serán en el primer caso $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{2 \times 1} = 12$, y en el segundo $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 4$. Si de cinco cantidades hay dos ó tres ó quatro iguales, el número de las permutaciones será en el primer caso $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2}$, en el segundo $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}{1 \times 2 \times 3}$ &c. De aquí se saca la ley de las permutaciones para quando entre las cantidades hay algunas repetidas. Si las cantidades son v. gr. seis, y hay tres iguales unas con otras, y otras dos iguales una con otra, el número de las permutaciones será $\frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}{3 \times 2 \times 1 \times 2 \times 1}$.

De las Combinaciones.

223 *i* Las combinaciones enseñan por lo dicho antes de quantos modos diferentes se pueden tomar muchas cantidades de una en una, de dos en dos &c. por el orden que se quiera.

223 *k* Supongamos v. gr. que se quiera saber quantas palabras pueden formarse con las 25 letras del abecedario de una letra, de dos letras &c. hasta las pala-

bras

bras de 25 letras, excluyendo toda palabra que conste de mas letras. Este número de palabras posible, aunque tan grande que es imposible escribirlas, es sin embargo facil de señalar, considerando la ley con que crece el número de las combinaciones al paso que entran mas letras en la formacion de las palabras.

1.° Desde luego es patente que con 25 letras no se pueden formar mas que 25 palabras de una sola letra cada una.

2.° Admitiendo que con una misma letra repetida se pueda formar una palabra de dos letras; es evidente que si combino la letra *a* con ella misma y con todas las demas, se formarán 25 palabras de dos letras, siendo la letra *a* la primera de cada palabra. Con la letra *b* se formarán del mismo modo otras 25 palabras, siendo *b* la primer letra de cada una; y como las letras son 25, claro está que el número de las palabras posibles con las diferentes permutaciones de las dos mismas letras será $25 \times 25 = 625$.

3.° Si se escribe la letra *a* al principio de cada una de las 625 combinaciones, saldrán 625 palabras de tres letras, siendo *a* la primer letra de cada una; y verificándose lo mismo con cada una de las demas letras, síguese que el número de todas las palabras posibles de tres letras, con todas las permutaciones que admiten las mismas tres letras, será 625×25 ó 15625.

223 *l* Siguiendo la ley que acabamos de manifestar, se

se verá que el número de todas las palabras posibles que pueden formarse con las 25 letras, de una letra, dos letras &c. cada palabra, es igual á la suma de los términos de esta progresion geométrica $\div\!\!\div 25 : 25^2 : 25^3 : 25^4$, hasta la 25^{ma} potencia de 25 inclusive.

Si en lugar de querer averiguar todas las palabras que pueden formarse con las 25 letras, se quisiera saber las que con otro número de letras pueden formarse de una, dos, tres &c. letras cada una, el número de las palabras sería igual á la suma de todos los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término, el exponente y el número de los términos será cada uno igual al número de las letras.

Las combinaciones que acabamos de calcular incluyen todas las palabras que se pueden formar, admitiendo que se pueda repetir muchas veces una misma letra. Si fuese condicion que ninguna letra pueda repetirse, no por eso será mas dificil de hallar la ley de las combinaciones que han de formar las palabras. Desde luego 1.° con las 25 letras no se podrán formar, como antes, mas que 25 palabras de una letra cada una. 2.° Para formar todas las palabras de dos letras, sin sepetir ninguna, es de considerar que como la letra *a* v. gr. yá no se puede combinar con ella misma, solo se combinará con las otras 24, de lo que resultarán 24 palabras. Lo propio sucederá con la letra *b* y con todas las demas; y como en todo son 25, el número de todas las palabras posibles que puedan formar-

marse de dos letras sin repetir ninguna será 24×25.

223 *m* Para hallar las palabras de tres letras sin repetir ninguna, se reparará que la una de las combinaciones últimamente expresadas, v. gr. *ab* ó *ba*, no se puede combinar sino con las 23 letras que se siguen; y como en todo son 25×24 palabras de dos letras, la suma de todas las palabras de tres letras donde ninguna se repite será $25\times24\times23$. Discurriendo del mismo modo se hallará que las palabras de quatro letras donde ninguna puede repetirse ni una, ni dos &c. veces será $25\times24\times23\times22$.

De lo dicho hasta aquí debe inferirse que el número total de palabras de una, dos, tres &c. letras que pueden formarse con las 25 letras del abecedario, sin repetir letra alguna ni una, ni dos &c. veces, es la suma de esta serie $25, 25\times24, 25\times24\times23$ &c. hasta el último producto de 25 factores desde el número 25 hasta la unidad, menguando todos una unidad.

Si quisiéramos saber todas las palabras de una, dos &c. letras cada una sin repetir ninguna letra que puede formar con otro número menor de letras, v. gr. con las seis primeras dei abecedario, sería el número de todas las palabras $6, 6\times5, 6\times5\times4, 6\times5\times4\times3, 6\times5\times4\times3\times2, 6\times5\times4\times3\times2\times1$

223 *n* Las combinaciones antecedentes incluyen no solamente todas las palabras que se pueden formar con un número señalado de letras, de una, dos, tres &c. letras cada palabra; sino tambien las palabras formadas de las mismas letras diferentemente combinadas. Son muchos los

ca-

casos donde no se necesitan sino las combinaciones de todo punto diferentes que sufre un número dado de cantidades, sin atender al orden por el qual las diferentes cantidades pueden estar colocadas unas respecto de otras. Con la mira de hallar la ley de estas nuevas combinaciones, volvamos á considerar las 25 letras del alfabeto, y propongámonos señalar todas las combinaciones posibles que sufren, sin admitir las diferentes permutaciones que admite cada combinacion diferente.

223o De las 25 letras combinadas de una en una no pueden salir sino 25 palabras diferentes de una letra cada una; pero si se nos preguntan las diferentes combinaciones de las mismas letras de dos en dos, con la condicion que ninguna pueda repetirse dos veces, y desechando la permutacion; echarémos de ver que la letra *a* no puede combinarse sino con las otras 24 letras; la letra *b* tampoco podrá combinarse sino con las otras 24 letras, y lo mismo digo de todas las demas letras. Si hiciéramos todas estas combinaciones, veríamos que cada combinacion de dos letras estaría repetida dos veces; luego el número de combinaciones de las 25 letras será $\frac{24 \times 25}{2} = 300$.

Para hallar todas las combinaciones de las mismas letras de tres en tres, combinarémos cada producto de dos letras con las 23 letras restantes, pues es condicion que ninguna letra se repita: y como las combinaciones de dos letras son $\frac{25 \times 24}{2}$, habrá $\frac{23 \times 24 \times 25}{2}$ combinaciones de tres letras. Si al combinar el producto *ab* v. gr. con la letra *c*,

aten-

atendemos al diferente lugar donde puede estar esta letra *c*, hallaremos las tres combinaciones *cab*, *acb*, *abc*, que solo se diferencian por el lugar que una misma letra ocupa en cada una, y no forman mas que una sola y misma combinacion, en el supuesto de que se desechen las permutaciones. Luego ya que lo mismo sucederá combinando otra qualquiera combinacion de dos letras con otra letra, será preciso partir por 3 el número antecedente, y por lo mismo el número de combinaciones de las 25 letras de tres en tres será $\frac{25 \times 24 \times 23}{2 \times 3}$.

Por el mismo camino hallaríamos que el número de las combinaciones de las mismas letras de quatro en quatro será $\frac{25 \times 24 \times 23 \times 22}{2 \times 3 \times 4}$.

De los Logaritmos.

224 Si con la primera, segunda, tercera y quarta potencia de 2 v. gr. expresadas así 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, que componen la progresion geométrica $\div\!\!\div 2 : 4 : 8 : 16$, porque $2^2 = 4$, $2^3 = 8$ y $2^4 = 16$, siendo así que sus exponentes componen la progresion arismética $\div 1.2.3.4$ formamos la siguiente proporcion geométrica

$$2 : 4 :: 8 : 16 = \frac{4 \cdot 8}{2}$$
$$2^1 : 2^2 :: 2^3 : 2^4 = 2^{3+2-1},$$

hallarémos que el quarto término es el primero con un exponente igual á la suma de los exponentes de los medios, menos el exponente del mismo primer término. De donde se infiere que si el exponente del primer tér-

mi-

mino fuera cero, seria mas facil y breve sacar el quarto término, pues todo estaria en dar al primero un exponente igual á la suma de los exponentes de los dos medios; del mismo modo que la práctica de la regla de tres es mas fácil y breve siempre que el primer término es la unidad, pues entonces es escusado partir por el primer término el producto de los medios.

224 *a* Luego todo método de calcular las cantidades, no por ellas mismas, sí por sus exponentes, de modo que por estos y no por aquellas se haga toda regla de tres, convertirá las operaciones de multiplicar y partir en otras de sumar y restar, mucho mas fáciles que las primeras; y lo serán todavía mas si el artificio tiene la circunstancia de ser la unidad el primer término de la proporcion, y cero su exponente.

224 *b* Está inventado cabalmente con esta circunstancia el modo de calcular las cantidades, y le proporcionan los *logaritmos*. Son los *logaritmos* unos números artificiales en progresion arismética, cuyo primer término es cero, correspondientes, cada uno al suyo, á los términos de una progresion geométrica, cuyo primer término es la unidad. Y con el fin de que se sacará de este invento toda la posible utilidad, se han formado y dado á luz tablas de logaritmos dispuestas de modo que al lado de cada uno de los números enteros hasta donde llegan, no solo está su correspondiente logaritmo, sino que con su auxîlio tambien se pueden hallar en breve los lo-

garitmos de los quebrados, y los de qualquier número que no esté en las tablas.

224 *c* Supongamos que las dos progresiones, es á saber la geométrica que representa los números, y la aritmética donde están sus logaritmos, sean las dos siguientes, por ser la tercera la misma que la segunda,

$$0 \,.\, 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5 \,.\, 6 \,.\, 7$$
$$1 \,.\, 2 \,.\, 4 \,.\, 8 \,.\, 16 \,.\, 32 \,.\, 64 \,.\, 128$$
$$1 \,.\, 2^1 .\, 2^2 .\, 2^3 .\, 2^4 .\, 2^5 .\, 2^6 .\, 2^7$$

En ellas se vé patentemente 1° que los términos de la progresion arismética son los exponentes, y por consiguiente los logaritmos de los términos de la progresion geométrica; 2° que, por ser la unidad el primer término de la progresion geométrica, todos los demas son y deben ser las potencias succesivas del segundo (219), señalando sus exponentes respectivos la distancia á que cada uno de ellos está de la unidad.

Aquí se vé tambien á las claras quanto los logaritmos facilitan los cálculos; porque si con tres términos de la progresion geométrica, siendo el primero la unidad, estos, v. gr. 1,8,16, queremos hacer una regla de tres, buscarémos en la progresion arismética los exponentes ó logaritmos de 8 y 16, los quales son 3 y 4, y mirarémos á que número de la progresion geométrica corresponde su suma 7; y viendo que esta suma corresponde á 128, inferirémos que 16×8 es 128, lo que es verdad.

Lue-

224 *c* Luego, para hallar el producto de dos números uno por otro, se sumarán uno con otro sus logaritmos, se buscará en la tabla el logaritmo igual á la suma, y al lado estará el producto de los dos números propuestos.

El producto de tres números estará en las tablas al lado del logaritmo igual á la suma de los logaritmos de los tres; si prosiguiéramos las dos progresiones de antes (224 *c*), hallariamos que $4 \times 8 \times 16 = 2^{2+3+4} = 2^9$, cuyo exponente corresponde á 512, y este número es con efecto el producto de los tres señalados.

224 *d* Luego, para quadrar un número, se tomará dos veces su logaritmo, y esto es lo mismo que multiplicarle por 2, exponente de la potencia; para cubicar un número, se tomará tres veces su logaritmo, ó se le multiplicará por 3, exponente de la tercer potencia: el número que en las tablas esté al lado del duplo del logaritmo del número por quadrar, será su quadrado; el número que en las tablas esté al lado del triplo de su logaritmo, será su cubo, &c.

224 *e* Ya que partir los números unos por otros es operacion contraria á la de multiplicarlos; quando ocurra partir un número por otro, se restará el logaritmo del partidor del logaritmo del dividendo; al lado del logaritmo de las tablas que exprese la diferencia de los dos logaritmos estará el número cociente de la division propuesta. Si ocurriese partir un producto de tres factores

O 2 por

por uno de ellos, de la suma de los logaritmos de los tres se restará el logaritmo del factor divisor.

224 *f* Luego tambien, ya que sacar las raices de los números es operacion contraria á la de formar sus potestades; siempre que ocurra sacar la raiz quadrada de un número, se tomará la mitad de su logaritmo; quando se quiera extraher su raiz cúbica, se tomará el tercio de su logaritmo.

225 Con la progresion geométrica que representa los números, se puede juntar la progresion arismética que se quiera, sin que por eso dexen de proporcionar los logaritmos, para calcular las facilidades que acabamos de manifestar: de donde se sigue que á un mismo número pueden corresponder diferentes logaritmos, ó que puede haber diferentes sistemas de logaritmos. Pero sean estos sistemas los que fueren, en todos concurre la circunstancia de transformar las operaciones de multiplicar y partir en otras de sumar y restar. Harémoslo patente por medio de la adjunta tabla, en la qual acompañamos una misma progresion geométrica que ocupa la primer columna de la izquierda, con cinco progresiones arisméticas diferentes; proporcionando la primera mucho mayor facilidad para los cálculos, por cuyo motivo ha merecido la preferencia respecto de todas las demas para la formacion de las tablas comunes.

1	0	3	5	35	0
2	1	7	8	32	$1\frac{1}{3}$
4	2	11	11	29	$2\frac{2}{3}$
8	3	15	14	26	4
16	4	19	17	23	$5\frac{1}{3}$
32	5	23	20	20	$6\frac{2}{3}$
64	6	27	23	17	8
128	7	31	26	14	$9\frac{1}{3}$
256	8	35	29	11	$9\frac{2}{3}$

225 *a* Formemos por medio de la tercer progresion arismética v. gr. la quarta potencia de 4. Del quádruplo 44 de su logaritmo 11 rebaxarémos 15, triplo del logaritmo dé la unidad, saldrá la resta 29; y como enfrente de este número está 256, será este la quarta potencia de 4.

225 *b* Para sacar en el mismo sistema la raiz quarta de 256, harémos todo lo contrario. A su logaritmo 29 añadirémos 15, partirémos por 4 la suma 44, y el cociente 11, que está enfrente de 4, nos dirá que este número es la raiz quarta de 256.

225 *c* Busquemos por medio de la quarta progresion el cociente de 32 partido por 2. Una vez que en toda division el divisor es al dividendo como la unidad al cociente, sumarémos uno con otro 35 y 20 logaritmos respectivos de 1 y 32; de la suma 55 rebaxaré-

mos 32, logaritmos del divisor; y como la resta 23 está enfrente de 16, será, y es con efecto este número el cociente de 32 partido por 2.

225 *d* Finalmente, por la quinta progresion arismética buscarémos el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son 2, 8 y 4. Sumarémos $2\frac{2}{3}$ y 4 logaritmos respectivos de 4 y 8; de la suma $\frac{20}{3}$ rebaxarémos $1\frac{1}{3}$, logaritmo de 2; y porque la resta $\frac{16}{3}$ ó $5\frac{1}{3}$ está enfrente de 16, este será el quarto término de la proporcion propuesta.

225 *e* Aclaremos por que en el primer exemplo del logaritmo de 4 se ha de rebaxar tres veces el logaritmo de la unidad. Sabemos que las potencias de las cantidades se forman por multiplicacion, siendo tantas las multiplicaciones, menos una, quantas unidades hay en el exponente de la potencia. Luego para formar la quarta potencia de 4 serán tres las multiplicaciones; pues 1° se multiplicará 4 por 4; 2° otra vez por 4 su quadrado 16; 3° últimamente otra vez por 4 su cubo 64: y como en toda multiplicacion la unidad sea al multiplicador, como el multiplicando al producto, cifrarémos las tres multiplicaciones del modo siguiente, y despues asentarémos por logaritmos las operaciones correspondientes.

1.ª

1.ª 1 : 4 :: 4 : 16; 2.ª 1 : 4 :: 16 : 64; 3.ª 1 : 4 :: 64 : 256

1.ª de	22	duplo log. 4,
resto	5	log. 1,
resta	17	log. 16.
2.ª sumo	11	log. 4,
con	17	log. 16,
de la suma	28	
resto	5	log. 1,
resta	23	log. $4 \times 16 = 64$.
3.ª sumo	11	log. 4,
con	23	log. 64,
de la suma	34,	
resto	5	log. 1,
sale	29	log. $256 = 4^4$.

Si la quarta potencia de 4 se hubiera formado por la primera progresion arismética, no hubiera habido que hacer ninguna sustraccion.

225 *f* Así como los términos de la progresion geométrica ascendiente van siendo mayores unos que otros, y mayores que la unidad al paso que están á mayor distancia de ella, se echa de ver que si la prosiguiéramos descendiendo, sus términos saldrian tanto menores unos que otros, y menores que la unidad, quanto mas se fuesen apar-

tando de ella. Como es preciso conocer tambien los logaritmos de estos números menores que la unidad, es necesario continuar la progresion arismética desde cero, primer término suyo, ácia abaxo. Pero como los números menores que la unidad son todos negativos, síguese que los logaritmos de los quebrados son *negativos* ó *defectivos*; que tambien se llaman así. Aquí se vé todo esto muy á las claras

$$\begin{array}{l} -8.-7.-6.-5.-4.-3.-2.-1.\ 0.1.2.3.4.5.6.7.8 \\ \frac{1}{256}.\ 1\frac{1}{128}.\ \frac{1}{64}.\ \frac{1}{32}.\ \frac{1}{16}.\ \frac{1}{8}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{2}.\ 1.2.4.8.16.32.64.128.256 \end{array}$$

Es tambien patente que todo logaritmo positivo tiene su correspondiente negativo á igual distancia de la unidad, centro de la progresion geométrica.

Sistema de los logaritmos comunes, y formacion de sus tablas.

226 Con la progresion arismética natural que empieza desde cero se ha juntado la geométrica cuyos términos van creciendo en proporcion décupla.

$$\begin{array}{l} 0.\ 1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4\ .\ 5\ .\ 6\ \&c. \\ 1.10.100.1000.10000.100000.1000000 \end{array}$$

donde es de reparar, y esto importa mucho, 1.° que los números de la progresion arismética que se siguen á la unidad son los exponentes de las diferentes potencias de 10, primer término de la progresion geométrica despues de la unidad; 3 v. gr. de la progresion arismética es el exponente de la tercer potencia de 10, pues $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$; 2.° que el número cuyas dife-

ferentes potencias componen la progresion geométrica, se llama *base logarítmica* del sistema; 10 es la base logarítmica del sistema que aquí declaramos; 3.° que cada término de la progresion arismética, ó, lo que es todo uno, cada logaritmo es el exponente de la potencia á la qual se ha de levantar la base logarítmica para que forme un número igual al término de la progresion geométrica correspondiente al logaritmo que se considera, v. gr. 4 logaritmo de 10000, es el exponente de la quarta potencia de 10, de modo que $10^4 = 10000$; 4.° que si fuese otra la base logarítmica, ya no seria 4 el log. de 10000, pues solo la quarta potencia de 10 puede ser igual con 10000.

227 Si en las tablas de los logaritmos no hubiese otros que los correspondientes á los términos de esta progresion geométrica, y á los que se podrian añadir continuándola, seria limitadísimo su uso. Era por lo mismo necesario formar las tablas de modo que incluyesen con sus logaritmos todos los números intermedios entre los de la progresion geométrica, v. gr. 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 que faltan entre 1 y 10, los números 11, 12, 13 &c. hasta 99 inclusivè, que caben entre 10 y 100; cuyos números, por lo mismo que han de ser términos de la expresada progresion geométrica, han de estar todos unos con otros en proporcion continua geométrica. Bien se echa de ver que al mismo tiempo se hace preciso interpolar entre 0 y 1 de la progresion arismética ocho números, en-

tre

tre 1 y 2 noventa y nueve números, los quales para que sirvan al intento, ó sean los logaritmos de sus correspondientes en la progresion geométrica, han de ser continuo proporcionales arisméticos. Este es, conforme se viene á la vista, un trabajo penosísimo; pero de tanto mayor beneficio, quanto mas se prosiguiera, en el qual se empeñaron los primeros Matemáticos que calcularon tablas de logaritmos antes de inventarse los métodos expeditos que para esto proporciona el Algebra, y darémos á conocer en el tomo segundo.

Veamos, pues, como salieron de este laberinto, ó como entre 1 y 10 v. gr. se pueden interpolar, como medios proporcionales geométricos, los números 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Si entre dos qualesquiera términos de la progresion geométrica, interpolamos un medio proporcional, despues otro entre este y el primero de los dos términos dados; otro entre el primero de los términos dados y el último interpolado, y se van intercalando así de contino medios geométricos entre los términos de la progresion, llegará á componerse de una infinidad de términos, los quales discreparán uno de otro una cantidad menor que qualquiera cantidad señalable; hallándose por consiguiente entre ellos los números de la serie natural 2, 3, 4 &c. como medios proporcionales, ya que no cabales, tales por lo menos, que la diferencia entre ellos y los interpolados será menor que qualquiera cantidad apreciable. De donde se sigue que entre dichos términos inter-

po-

polados ha de haber razon de igualdad, ú otra que discrepe de ella una cantidad despreciable; todo con el fin de que sean estos términos perfectamente iguales con los números cuyos logaritmos se buscan, ó falte una cantidad despreciable.

Bien se vé que al mismo tiempo que se va interpolando la progresion geométrica, se ha de interpolar la arismética, con paso igual, á fin de sacar á un tiempo los números y sus logaritmos, apuntando estos cada uno enfrente de su número.

228 Estos medios geométricos y arisméticos no pueden salir todos cabales; porque como todo medio geométrico proporcional es la raiz quadrada del producto de los dos números entre los quales se le quiere interpolar, quando este producto no sea un quadrado perfecto, tampoco su raiz será el medio geométrico cabal. Lo propio sucede con los medios arisméticos; porque como todo medio arismético entre dos números es la mitad de la suma de estos, quando esta no se pueda partir en dos partes iguales, tampoco saldrá cabal el medio arismético.

229 Pero este es un tropiezo fácil de salvar si se considera, 1.° que quanto mayor es un número no quadrado, tanto menos su raiz discrepa de la verdadera; pues como la diferencia que va de la una á la otra no llega á la unidad, la parte de esta que constituye la diferencia entre la raiz que se saca y la verdadera, es tanto menor, quanto mayor sea el número no quadrado. La raiz

qua-

quadrada de diez v. gr. es mayor que 3 y menor que 4; la raiz quadrada de 19727 pasa de 140 y no llega á 141: luego lo que se ha de añadir á 3 para que sea la raiz cabal de 10 es parte de la diferencia que va de 3 á 4, ó parte de $\frac{1}{3}$; lo que se ha de añadir á 140 para que sea la raiz cabal de 19727, es parte de la diferencia que va de 140 á 141, ó parte de $\frac{1}{140}$; y es bien patente que $\frac{1}{140}$ es mucho menor que $\frac{1}{3}$. 2.° que por lo mismo todo estará en hacer que sean mayores los términos de la progresion geométrica, sin que por eso muden de valor, lo que se consigue añadiendo á cada uno muchos ceros; serán, pues, entónces todos ellos 10 veces, 100 veces &c. mayores que antes, segun los ceros que se les añadan, quedando de un mismo valor todos ellos porque en la misma razon serán menores las partes que expresarán. Luego tambien la diferencia que despues de esta preparacion hubiere entre la raiz verdadera, y la que se saque será menor en la misma proporcion: por manera que tantos ceros podrán añadirse á los términos de la progresion geométrica, que la tal diferencia sea quasi ninguna. Estas consideraciones tambien se aplican á los términos de la progresion arismética.

230 Si, teniendo todo esto presente, buscamos el logaritmo de 2, cuyo número en la serie de los números naturales se sigue inmediatamente á la unidad, repararemos desde luego, que así como 2 está en la progresion geométrica entre 1 y 10, ó entre 1.0000000 y 10.0000000,

su

su log. ha de estar en la arismética entre 0,0000000 y 1,0000000, logaritmos de los dos números entre los quales se ha de interpolar 2. Luego para sacar este medio arismético, logaritmo de 2, hemos de buscar primero entre los expresados términos de la progresion geométrica muchos medios proporcionales, y para cada uno de ellos el correspondiente medio arismético, hasta sacar un medio geométrico que sea 2 ó 2.0000000, ó discrepe tan poco de 2, que la diferencia sea despreciable; y el medio arismético que saliere correspondiente á 2, será el logaritmo de este número.

Sean, pues, *A*, *B* los dos términos de la progresion geométrica; sacarémos entre ellos un medio proporcional, es á saber 3,162277, que llamarémos *C*, y sacarémos al mismo tiempo su correspondiente logaritmo entre los términos 0.0000000 y 1.0000000, el qual será 0,5000000, y le asentarémos á su lado. Si el medio geométrico hubiera sido 2.0000000, ú otro número que de él discrepare una cantidad despreciable, estaria concluida la operacion, y el medio arismético 0,5000000 seria el logaritmo que se busca. Pero como *C* es $3\frac{1622777}{10000000}$ mucho mayor que 2,0000000, se hace preciso buscar entre *C*, mayor que este último número, y *A* menor, otro medio geométrico *D*, y tambien el medio arismético entre sus logaritmos. Este medio geométrico *D* es á la verdad menor que 2.0000000, pero se le aproxîma no obstante mas que *A*. Dexemos, pues, á un lado el número *A*, y busquemos entre *D* y *C* otro medio geomé-

métrico *E*, y su logaritmo correspondiente entre los logaritmos de aquellos. Por ser *E* mayor que 2.0000000, buscarémos entre *D* y *E* otro medio geométrico *F*; pero por ser este todavia mayor que 2.0000000, se hace preciso buscar otro medio geométrico *G* entre *D* y *F*. Si se prosigue sacando á este tenor medios geométricos hasta hallar uno que sea 2.0000000, ó tan próximo á él, que la diferencia entre los dos sea despreciable, y al mismo tiempo se señala el medio arismético 0.3010300, correspondiente á 2.0000000, será el tal medio su logaritmo. El que dé una mirada á la tabla, acabará de entender la operacion, se hará cargo de quan penosa es, y de lo mucho que son acreedores á nuestro agradecimiento los animosos, y constantes calculadores que formaron las primeras tablas de logaritmos.

Me-

	Medios Geométricos.	Logaritmos.		Medios Geométricos.	Logaritmos.
A	1.0000000	0,0000000	*O*	1.9999786	0,3010253
C	3.1622777	0,5000000	*P*	2.0005408	0,3011474
B	10.0000000	1,0000000	*N*	2.0011032	0,3012695
A	1.0000000	0,0000000	*O*	1.9999786	0,3010253
D	1.7782794	0,2500000	*Q*	2.0002596	0,3010864
C	3.1622777	0,5000000	*P*	2.0005408	0,3011474
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
E	2.3713737	0,3750000	*R*	2.0001190	0,3010558
C	3.1622777	0,5000000	*Q*	2.0002596	0,3010864
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
F	2.0535249	0,3125000	*S*	2.0000489	0,3010406
E	2.3713737	0,3750000	*R*	2.0001190	0,3010558
D	1.7782794	0,2500000	*O*	1.9999786	0,3010253
G	1.9109529	0,2812500	*T*	2.0000137	0,3010329
F	2.0535249	0,3125000	*S*	2.0000489	0,3010405
G	1.9109529	0,2812500	*O*	1.9999786	0,3010406
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
F	2.0535249	0.3125000	*T*	2.0000137	0,3010329
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
I	2.0169144	0,3046875	*X*	2.0000048	0,3010310
F	2.0535249	0,3125000	*T*	2.0000137	0,3010329
H	1.9809566	0,2968750	*V*	1.9999961	0,3010291
K	1.9988546	0,3046875	*Υ*	2.0000004	0,3010013
I	2.0169144	0,3126875	*X*	2.0000048	0,3010310
K	1.9988546	0,3007812	*V*	1.9999961	0,3010291
L	2.0078642	0,3027344	*Z*	1.9999982	0,3010296
I	2.0169144	0,3046875	*Υ*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	*Z*	1.9999982	0,3010291
M	2.0033543	0,3017578	*W*	1.9999993	0,3010298
L	2.0078642	0,3027344	*Υ*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	*W*	1.9999993	0.3010298
N	2.0011032	0,3012695	π	1.9999998	0,3010299
M	2.0033543	0,3017578	*Υ*	2.0000004	0,3010301
K	1.9988546	0,3007812	π	1.9999998	0,3010299
O	1.9999786	0,3010253	Δ	2.0000000	0,3010300
N	2.0011032	0,3012695	*Υ*	2.0000004	0,3010301

Por

Por el mismo camino se hallaron los logaritmos de los demas números primeros que están entre 1 y 10, entre 10 y 100, &c. En quanto á los logaritmos de los demas números son muy fáciles de hallar, una vez que el logaritmo de todo producto es la suma de los logaritmos de todos sus factores (235), y el log. de un cociente es la diferencia que va del logaritmo del dividendo al logaritmo del divisor.

231 El calculador que busca los logaritmos para formar unas tablas, debe sacarlos con mas escrupulosidad que no el que busca un logaritmo solo y aislado. Con un caso práctico manifestarémos la necesidad y el fundamento de esta prevencion. Quando hemos sacado el logaritmo de 2, hemos dado á 10 por logaritmo el *número* 1.0000000; si el mismo logaritmo se buscara con ánimo de formar unas tablas, convendria añadir al logaritmo de 10, tres, quatro &c. ceros, de modo que fuese 1.0000000.000, ó 1,0000000.0000. Hallados que fuesen por medio de estos logaritmos los demas, se les quitarian á la derecha tantas figuras quantos ceros se le hubiesen añadido á aquel; con la advertencia de que así como las figuras que se han de quitar á la derecha son el numerador de un quebrado, cuyo denominador es la unidad con tantos ceros quantas sean las figuras quitadas, si el tal numerador fuese mayor que la mitad del denominador, al logaritmo del qual se hubiesen quitado dichas figuras, se le añadirá una unidad. En virtud de esto, el lo-

logaritmo 3,3803921.600, ó 3,3803921 $\frac{600}{1000}$, que corresponde al número 2401, será 3,3803922.

La razon de esto es, que como unos logaritmos se forman de otros multiplicándolos por números determinados; v. gr. el logaritmo de la quarta potencia de un número es el producto de su logaritmo por 4 (224 *d*); si al formar el logaritmo de la raiz se desprecia alguna cantidad, su quádruplo, que puede ser de alguna consideracion, faltará en el logaritmo de su quarta potencia. El logaritmo de 7 v. gr. calculado en el supuesto de ser 1.0000000 el logaritmo de 10, es 0,845098o, y calculado en el supuesto de ser 1,0000000.000 el logaritmo de 10, es 0,8450980,400; si se saca en el primer supuesto el logaritmo de la quarta potencia de 7, será 3,3803920, y sacado en el segundo supuesto será 3,3803921.600, esto es, 3,3803922, ó dos unidades mayor que el otro.

232 Otro beneficio proporciona el calcular los logaritmos en el supuesto de ser 1.0000000.000 el logaritmo de 10. Y es que como las diferencias de los logaritmos van menguando de continuo hasta desvanecerse del todo, de modo que llegan á salir iguales los logaritmos de los números bastante grandes inmediatos unos á otros, esta igualdad no llegará á verificarse sino respecto de números muy grandes quando sea 10,0000000.000 el logaritmo de 10: por manera que los logaritmos que salen iguales quando se calculan en el supuesto de ser

1.0000000 el logaritmo de 10, discreparán todavía unos de otros quando se calculen en el primer supuesto. Esto se verifica con los números 2656385774 y 2656385774, cuyos logaritmos calculados por..... 1,0000000 log. de 10, son ambos 9,4252911, y calculados por 1,0000000.000 log. de 10, son... 9,4252911.457 el del primero, y el del segundo es 9,4252911.459.

233 Las diferencias entre los logaritmos van siempre menguando por la proporcion que debe haber entre ellos y sus números, pues cosa clara es que á un número mayor corresponda un logaritmo mayor. Pero la diferencia que hay entre los números va menguando de contínuo, pues la diferencia de 2 á 1 es 1; la de 2 á 3 es $\frac{1}{2}$; la de 3 á 4 es $\frac{1}{3}$; la diferencia de 43 á 44 es $\frac{1}{43}$; luego es preciso que vaya tambien menguando la diferencia que hay de un logaritmo á su inmediato, hasta que llegando á ser despreciable la diferencia entre dos números inmediatos uno á otro, por muy grandes, llega á serlo igualmente la diferencia entre sus logaritmos.

234 Del modo declarado poco ha de formar *los logaritmos* se deduce que los logaritmos de los números que caben entre 0 y 10, estan entre 0,0000000 y 1,0000000, siendo su primer figura 0, á la qual se sigue un quebrado decimal con una coma entremedias; los logaritmos de los números que estan entre 10 y 100, se hallan entre 1,0000000 y 2,0000000, siendo su primer figura 1,

á

á la qual se sigue un quebrado decimal con una coma entremedias, los logaritmos de los números que caben entre 100 y 1000 estan entre 2,0000000 y 3,0000000, siendo su primer figura 2, á la qual se sigue un quebrado decimal con una coma entremedias. La primer figura de todo logaritmo se llama su *característica*, y *mantisa* del logaritmo el quebrado decimal que la acompaña.

Es, pues, cero la característica de los logaritmos correspondientes á los números que estan entre 1 y 10; la característica de los logaritmos correspondientes á los números entre 10 y 100 es 1; la de los logaritmos correspondientes á los números entre 100 y 1000 es 3, &c. por manera que la característica de todo logaritmo tiene tantas unidades, menos una, quantas son las figuras del número al qual pertenece.

Luego siempre se sabe que característica corresponde al logaritmo de un número propuesto; y por la característica del logaritmo se conoce de quantas figuras consta su número.

Por lo mismo que los logaritmos de los números de la progresion geométrica, 1, 10, 100 &c. son 0,0000000; 1,0000000; 2,0000000 &c. se viene á los ojos que el logaritmo de todo número que conste de sola la unidad acompañada de muchos ceros, no tendrá mas figura significativa que la característica; siendo cero todas las figuras de su mantisa; los logaritmos de los demas números tendrán características acompañadas de un quebrado decimal.

234 *a* Ya que 3 es la característica del logaritmo de 1000; 2, la característica del logaritmo de 100; 1, la característica del logaritmo de 10; 0, la característica del logaritmo de 1, síguese que la característica del logaritmo de todo número menor que la unidad, esto es, de todo quebrado propio, ha de ser de naturaleza y signo contrario (225 *f*) al de las características expresadas; siendo esta la razon porque el logaritmo de todo quebrado se llama *defectivo* ó *negativo*, y lleva el signo —, como — 0.3679767.

Y porque quanto menor es la cantidad que el quebrado expresa, tanto mas discrepa y dista de la *unidad*, tanto mayor será su logaritmo defectivo.

Es, pues, el logaritmo de la unidad el término desde el qual empiezan á crecer los logaritmos positivos y negativos; por cuyo motivo estos corresponden á cantidades tanto menores, quanto mayores ellos son.

234 *b* Es tambien de reparar, y se sigue de lo dicho (230), que los logaritmos de los números que crecen en proporcion décupla tienen una misma mantisa; por manera que los logaritmos de los números décuplos unos de otros solo se distinguen por sus características, siendo una misma la mantisa de todos. Aquí se vé patentemente.

Los

Los logaritmos de los números.

$$\left.\begin{array}{r} 5 \\ 50 \\ 500 \\ 5000 \end{array}\right\} \text{son} \left\{\begin{array}{l} 0{,}6989700 \\ 1{,}6989700 \\ 2{,}6989700 \\ 3{,}6989700 \end{array}\right.$$

234 *c* Hemos dicho (224 *c*), y lo evidencia el exemplo allí puesto, que el exponente de cada término de la progresion geométrica señala el lugar que el mismo término ocupa en ella despues de la unidad; siendo el tal exponente una unidad mayor que el número de los medios geométricos entre su número y la unidad; v. gr. 16 ó 2^4 ocupa el quarto lugar de la progresion geométrica, despues de la unidad; siendo así que entre este número y la unidad no hay mas que tres medios geométricos. Luego, ya que los logaritmos son los exponentes de los números ó términos de la progresion geométrica correspondiente, los quales en las tablas no se distinguen de los números naturales, señalan el lugar que cada número ocupa en la serie de los naturales despues de la unidad; y si se le rebaxa una unidad, señalará quantos medios geométricos hay entre la unidad y el mismo número. En virtud de esto 1.0000000 está diciendo que 10 ocupa el 10000000mo lugar despues de la unidad en la serie de los medios geométricos, y 9999999 dice que entre 1 y 10 hay otros tantos de dichos medios, como entre 10 y 100 hay la misma razon que entre 1 y 10, ha-

habrá igualmente entre 10 y 100 otros 9999999 medios geométricos, y los mismos entre 100 y 1000 &c. Por consiguiente desde 1 y 100 inclusivè habrá..... 20000000 medios geométricos, desde 1 á 1000 inclusivè habrá 30000000; quiero decir que desde la unidad hasta un número qualquiera de los naturales inclusivè, habrá tantos medios geométricos quantos señalare el logaritmo del tal número.

Uso de las Tablas de Logaritmos.

235 Estas tablas son utilísimas para ahorrar trabajo á los calculadores, y facilitar las operaciones de la práctica; porque por medio de los logaritmos se transforman las operaciones de multiplicar y partir en otras de sumar y restar. Quando ocurra multiplicar un número por otro, se ha de sumar el log. del multiplicando con el logaritmo del multiplicador; la suma es el log. del producto. Buscando, pues, en la tabla este logaritmo, á su lado se hallará el producto de la multiplicacion propuesta. Si se me ofreciese multiplicar 14 por 13, haré la operacion como sigue

con	1,146128	log. 14
sumaré	1,113943	log. 13
suma	2,260071	log. 182

producto de 14 por 13; porque buscando en la tabla el log. 2,260071, hallo inmediato á su lado el número 182.

Lue-

236 Luego ya que para quadrar un número, ó levantarle á su segunda potestad, se le ha de multiplicar por el mismo se duplicará su logaritmo, ó se le multiplicará por 2; el número que en la tabla esté inmediato al lado del log. que salga, será el quadrado; ó la segunda potencia del número propuesto. Si se me ofrece formar el quadrado de 15 multiplicaré por 2 su logaritmo 1,176091, sacaré el log. 2,352182, á cuyo lado está inmediatamente en la tabla el número 225, que es con efecto el quadrado de 15.

237 Por la misma razon, quando ocurra cubicar un número, formar su cubo, ó levantarle á la tercer potencia, se triplicará ó multiplicará por 3 su logaritmo, el número que esté en la tabla inmediato al lado del logaritmo que salga será el cubo del número propuesto. Para cubicar v. gr. 18, multiplico por 3 su logaritmo... 1,255273, saco 3,765819, y como en la tabla está inmediato á su lado el número 5832, infiero que este es el cubo de 18. De aquí se saca la siguiente

Regla general. Para formar una potencia qualquiera de un número se ha de multiplicar su logaritmo por el exponente de la potencia propuesta; el número que en la tabla esté al lado del log. producto, será la potencia que se buscare.

Si hubiésemos de levantar 2. v. gr. á la décima potencia, multiplicariamos por 10 el logaritmo 0,301030 de 2, el número 1024 que en la tabla está inmedia-

to al lado del producto 3,010300 es con efecto la décima potencia de 2.

238 Luego, ya que para sacar una raiz qualquiera de un número, se ha de hacer una operacion toda contraria á la de formar su potencia del mismo grado, podremos sentar tambien la siguiente

Regla general. Para sacar una raiz determinada de un número qualquiera, se partirá el logaritmo del tal número por el exponente de la raiz propuesta; el número que en la tabla esté inmediato al lado del logaritmo cociente, será la raiz que se busca. Si se ofreciese sacar la raiz quadrada de 6889 partiré por 2 el log. 3,838156 de 6889; como inmediato al lado del logaritmo cociente 1.919078 está el número 83 infiero que esta es la raiz quadrada de 6889. Para sacar la raiz séptima de 128, parto por 7 el log. 2,107210 de 128: y como al lado del logaritmo cociente 0,301030 está inmediato en la tabla el número 2, infiero que 2 es la raiz séptima de 128.

239 Quando ocurra hacer por logaritmos la operacion de partir un número por otro; del logaritmo del dividendo se restará el logaritmo del divisor; el número que en la tabla está inmediato al lado del logaritmo diferencia de los dos, será el cociente de la division propuesta.

Quie-

Quiero partir 187 por 17.

De	2,271842	log. 187
Resto	1,230449	log. 17
Dif.	1,041393	log. 11,

cociente de 187 partido por 17.

La razon de la regla es, que como en toda division el cociente multiplicado por el divisor ha de reponer el dividendo, es preciso que la suma del logaritmo del divisor y del logaritmo del cociente componga el logaritmo del dividendo. Luego el logaritmo del cociente ha de ser por precision igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

239 *a* La regla rige para las divisiones, cuyo dividendo es mayor que el divisor. Quando este es mayor que aquel, no se puede restar del logaritmo del dividendo el logaritmo del divisor. Entonces se hace la sustraccion al reves; quiero decir, que del logaritmo del divisor se resta el logaritmo del dividendo, señalando la resta con el signo —, cuyo signo recuerda al calculador que la operacion correspondiente se hizo al reves. Todo logaritmo que lleva el signo — es negativo ó defectivo, y su signo avisa que debe tomarse al reves de lo que se tomaría si no llevase tal signo, esto es, que el logaritmo defectivo se ha de restar del número con el qual debería sumarse si no llevara el signo —, en cuyo caso se llama *logaritmo positivo.* Vaya un exemplo.

Quie-

Quiero partir 17 por 187, ó sacar el logaritmo del quebrado $\frac{17}{187}$. Aquí no puedo restar 2,271842 logaritmo del divisor, de 1,230449, logaritmo del dividendo, hago, pues la sustraccion al reves.

De	2,271842	log. 187
Resto	1,230449	log. 17
Dif.	—1,041393	log. $\frac{17}{187}$

239 *b* El logaritmo de $\frac{12}{4}$ ó de 3 es 0,477121, y el logaritmo de $\frac{4}{12}$ ó $\frac{1}{3}$ es —0,477121. Esto no puede causar novedad al que considere que $\frac{1}{3}$ es la misma cantidad que 3 ó $\frac{3}{1}$ tomada al reves; luego los cálculos donde entre $\frac{1}{3}$ han de dar resultados contrarios á los que salgan de los cálculos donde en lugar de $\frac{1}{3}$ entre 3 ó $\frac{3}{1}$. Porque claro está que multiplicar una cantidad por $\frac{3}{1}$ es hacerla tres veces mayor, y multiplicarla por $\frac{1}{3}$ es hacerla tres veces menor, ó partirla por 3. Por consiguiente en los cálculos por logaritmos deben estos avisar con sus signos la contrariedad de oficio de un mismo número.

240 De lo dicho (239) se sigue que el logaritmo de todo quebrado legítimo cuyo numerador es la unidad, es el logaritmo del denominador con el signo —, y que el logaritmo de toda cantidad decimal legítima ha de ser defectivo.

Como los logaritmos defectivos suelen hacer embarazosos los cálculos, se ha discurrido un recurso para excusarlos, lo que se logra con el *complemento arismético*.

Del

Del Complemento arismético.

241 El *Complemento arismético* de un número es la diferencia que vá del tal número á la unidad acompañada de tantos ceros á la derecha, quantos guarismos tiene el número: el complemento arismético de 485 v. gr. es la diferencia que vá de 485 á 1000. Luego el complemento arismético de un número se halla restando este de la unidad acompañada de tantos ceros, quantos son los guarismos ó figuras del número. Por esta regla, si he de sacar el complemento arismético de 485;

De....................	1000
restaré................	485
sacaré el compl.arism. de 485 =	515

Esta regla es la misma que estotra: el complemento arismético de un número se saca restando de 10 su primer guarismo de la derecha, y de 9 cada uno de los demas.

242 El complemento arismético transforma las operaciones de restar en operaciones de sumar; quiero decir, que quando se ofrece restar un número de otro, se suma con este el complemento arismético de aquel. Para restar 485 de 789.

Con....................	789
sumo el compl.arism. de 485 que es	515
sale la suma...............	~~1~~304

y

y rebaxando de ella la unidad que hay en los millares sale 304, verdadera diferencia que vá de 789 á 485.

Hemos de decir por que en este exemplo se ha de borrar la unidad que hay en los millares. Como el complemento arismético 515 de 485 es 1000—485, claro está que quando sumo el tal complemento arismético rebaxo con efecto 485, pero al mismo tiempo añado 1000; luego al cabo de la operacion he de rebaxar esta unidad que sale en los millares; luego de la suma 1304 he de borrar el 1, y hallo que la verdadera resta es 304, como es facil comprobarlo haciendo la operacion por el método comun.

Síguese de aquí que si el número cuyo compl. arism. se saca tiene dos guarismos no mas, su compl. arism. se halla restando de 100 el tal número; luego quando este compl. arism. se sume con otro número habrá en los centenares una unidad de exceso, la qual deberá borrarse.

243 Por consiguiente, siempre que en alguna operacion se introduzcan varios complementos arisméticos, del resultado final se borrarán á la izquierda tantas unidades, quantos fueren los complementos arisméticos, teniendo cuidado de borrarlas en la columna donde les toque estar.

De la suma de los dos números 789 y 467 quiero restar estotros dos 523 y 25.

Con

Con	789
y	467
sumo 477 compl.arism. de 523 . . .	477
y 75 compl. arism. de 25	75
suma	1808
	708

Por causa del compl. arism. de 523 he de borrar una unidad en la columna de los millares, y otra en la columna de los centenares por causa del compl. arism. de 25; y despues de hechas estas rebaxas, queda la suma en 708, verdadera resta que sale despues de rebaxar la suma de 523 y 25 de la suma de 789 y 467, como es facil comprobarlo.

Al compl. arism. del log. de un número, algunos matemáticos suelen llamarle *complemento logarítmico* del tal número.

244 El cálculo por logaritmos tan expedito de suyo, lo es todavía mas por medio del compl. arism. y vamos á manifestarlo con varios exemplos.

Quiero partir 12 por 3. Por el método comun de log. 12 rebaxaré log. 3, la resta ha de ser log. 4, cociente.

Por el compl. arism. con log. 12 sumaré compl. arism. del log. 3, que es 9,522879, y la suma tambien será log. 4.

De

De	1,079181 log.12	con	1,079181 log.12
Resto	0,477121 log. 3	sumo	9,522879 compl.arism. log.3
Dif.	0,602060 log. 4	suma	10,602060 log.4.

Los dos logaritmos finales son uno mismo despues de rebaxar de la característica del segundo la decena introducida con el compl. arism. (243).

245 Quiero sacar el producto de $\frac{3}{4}$ multiplicado por 8, cuyo producto es $\frac{24}{4} = 6$. Para sacar este producto he de sumar (235) log. $\frac{3}{4}$ con log. 8, y la suma será log. 6; pero como log. $\frac{3}{4}$ es $-0,124939$, en vez de sumarle con log. 8, le restaré (239 *a*). El log. de $\frac{3}{4}$ sacado por medio del complem. logarítm. es 9,875061. Haré la operacion por ambos métodos, y sacaré el mismo resultado.

De	0,903090 log.8	con	0,903090 log.8
Resto	0,124939 log.$\frac{3}{4}$	sumo	9,875061 log.$\frac{3}{4}$
Dif.	0,778151 log.6	suma	10,778157 log.6,

6 0,778151 despues de rebaxar la decena que tiene de mas la característica por causa del complemento logarítmico de $\frac{3}{4}$.

Para mayor ilustracion buscaré el producto de $\frac{5}{7}$ por 21 que vale 15, sacando log. $\frac{5}{7}$ por ambos métodos. Por el primero, log. $\frac{5}{7}$ es $-0,146128$; por el segundo, es 9,853872.

De	1,322219 log.21	con	1,322219 log.21
Resto	0,146128 log. $\frac{5}{7}$	sumo	9,853872 log. $\frac{5}{7}$
Dif.	1,176091 log.15	suma	‡11,176091 log.15

Cu-

Cuyos logaritmos finales son uno mismo despues de rebaxada del segundo la decena que lleva de mas por causa del complemento arismético.

Como se usan las tablas de logaritmos para hallar los logaritmos de los números que en ellas no están.

246 En las tablas comunes, á lo menos en las que he publicado, no están los logaritmos de los números enteros sino hasta 20000; faltan los logaritmos de los números mayores, los de los números fraccionarios, los de las raices imperfectas de las potencias de su grado, los de los quebrados legítimos &c. conviene enseñar como con su auxîlio se hallan unos y otros.

Cuestion I. *Hallar el logaritmo de un número fraccionario, qual es* $8\frac{3}{11}$, *el mismo que* $\frac{91}{11}$.

Reduzco á solo un quebrado el entero con el quebrado que le acompaña, saco $\frac{91}{11}$, y por la regla (239).

De	1,959041	log. 91
Resto	1,041393	log. 11
Dif.	0,917648	log. $\frac{91}{11}$

Cuestion II. *Hallar el logaritmo de un número mayor que el máxîmo de las tablas.*

Sucede con freqüencia que despues de reducir todo á un quebrado el entero con el quebrado que le acompaña, sale un numerador que de puro grande no cabe en la tabla. Esto sucedería si hubiésemos de buscar el logaritmo

del

del número $53\frac{831}{5704}$, el qual despues de hecha la reduccion mencionada, es $\frac{303143}{5704}$ cuyo numerador no cabe en la tabla. Con este motivo hemos de enseñar como se hallan los logaritmos de los números mayores que el máximo de la tabla.

248 Para enterarse bien de lo que en este caso se ha de practicar, conviene tener presente, 1.° que añadir 1, 2, 3 &c. unidades á la característica de un logaritmo es lo mismo que multiplicar su número por 10, 100, 1000 &c., pues es lo mismo que sumar el logaritmo de 10, 100, 1000 &c. con el logaritmo del tal número, 2.° que quitar al contrario 1, 2, 3 &c. unidades á la característica de un logaritmo es lo mismo que partir su número por 10, 100, 1000 &c.

249 Hecho este recuerdo, propongámonos hallar el logaritmo de 357859; se descartarán de este número á la derecha los guarismos necesarios para que el número restante quepa en la tabla; aquí bastará descartar dos guarismos, y el número 3578,59 que queda es 100 veces menor que el número propuesto (118).

Se buscará despues en la tabla el log. de 3578, el qual es 3,553640; se sacará la diferencia 122 que va de este log. al log. de 3579, y se dirá:

Si por una unidad de diferencia que hay entre los números 3578 y 3579 hay 122 de diferencia entre sus logaritmos, quando sea 0,59 la diferencia entre los números ¿que diferencia habrá entre sus logaritmos? Quiero de-

decir, que se buscará el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son los siguientes

$$1 : 122 :: 0,59 :$$

el quarto término es 71,98, ó solo 71, desechando las decimales. Añadirémos, pues, 71 á 3,553640 log. 3578, y saldrá 3,553711 log. de 3578,59. Para sacar el de 357859, se añadirán dos unidades á la característica del log. sacado, por ser 357859 cien veces mayor que 3578,59, y por fin el log. de 357859 será 5,553711.

250 Quando los últimos guarismos que se desechan á la derecha del número son cero, despues de hallar en la tabla el logaritmo del número residuo, basta añadir á su característica tantas unidades, quantos son los ceros desechados del número.

Cuestion III. *Hallar el logaritmo de un número que lleva enteros con decimales.*

Bórrese la coma divisoria, y búsquese el logaritmo del número propuesto como si fuese un número entero; despues de hallado su logaritmo, bien inmediatamente, bien por el método propuesto (249), quítensele á su característica tantas unidades quantas sean las figuras decimales del número. Porque considerar el número sin coma divisoria, es suponerle 10, 100, 1000 &c. veces mayor de lo que es; luego para dexarle su verdadero valor, es preciso hacer á su característica la correspondiente rebaxa.

Cuestion IV. *Hallar el logaritmo de un quebrado decimal.*

Resolverémos esta cuestion por un método que excusa los logaritmos defectivos, con cuya mira recordarémos el destino del complemento logarítmico, mediante lo qual darémos una regla general.

Busquemos por dicho complemento el logaritmo de 0,75, lo mismo que $\frac{75}{100}$ (120), y el de 0,075, lo mismo que $\frac{75}{1000}$.

Para el primer quebrado.

Con...... 1,875061 log. 75
sumo..... 8,000000 comp. log. 100

suma..... 9,875061 log. de $\frac{75}{100}$ ó de 0,75.

Para el segundo quebrado.

Con...... 1,875061 log. 75
sumo..... 7,000000 comp. log. 1000

suma..... 8,875061 log. $\frac{75}{1000}$ ó de 0,075.

Por el mismo camino hallaríamos que el logaritmo de 0,0075 es 7,875061. De aquí se deduce que

251 El logaritmo de todo quebrado decimal tiene la misma mantisa que el logaritmo del número que componen sus figuras significativas, y por característica el número 9, ú otro tantas unidades menor que 9, quantos ceros hay en la decimal á continuacion de la coma divisoria. Así hemos visto poco ha que log. 0,75 es 9,875061, cuya mantisa es la misma que la del log. de 75, y la característica es 9; porque despues de la coma divisoria no hay ningun cero en 0,75; el log. de 0,075 es 8,875061,

cu-

cuya característica 8 tiene una unidad menos que 9, porque en 0,075 hay un cero despues de la coma divisoria. Tambien sacaríamos que el log.de 0,0075 es 7,875061, siendo 7 la característica, porque despues de la coma divisoria hay dos ceros en 0,0075.

Luego, quando se tropiece con el logaritmo de un quebrado decimal, y se quiera averiguar qual sea dicho quebrado, se practicará lo siguiente: se buscará en la tabla el número cuyo logaritmo tiene la misma mantisa que el propuesto; antes del tal número se pondrá un cero, despues la coma, y á continuacion de la coma á la derecha tantos ceros quantas unidades faltan á la característica del logaritmo propuesto para llegar á 9.

252 Luego el logaritmo de todo quebrado decimal tiene por característica un número menor que 10. Luego al sumar los logaritmos de los quebrados decimales deben desecharse todas las decenas que lleve la característica de la suma. Por consiguiente quando el logaritmo de una suma ha de ser el logaritmo de un entero, la característica sale cabal y sin aumento; y si el logaritmo ha de corresponder á un quebrado, la característica llevará una decena de unidades de mas. Si buscamos por logaritmos, v. gr. el producto de 24 por 0,75.

Con...... 1,380211 log.24
sumo..... 9,875061 log.0,75

suma.... 11,255272

 des-

desechando las decenas de la característica de la suma, queda 1,255272, y el error que podria resultar de la regla queda enmendado, pues este es el logaritmo cabal de 18, producto de 0,75 por 24.

Si se buscase el producto de 0,75 por 0,4.

Con.	9,875061	log. 0,75
sumo	9,602060	log. 0,4
suma	19,477122	

Desechando las decenas de la suma, queda 9,477122, cuya característica está diciendo que el número de este logaritmo es un quebrado decimal, el qual es 0,3, producto de 0,4 por 0,75.

Por consiguiente, practíquese como regla general el desechar las decenas de la característica. Si se ofrece v. gr. levantar un quebrado decimal á una potestad de grado determinado, si queremos formar v. gr. el quadrado de 0,4; como el quadrado de 0,4 es 0,16, y el logaritmo del quadrado de 0,4 es 2 × log. 0,4, el qual es 19,204120, se escribirá solo 9,204120. Si se busca por logaritmos el cubo de 0,4, que es 0,064, este logaritmo es 3 × log. 0,4, ó 28,806180, y se escribirá solo 8,806180. De donde se vé que en la característica del logaritmo de la segunda potencia hemos desechado una decena, dos en la característica del logaritmo de la tercer potencia.

253 Síguese de aquí, que quando se hayan de extraer por logaritmos raices de quebrados decimales, cuya ope-

operacion es contraria á la de formar sus potencias, se habrán de suplir las decenas desechadas; donde no, saldrá errado el cálculo. Se suplirán, pues, tantas decenas menos una quantas unidades tenga el exponente del radical; quiero decir, que se suplirá una decena quando se hubiese de sacar la raiz quadrada; dos decenas, quando se hubiese de sacar la raiz cúbica, ó tercera, &c. Así, para sacar por logaritmos la raiz cúbica de 0,64, cuyo logaritmo es 8,806180, antes de partir este logaritmo por 3, se añadirán dos decenas á su característica, y será 28,806180; el cociente de la division 9,602060 será log. 0,4, raiz cúbica de 0,64.

Cuestion V. *Hallar por medio de la tabla los números de los logaritmos que en ella no están.*

Dos casos pueden ocurrir aquí, porque un logaritmo puede faltar en la tabla, ó de puro grande, ó porque cabe entremedias de dos, hallándose solo en la tabla los primeros guarismos del logaritmo propuesto.

I. En el primer caso, á la característica del logaritmo dado se le quitarán unidades hasta que sus primeros guarismos se hallen en la tabla; si despues de esta preparacion, todos los guarismos del logaritmo se hallan en la tabla, el número inmediato á su lado será el que le corresponde, pero se le añadirán á este tantos ceros quantas unidades se le hubieren quitado á la característica del logaritmo (248). Por este camino hallaremos que 7,227115, despues de quitar quatro unidades á la característica, es

el logaritmo de 1687; de donde hemos de inferir que 1687000 es el número del logaritmo propuesto.

II. Si solo se hallan en la tabla los primeros guarismos del logaritmo propuesto, quítensele igualmente á su característica unidades con el fin expresado, y practíquese lo que en el caso siguiente.

Quiero averiguar el número del log. 5,243266; quito dos unidades á su característica, y veo que ... 3,243266, logaritmo residuo, está entre el logaritmo de 1750 y el log. de 1751, y que por consiguiente el número del log. propuesto es 1750 y un quebrado.

Todo está, pues, en hallar este quebrado; con cuyo fin resto del log. 3,243266 el log. de 1750, y apunto la diferencia 228.

Apunto tambien la diferencia 248 que va del logaritmo de 1751 al log. de 1750, y digo: si 248 unidades de diferencia entre los logaritmos de 1751 y 1750 dan una unidad de diferencia entre los números ¿que diferencia darán entre los números 228 unidades de diferencia entre el logaritmo propuesto y el log. de 1750? ó

$$248 : 1 :: 228 : \frac{228}{248},$$

de donde infiero que log. 3,243266 corresponde al número $1750\frac{228}{248}$, con cortísima diferencia. Luego ya que 5,243266 logaritmo propuesto corresponde á un número cien veces mayor (248), será el logaritmo de $175000\frac{22800}{248}$, ó de $175091\frac{29}{31}$, ó de 175091,93, con reducir el quebrado á decimal.

Si

Si el logaritmo propuesto cupiese en la tabla , no habria que quitar unidad alguna á la característica , y por lo mismo tampoco habria que añadir cero alguno al número al fin de la operacion , la qual en quanto á lo demas se executará del mismo modo sin variar en nada.

Cuestion VI. *Hallar el número correspondiente á un logaritmo defectivo.*

Réstese el log. negativo propuesto de 1 ó 2 ó 3 &c. unidades , segun sea la extension de la tabla , y despues de hallado el número del log. residuo , descártense con una coma á la derecha tantos guarismos , quantas unidades hubiere en el número del qual se restó el logaritmo.

Quiero saber v. gr. á que quebrado corresponde este log. —1,532732 ; considérole como positivo y le resto de 4 , queda 2,467268 , cuyo logaritmo está en la tabla entre el log. de 293 y el de 294 ; de aquí infiero que el quebrado del logaritmo propuesto está entre 0,0293 y 0,0294 , quiero decir que es 0,0293 con diferencia de menos de una diezmilésima : la razon es clara , porque restar de 4 el log. 1,532732 es (248) multiplicar 1000 por el quebrado cuyo es el logaritmo propuesto , ó lo que es todo uno , es multiplicar este quebrado por 10000 ; luego ha de salir un número 10000 veces mayor ; luego al fin de la operacion se le debe reducir á que exprese diezmilésimas.

254 Aunque se saquen por el complemento logarítmico los logaritmos de los quebrados decimales , no obstan-

te se hallan con el auxîlio de la tabla tan facilmente como quando tienen logaritmos defectivos, sobre cuyo punto queda dicho (250) quanto corresponde.

255 En la formacion de las potencias deberá tenerse presente que quando se multiplica el logaritmo por el número que expresa el grado de la potencia, tambien se multiplica el número que llevare de mas el logaritmo. Por lo que, si quando se forma un cubo v. gr. entra un complemento arismético en el logaritmo propuesto, quiero decir si la característica lleva diez unidades mas de lo que corresponde, la característica del logaritmo del cubo llevará 30 unidades mas, sucediendo respectivamente lo propio en las demas potencias; será, pues, facil reducirla á su justo valor.

En la extraccion de las raices, para escusar equivocaciones, quando entren complementos arisméticos en los logaritmos que sirvieren, se le añadirán ó quitarán á la característica las decenas que fuere menester, á fin de que lo que llevare de mas, conste cabalmente de tantas decenas quantas unidades hubiere en el número que expresare el grado de la raiz.

Busquemos v. gr. la raiz cúbica de $\frac{276}{547}$; el logaritmo de 276 añadiremos el complemento arismético del logaritmo de 547.

Log.

Log. 276 . . . . , . . .		2,440909
compl. arism. log. 547 . .		7,262013
suma		9,702922
añado á la característica	20	
		29,702922

á fin de que lleve tres decenas de mas, y sale 29,702922, su tercio 9,900974 es el logaritmo de la raiz cúbica que se pide, cuya característica tiene diez unidades de mas. Practicando lo dicho poco ha, se hallará que la raiz cúbica que se pide es 0,7961, con diferencia de menos de una diezmilésima.

ELE-

ELEMENTOS DE GEOMETRÍA.

Figura. 256 El espacio que ocupan siempre los cuerpos tiene tres dimensiones, que son *longitud*, *latitud* y *profundidad* ó *grueso*. Aunque no exîste cuerpo alguno que no tenga todas estas tres dimensiones juntas, solemos no obstante separarlas con el pensamiento: así, quando hablamos de la profundidad de un rio, v. gr. no atendemos á lo que coge de largo, ni de ancho.

Distinguirémos, pues, tres especies de extension: la extension en sola longitud, que llamarémos *linea*: la extension en longitud y latitud solamente, que llamarémos *superficie*: finalmente la extension en longitud, latitud y profundidad, que llamarémos *volumen* ó *sólido*.

El objeto de la Geometría es considerar las propiedades de cada una de estas tres especies de extension.

De las Lineas.

257 Supondrémos en estos elementos que todas las lineas y superficies que considerarémos están en un plano ó superficie plana. Por *plano* entendemos una superficie que no tiene hoyos ni eminencias, ni es curva: tal viene á ser la superficie de una mesa muy lisa. De modo que llamarémos plano una superficie sobre la qual si se tira una linea

rec-

recta, todos los puntos de esta linea están en dicha superficie y la tocan. Fig.

Hay tres especies de lineas, la *recta*, la *curva* y la *mixta*: ántes de definirlas conviene dar á conocer el punto.

258 Llámanse *puntos* los extremos de una linea. Tambien llamamos *punto* el lugar donde es cortada una linea, ó en el qual las lineas se encuentran ó concurren. De modo que se puede considerar el punto como una porcion de extension de infinitamente poca longitud, latitud y profundidad.

259 Sentado esto, llámase linea *recta* aquella cuyos puntos están todos en una misma direccion: tal es la linea *AB*. Por este motivo definen algunos la linea recta, diciendo que es la que trazaría un punto que se moviese de modo, que encaminándose continuamente, sin desviarse, ácia un solo y mismo punto, dexase rastro de sí. Si el punto *A*, moviéndose sin desviarse para ir desde *A* á *B*, dexase á cada paso que diese un rastro, formaría la linea recta *AB*. 1.

260 La linea *curva* es aquella cuyos puntos no están en una misma direccion: la linea *AEB* es una linea curva. 2. Por lo que definen algunos la linea curva diciendo, que es la que forma un punto, que yendo desde un punto á otro, y desviándose á cada paso del camino recto, dexa rastro de sí.

261 Llámase linea *mixta* la que es en parte recta y en parte curva: tal es la linea *ABCD*. 3.

De estas definiciones dimanan las tres proposiciones siguientes, cuya evidencia es tan patente, que no necesitan de prueba.

Fig. 262 1.° *Desde un punto á otro no se puede tirar mas de una linea recta; pero se pueden tirar infinitas lineas curvas.*

4. Esto se viene á los ojos solo con mirar la figura, en la qual se echa de ver, que desde el punto *A* al punto *B* no se puede tirar mas linea recta que la *AB*; bien que desde el primer punto al segundo se pueden tirar muchas lineas curvas, como las *AEB*, *ADB* &c.

263 2.° *La linea recta es la mas corta que se puede tirar desde un punto á otro.*

4. La linea *AB* v. gr. tirada desde el punto *A* al punto *B*, es mas corta que cada una de las lineas *AEB*, *ADB* y *ACB*, las quales son mas largas á proporcion que mas se apartan de la recta *AB*, por ser mayor el rodeo del punto cuyo rastro se supone que son: por lo que, *es la linea recta la medida cabal de la distancia que hay entre dos puntos*, conforme probarémos mas adelante.

264 *Para determinar la posicion de una linea recta, basta conocer dos de sus puntos: de suerte que si se conoce la posicion de dos puntos suyos, se conoce tambien la de toda la linea.*

Como esta proposicion nos servirá muchísimo en adelante, es del caso detenernos en hacer patente su verdad.

5. Es evidente que muchas lineas rectas pueden pasar por un mismo punto; v. gr. la linea *CD*, y la linea *AB* pasan ambas por el punto *E*, y se puede hacer que pasen infinitas por dicho punto; por lo que, un punto solo no determina la

la posicion ó direccion de una linea recta ; pero si se to- Fig.
man dos puntos como *E* y *F*, no es posible tirar por estos 5.
dos puntos mas lineas rectas que la *CD* ; porque es patente que todas las lineas rectas que pasaren por los dos puntos *E* y *F*, estarian echadas sobre la linea *CD*, y se confundirian con ella ; bastan, pues, dos puntos para determinar la posicion de una linea recta.

265 Infiérese de esta última proposicion, que *dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto.*

Porque si dos lineas como *AB* y *CD*, que se cortan 5.
en el punto *E*, se cortasen tambien en otro punto, como cada punto de interseccion sería comun á ambas lineas, estas dos lineas tendrian dos puntos comunes, y como la posicion de una linea recta solo pende de dos puntos, las dos lineas tendrian comunes todos los demas puntos, y formarian una sola linea recta, contra lo que hemos supuesto ; por consiguiente dos lineas rectas no se pueden cortar sino en solo un punto.

Sería un dislate la conseqüencia que acabamos de inferir, si no se considerasen las lineas sin latitud ; porque si admitiésemos alguna latitud en las lineas, es constante que tendria alguna extension el punto donde se cortan las dos lineas, y podria por lo mismo ser dividido en otros dos puntos que serian comunes á ambas lineas.

266 Sacamos tambien de la misma proposicion (264) que *si dos puntos como* C *y* D *de una recta están á igual distancia de otros dos* A *y* B, *cada punto de la linea* CD *es-*

Fig. *estará á igual distancia de los mismos puntos* A *y* B. Así E está tan distante de *A* como de *B* ; lo propio digo de otro punto qualquiera de la linea *CD*.

1. 267 Para *trazar una linea recta de corta longitud, como si quisiésemos tirar desde el punto* A *al punto* B *una linea recta en el papel*, se hace uso de una regla, aplicándola sobre los dos puntos *A* y *B*, ó muy cerca de ellos, y á distancias iguales de cada uno; y haciendo correr una pluma ó un lapiz á lo largo de la regla, queda trazada la linea *AB*.

268 Las lineas se miden con otras lineas; pero en general *la medida comun de las lineas es la linea recta*. Medir una linea recta ó curva, ó una distancia qualquiera, es buscar quantas veces en dicha linea ó distancia cabe una linea recta conocida y determinada que se toma por unidad. Esta unidad es de todo punto arbitraria, por lo que, es infinita la variedad de medidas de distancias, de las quales daremos á conocer algunas en la Geometría Práctica.

269 Entre todas las lineas curvas solo consideraré-mos en estos Elementos *la circunferencia del círculo*. Llámase
6. con este nombre la linea curva *ABDFA*, que traza el extremo *A* de la linea *CA*, moviéndose al rededor del punto fixo *C*.

270 A todo el espacio ó superficie que abraza la circunferencia, le llamamos *círculo*, y á las lineas que como *CA* ván desde el centro á la circunferencia, las llamamos *radios* del círculo. Del modo con que concebimos que se forma el círculo, resulta

1.°

271 1.° Que *todos los radios de un círculo son iguales unos con otros.* Fig.

Porque no son otra cosa que la linea *CA*, cuyo extremo *A* traza la circunferencia, y que por consiguiente todos los puntos de la circunferencia distan igualmente del centro.

272 2.° Que para *trazar una circunferencia* ABDFA *desde un centro* C, no hay sino abrir un compas de manera que cojan sus dos piernas la distancia *CA*. Plantaráse la una en el punto *C*, y se le hará dar la vuelta á la otra, no apartándose la primera del punto *C*; la linea curva que la segunda pierna trazáre será la circunferencia que se pide. 6.

273 3.° Que *las circunferencias cuyo centro está en un mismo punto, no pueden encontrarse sin confundirse en una sola circunferencia.*

Porque, ó son iguales sus radios ó son desiguales. 1.° si fueren iguales los radios de ambas circunferencias, todos los puntos de cada una estarán á igual distancia del centro comun *C*; luego se confundirán en una sola las dos circunferencias. 2.° si fueren desiguales los radios de las dos circunferencias, la que tuviese el radio menor *Ca* estará toda dentro de la que tuviere el radio mayor *CA*; luego no se encontrarán las dos circunferencias. 7.

274 4.° Que *no tienen un mismo centro las circunferencias que se encuentran.*

Porque si tuvieran un mismo centro, no se encontrarian en virtud de lo que acabamos de probar.

5.°

Fig. 275 5.° Que *todos los diámetros de un círculo son tambien iguales unos con otros.*

Porque se llama *diámetro* una linea recta, que pasando por el centro del círculo remata por ambos extremos en
6. la circunferencia, como la linea *BF*; luego todo diámetro se compone de dos radios; luego son iguales unos con otros todos los diámetros, pues lo son los radios (271).

8. 276 Las porciones *BC*, *CF*, *FD* &c. de la circunferencia se llaman *arcos.*

277 Una recta como *CF*, tirada desde el un extremo *C* de un arco al otro extremo *F*, se llama *cuerda* ó *subtensa* de dicho arco.

Como una cuerda tiene un arco en cada uno de sus lados, quando se dice de una linea que es cuerda de un arco, se entiende comunmente del arco menor.

278 Se echa de ver 1.° *que las cuerdas iguales de un mismo círculo ó de círculos iguales, subtenden arcos iguales*; y recíprocamente *los arcos iguales de un mismo círculo ó de círculos iguales tienen cuerdas iguales.*

8. Porque, si la cuerda *DG* es igual á la cuerda *DF*, y nos figuramos que se dobla la figura por la linea *DA*, para que *DG* se aplique sobre *DF*, es evidente, que siendo el punto *D* comun, y cayendo el punto *G* de la linea *DG* sobre el punto *F* de la linea ó cuerda *DF*, todos los puntos del arco *DG* se han de aplicar sobre el arco *DF*; pues si alguno de dichos puntos no cayese sobre el arco *DF*, no estarian todos los puntos del arco *DF* á la misma distancia

del

del centro *A*, que todos los puntos del arco *DG*, y por Fig.
consiguiente todos los puntos de la circunferencia, á que pertenecen estos dos arcos, no estarian á la misma distancia del centro *A*, cuya consecuencia repugna con lo que probamos antes (271).

279 2.° Si en *un mismo círculo* ADBCA *ó en círculos iguales, un arco* AFC *fuere mayor que otro* AGD, *la* 9.
cuerda AC *del primero será tambien mayor que la cuerda* AD *del segundo.*

Figurémonos el círculo *ADBCA* doblado por el diámetro *AB*; por estar todos los puntos de ambos arcos á igual distancia del centro del círculo cuyos son, se aplicará todo el arco *AGD* sobre el arco *AFC*, y el punto *A* será comun á los dos arcos, y á las dos cuerdas *AD*, *AC*, 10.
y el punto *C*, extremo del arco mayor, estará á mayor distancia del punto *A*, que el punto *D*, extremo del arco menor, por coger, segun suponemos, el primer arco mayor porcion de la circunferencia que el otro. Pero el punto *C* es tambien extremo de la cuerda del arco mayor, y *D* es el otro extremo de la cuerda del arco menor: luego mayor distancia hay entre los dos extremos de la cuerda del arco mayor que entre los dos extremos de la cuerda del arco menor. Luego &c.

280 *El diámetro es la mas larga de todas las cuerdas.*

Porque el diámetro *BD* es igual á los dos radios *AC*, 11.
AF juntos (275); pero estos dos radios juntos son mayores que la cuerda *CF* (263), linea recta tirada des-

Fig. de el punto C al punto F; y como probaríamos lo mismo por qualquiera punto del radio AE, que pasare la cuerda CF, queda probado que es el diámetro la mayor de todas las cuerdas.

281 Llámanse *círculos concéntricos* los que tienen
7. sus centros en un mismo punto. Tales son los dos círculos $ABCDA$, *abdca*. Al espacio que hay entre las dos circunferencias se le llama *corona* ó *ánulo*.

282 Han convenido los matemáticos en dividir toda circunferencia de círculo, grande ó pequeña, en 360 partes iguales que llaman *grados*: dividen el grado en 60 partes iguales que llaman *minutos*: cada minuto en 60 partes iguales que llaman *segundos*: el segundo en 60 partes iguales que llaman *terceros*; y así prosiguiendo.

La señal del grado es esta ..... ^{o}
La del minuto .... $'$
La del segundo............ $''$
La del tercero .... $'''$
La del quarto............. ^{IV}

Así, para expresar 3 grados, 24 minutos y 55 segundos, escriben $3^{o}\ 24'\ 55''$.

Por grado no se ha de entender una cantidad absoluta, sino solo la 360^{ma} parte de qualquiera circunferencia, grande ó pequeña. Así una circunferencia, por pequeña que sea tiene tantos grados como otra mayor; pero los tiene menores á proporcion, del mismo modo que una cantidad, sea la que fuere, grande ó chica, tiene dos mita-

tades, que tienen con ella la misma razon que las mitades Fig.
de otra cantidad mayor con dicha cantidad.

De los Ángulos y de su medicion.

283 Llamamos *ángulo* la abertura que forman una con otra dos lineas que concurren en un punto llamado *punta* ó *vértice* del ángulo; tal es la abertura *BAC*, que 12.
forman las dos lineas *AB*, *AC*. Las dos lineas cuyo concurso forma el ángulo, se llaman los lados de dicho ángulo; las lineas *AB*, *AC* son los lados del ángulo *BAC*. El ángulo que acabamos de definir se llama ángulo *plano*. El ángulo se llama *rectilineo* quando sus lados son dos lineas rectas: *curvilineo*, quando son dos lineas curvas; y *mixtilineo* quando el un lado es una linea recta, y el otro una linea curva. Aquí consideraremos solo los ángulos rectilineos.

Quando tuviéremos que nombrar un ángulo, le nombrarémos con tres letras, la una de las quales estará en el vértice, y las otras dos estarán á lo largo de los lados; y al nombrar estas tres letras, nombrarémos siempre en segundo lugar la que estuviere en el vértice. En virtud de esto, para nombrar el ángulo formado por las dos lineas *AB*, *AC*, diríamos el ángulo *BAC*. 12.

Es preciso practicarlo así, particularmente quando un mismo punto es vértice de muchos ángulos; porque si en este caso se nombrase alguno de ellos por sola la letra del vértice comun á todos, quedaría dudoso de qual se hace mencion.

Fig. 12. 284 El que quiera enterarse bien de lo que es un ángulo, debe figurarse que la linea *AB* estaba primero echada sobre la *AC*, y que se la hace mover al rededor del punto *A* (del mismo modo que se mueve una pierna de compas al rededor de su charnela) para que llegue á la posicion *AB* en que está actualmente. La cantidad que *AB* se ha apartado de *AC* en este movimiento, es lo que llamamos ángulo.

285 De aquí se infiere 1.° *que la cantidad de un ángulo no pende de la longitud de sus lados, sí solo de la abertura, inclinacion ó distancia que hay entre dichos lados.*

12. Así el ángulo *BAC* es igual al ángulo *EAF*, ó por mejor decir es el mismo ángulo, aunque los dos lados *CA* y *CB* que le forman sean mas cortos que los lados *EA* y *FA*.

286 2.° *Que si dos ángulos* BAC, bac *son iguales, y se pone el vértice del uno encima del vértice del otro; de modo que el lado* ab *del uno cayga encima del lado* AE *del otro; el lado* ac *del primero caerá por precision encima del lado* AF *del segundo.*

Porque, si cayera *ac* fuera ó dentro del ángulo *BAC*, sería el ángulo *bac* mayor ó menor que el ángulo *BAC*, y no serian iguales los dos ángulos, conforme se supone.

287 Se colige igualmente de la generacion del ángulo que *la medida de un ángulo* BAC, *cuyo vértice está en el centro del círculo, es el arco* BC *que abrazan sus lados.*

Porque es patente que crece ó mengua dicho arco á medida que crece ó mengua el intervalo que cogen los dos la-

lados. Pero acabamos de ver que en solo este intervalo consiste la cantidad del ángulo ; queda , pues , probado que se mide un ángulo , cuyo vértice está en el centro del círculo , con el arco que abrazan sus lados. Fig. 12.

Es indiferente trazar el arco que ha de medir un ángulo á una distancia mayor ó menor del vértice. Porque , sea grande ó pequeña la circunferencia cuyo centro está en el vértice del ángulo , el arco comprehendido entre los dos lados del ángulo , es de igual valor ó igual número de grados respectivo ; quiero decir , que dicho arco cogerá el mismo número de grados de su círculo. El arco *ab* v.gr. tiene tantos grados como el arco *AB* , porque si el uno es 7.
la octava parte de su circunferencia , el otro será tambien la octava parte de la circunferencia , cuyo arco es.

288 Estos arcos de diferentes círculos , que cogen igual número de grados , y son cada uno la misma parte de la circunferencia cuyos son , se llaman *arcos proporcionales ó semejantes.*

289 Luego , *para dividir un ángulo en muchas partes iguales , basta dividir el arco que le mide en otras tantas partes iguales , y tirar desde los puntos de division lineas al vértice de dicho ángulo.* Mas adelante enseñarémos como se dividen los arcos.

290 Y *para formar un ángulo igual á otro ángulo*; 12.
para formar v. gr. *en el punto* a *de la linea* ac *un ángulo igual al ángulo* BAC , se trazará con una abertura de compas arbitraria , y desde el punto *a* como centro un arco in-

Fig. definito *cb* ; aplicando despues la punta del compas en el vértice *A* del ángulo dado *BAC* , se trazará con la misma abertura el arco *BC* comprehendido entre los dos lados de dicho ángulo ; tomando con el compas la distancia entre *C* y *B* , y llevándola desde *c* á *b* , quedará determinado el punto *b*, por el qual , y por el punto *a* , se tirará la linea *ab*, y será el ángulo *bac* igual al ángulo *BAC*.

Porque el arco *bc* es la medida del ángulo *bac* (287), y el arco *BC* mide el ángulo *BAC*. Pero estos dos arcos son iguales , porque son de círculos iguales ; y tienen tambien cuerdas iguales (278) ; pues se ha tomado la distancia *bc* igual con la que hay desde *B* á *C*. Luego &c.

Si atendemos al número de grados que puede abrazar un ángulo , hallarémos que puede haberle de tres especies; es á saber *recto*, *obtuso* y *agudo*.

291 El *ángulo recto* es el que tiene por medida un arco de 90 grados, ó la quarta parte de la circunferen-
13. cia ; tales son los ángulos *DAE* , *EAB*.

292 Llámase *ángulo obtuso* el que tiene por medida
13. un arco de mas de 90 grados ; tal es el ángulo *FAB*.

293 El *ángulo agudo* es aquel cuya medida es un
13. arco que no llega á 90 grados ; los ángulos *DAF* , *FAE* son agudos.

De todo esto es facil inferir 1.° *que son iguales unos con otros todos los ángulos rectos* , pues todos cogen 90 grados. 2.° *que no son iguales unos con otros todos los ángulos obtusos* , pues puede un ángulo obtuso pasar mas ó menos

de

de 90 grados que otro. 3.° *que tampoco son iguales unos con otros todos los ángulos agudos*, pues puede un ángulo agudo acercarse mas ó menos que otro al ángulo recto. Fig.

294 Llámase *complemento* de un ángulo agudo lo que se le debe añadir para que valga 90 grados. El ángulo *EAF* es complemento del ángulo *DAF*, porque juntos valen el ángulo recto *DAE*. 13.

Quando el ángulo es obtuso, su complemento es lo que se le debe quitar para que dicho ángulo valga 90 grados; el complemento del ángulo *FAB* es el ángulo *FAE*. 13.

295 *Suplemento* de un ángulo es el ángulo que se le debe añadir, para que la suma de los dos valga dos ángulos rectos ó 180°; el ángulo *DAF* es suplemento del ángulo *FAB*. 13.

296 Como el valor de los ángulos no se distingue del valor de los arcos que los miden, quanto hemos dicho del complemento y suplemento, respecto de aquellos, se aplica igualmente á estos.

297 Infiérese de la naturaleza del complemento y suplemento, que *los ángulos y arcos iguales tienen complementos ó suplementos iguales*; y recíprocamente, que *son iguales los ángulos ó los arcos quando tienen complementos ó suplementos iguales.*

298 El método declarado (287) para valuar un ángulo, nos autoriza para inferir 1.° *que una linea recta* AB, *que cae sobre otra* CD, *forma con esta dos ángulos* BAC, BAD *que valen juntos* 180°. 12.

Fig. Porque podemos considerar el punto *A* como el centro de un círculo, cuyo diámetro será *CD*; pero los dos ángulos *BAC* y *BAD* tienen por medida *BC* y *BD*, los quales componen la semicircunferencia; valen, pues, juntos 180°.

14. 299 2.° Que *si desde un mismo punto* A *se tiran tantas rectas* AC, AE, AF, AD, AG *&c. quantas se quisiere, todos los ángulos juntos* BAC, CAD, DAE, EAF, FAG, GAB *que comprehenden, no pasarán de* 360°. Porque no pueden coger mas que toda la circunferencia.

300 De lo dicho (298) hemos de inferir que *todo diámetro* DB, v. gr. *divide la circunferencia en dos partes iguales.*

14. Porque ya que los dos ángulos *DAF* y *FAB* cogen juntos un arco de 180°, cogerán la mitad de toda la circunferencia la qual consta de 360°.

15. 301 *Si dos lineas rectas* AC, AD *tiradas desde el extremo* A *de otra linea forman con esta dos ángulos* BAC, BAD, *cuya suma valga dos ángulos rectos, dichas dos lineas serán una sola y misma linea.*

Tírense desde el punto *A* á los dos puntos *E* y *F*, el uno mas arriba y el otro mas abaxo de la linea *AC*, las lineas rectas *AE*, *AF*. Si las dos lineas *AC*, *AD* no formasen una sola y misma linea *DAC*, la linea *AD* prolongada ácia *C*, pasaría mas arriba ó mas abaxo de la linea *AC*.

1.° Si pasase mas arriba, y fuese v. gr. la linea *DAF*; la suma de los ángulos *BAD*, *BAF* sería igual á la de dos án-

ángulos rectos (298). Pero por lo supuesto la suma de Fig.
los dos ángulos *BAD*, *BAC* es tambien igual á la de dos rectos. Luego la suma de los ángulos *BAD* y *BAF* sería igual á la de los ángulos *BAD*, *BAC*; es patente que esto no puede ser.

2.° Si pasase debaxo, y fuese v. gr. la linea *DAE*; la suma de los ángulos *BAD*, *BAE* sería igual á la de dos ángulos rectos (298). Pero por lo supuesto, la suma de los ángulos *BAD* y *BAC* es tambien igual á la de dos rectos; luego la suma de los dos ángulos *BAD* y *BAE* sería igual á la de los ángulos *BAD*, *BAC*; y como es tambien patente que esto no puede ser, resulta que la linea *DA*, prolongándola, es la misma linea *AC*, y por consiguiente las dos lineas *AD* y *AC* son una sola y misma linea.

302 Una vez que son iguales los ángulos quando son iguales sus suplementos (297), se sigue que *los* 16.
ángulos BAC, EAD *opuestos al vértice, y formados por las dos rectas* BD *y* EC *son iguales.*

Porque *BAC* tiene por suplemento *CAD*, y *EAD* tiene tambien por suplemento *CAD*. Luego &c.

De las Perpendiculares y Obliquas.

303 Dícese de una linea recta que es *perpendicular* á otra linea recta, quando cae sobre esta sin inclinarse ni al 17.
uno ni al otro lado; tal es la linea *AC* respecto de la *BD*.

304 Infiérese de aquí 1.° *que quando una linea es per-*

Fig. *perpendicular á otra linea, forma con esta dos ángulos iguales y rectos* (298).

305 2.° Que *si una linea que encuentra otra, forma con ella ángulos rectos y por consiguiente iguales, es indispensablemente perpendicular á esta linea.*

Porque si forma ángulos iguales, no se inclina ni ácia el un lado ni ácia el otro; luego será perpendicular (303).

17. 306 3.° Que *quando una linea* AE *es perpendicular á otra linea* BD, *esta es tambien perpendicular á la linea* AE.

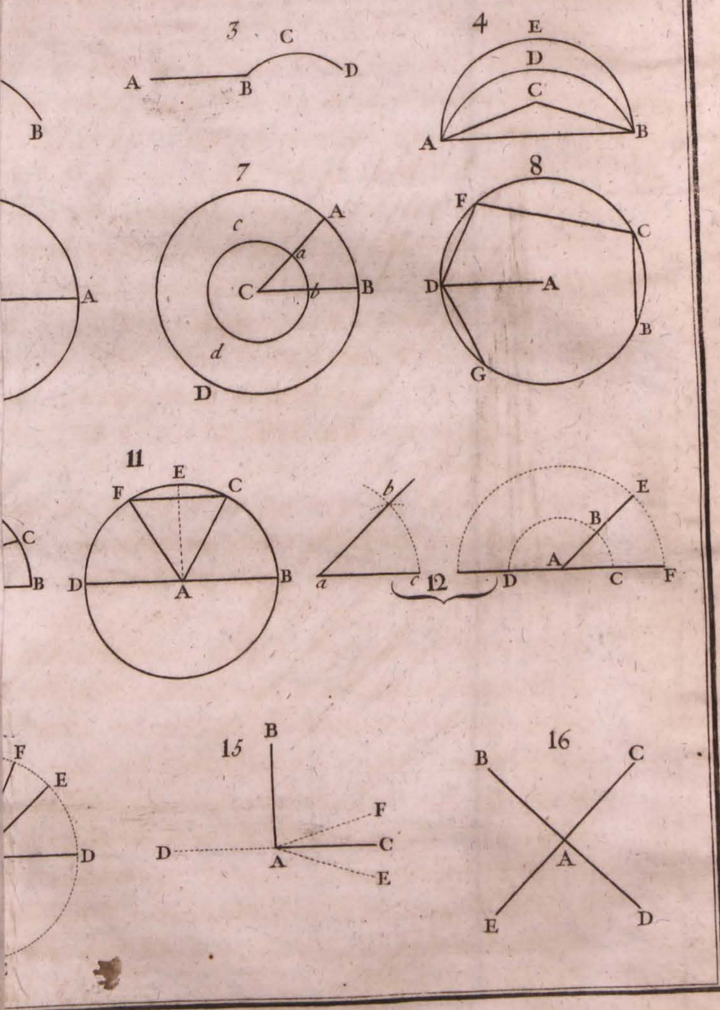
Porque siendo *AE* perpendicular á *BD*, los ángulos *ACB*, *ACD* serán iguales; pero *ACD* es igual á *BCE* (302); luego *ACB* es igual á *BCE*; luego la linea *BC* no se inclina ni ácia *AC* ni ácia *EC*; luego es perpendicular á *AB*.

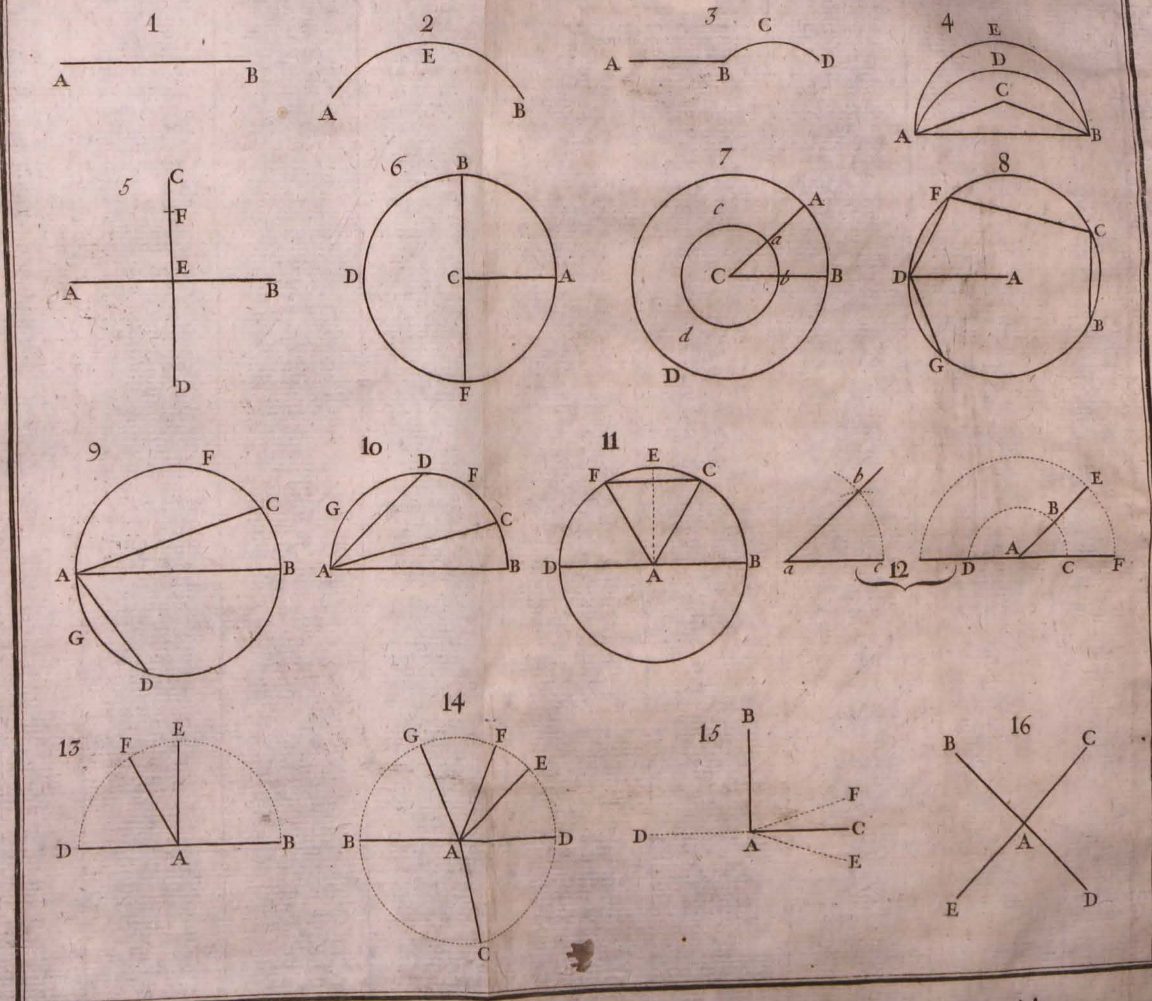
17. 307 4.° Que *si un punto* A v. gr. *de una linea* AC *perpendicular á* BD, *dista igualmente de los puntos* B *y* D, *todos los demas puntos de la linea* AC *distan tambien igualmente de* B *y* D.

Porque si el punto *F*, v. gr. ú otro qualquiera punto de la perpendicular, no distase igualmente de *B* y *D*, no podria menos la linea *AC* de inclinarse ácia algun lado, y por lo mismo no sería perpendicular á *BD*, contra lo que suponemos. Lo que acabamos de probar respecto del punto *A*, y de otro qualquier punto de la perpendicular.

18. 308 5.° Que *desde un punto* C, *fuera de una linea* AB, *no se puede tirar mas de una perpendicular* CD *á dicha linea.*

Para probarlo tomarémos en la *AB* dos puntos *A* y *B* igual-


3
A B C D
4
A B C D E
7
A B C D a b c d
8
A B C D F G
11
A B C D E F
12
a b c
A B C D E F
15
A B C D E F
16
A B C D E


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

igualmente distantes de *C*. Sentado esto, ya que la linea *CD* es perpendicular á *AB*, y su punto *C* está á igual distancia de *A* y *B*, todos los demas puntos de esta perpendicular han de estar á igual distancia de *A* que de *B* (307); luego el punto *D* dista igualmente de *A* y *B*. Pero de aquí se infiere que ninguna otra linea, qual sería *CF*, tirada desde el punto *C*, puede ser perpendicular á *AB*; porque si *CF*, v. gr. fuese perpendicular á *AB*, por estar su punto *C* á igual distancia de *A* y *B*, todos sus demas puntos lo estarian tambien (307). Pero el punto *F* no está á igual distancia de *A* y *B*, porque ya que lo está el punto *D*, el punto *F*, puesto entre *D* y *B*, estará mas cerca de *B* que de *A*. Luego la linea *CF* no es perpendicular á *AB*. Lo propio probarémos respecto de otra linea qualquiera tirada desde el punto *C*, distinta de la linea *CD*. Fig. 18.

309 Del mismo modo probaríamos que *desde un punto* D *que está en la misma linea* AB, *no se le puede levantar mas de una perpendicular.*

Discurriríamos del mismo modo, sin mas diferencia que la de tomar en la linea *AB* dos puntos *A* y *B* á iguales distancias del punto *D*, así como en la proporcion antecedente tomamos *A* y *B* á iguales distancias del punto *C*.

310 Infiérese de esta proposicion *que dos lineas perpendiculares á otra, jamas se pueden encontrar, aunque prolongadas al infinito.*

Porque si dichas perpendiculares se encontrasen, desde su punto de concurso habria dos perpendiculares, tiradas á la

Fig. la otra linea, lo que no puede ser, segun acabamos de demostrar.

311 Dícese de una linea que es *oblicua* respecto de otra, quando se inclina ácia algun lado; tal es la linea *FK*
19. respecto de la *GH*. De donde podrémos inferir

312 1.° Que *una linea oblicua respecto de otra, forma con esta dos ángulos desiguales, son suplemento el uno del otro* (295).

313 2.° Que *si una linea que encuentra otra, forma con ella dos ángulos desiguales, será oblicua respecto de ella*, pues por razon de formar los dos ángulos desiguales, se inclina mas ácia el un lado que ácia el otro.

18. 314 *Si desde un mismo punto* C *se tiran á la linea* AB *la perpendicular* CD, *y la oblicua* CF, *será la perpendicular* CD *mas corta que la oblicua* CF.

Prolónguese la *CD* hasta *H*, de suerte que sea *HD* igual á *CD*, y tírese la oblicua *HF*. Esta oblicua *HF* será necesariamente igual á la otra oblicua *CF*; porque ya que la *CH* es perpendicular á la *AB*; esta *AB* será tambien perpendicular á la *CH* (306). Pero su punto *D* está á igual distancia de los dos puntos *C* y *H*, por ser *HD* igual á *CD*; por consiguiente otro qualquiera punto *F*, v. gr. de la perpendicular *AB* (307), está tan distante de *C* como de *H*: luego *HF* es igual á *CF*.

Sentado esto, la linea *CDH* es mas corta que la linea *CFH* (263); luego la mitad de *CDH* es mas corta que la mitad de *CFH*; pero la mitad de *CDH* es *CD*

y,

y la mitad de *CFH* es *CF* ; luego la perpendicular *CD* es mas corta que la oblicua *CF*. Fig.

315 De esta última proposicion se infiere lo que diximos antes (263); es á saber que *la perpendicular es la linea mas corta que desde un punto se le puede tirar á otra linea* , y que por lo mismo es *la linea perpendicular la medida cabal de la distancia que hay entre dos puntos.*

316 *Entre todas las oblicuas* CF , CG *y* CE *que desde un punto* C *se le pueden tirar á una linea* AB , *la oblicua* CG *mas distante de la perpendicular* CD *será la mas larga* , *y las que se tiraren á distancias iguales de la perpendicular* , *serán iguales unas con otras* , *y recíprocamente.* 18.

1.° Para probar que la oblicua *CG* es mas larga que la oblicua *CF* , prolónguese la perpendicular *CD* hasta el punto *H* , de modo que *HD* sea igual á *CD* , y desde el punto *H* tírense las lineas *HF* y *HG* ; será facil probar, como antes (314) , que estas dos lineas son iguales respectivamente á las oblicuas *CF* y *CG* , así *CF* es la mitad de *CFH* , y *CG* la mitad de *CGH*. Pero *CGH* es patentemente mas larga que *CFH* , porque se aparta mas del camino mas corto *CDH* (263) ; luego la oblicua *CG* es tambien mas larga que la oblicua *CF*.

2.° Las oblicuas *CF* y *CE* igualmente distantes de la perpendicular , son iguales unas con otras ; porque si se tira la *HE* serán las dos lineas *CFH* y *CEH* iguales , pues se apartan igualmente de la linea recta *CDH* ; por consiguien-

te

Fig. te sus mitades *CF* y *CE* serán tambien iguales. La recíproca se demostraría del mismo modo.

317 De donde resulta que *desde un mismo punto* C *no se le pueden tirar á una linea mas de dos lineas iguales*, porque no se pueden tirar mas de dos oblicuas igualmente distantes de la perpendicular.

17. 318 De lo que hemos dicho en orden á las perpendiculares y á las oblicuas, debe inferirse *que hay tres señales para conocer si una linea* AC *es perpendicular á otra* BD. 1.° quando *AC* forma con *BD* dos ángulos rectos, y por consiguiente iguales (305). 2.° quando tiene dos de sus puntos á igual distancia cada uno de dos puntos de la segunda linea (307 y 264). 3.° quando es la mas corta que desde un punto dado se le pueda tirar á la otra linea (315).

319 Ya es facil, despues de lo dicho hasta aquí,
20. percibir lo que se deberá practicar para *levantar una perpendicular en medio de una linea* AB.

Se ha de poner una punta del compas en *B*, y con una abertura mayor que la mitad de *AB* se trazará un arco *JK*; se plantará despues la punta del compas en *A*, y con la misma abertura se trazará un arco *LM*, el qual corte el primero en el punto *C* que estará á igual distancia de *A* y de *B*. Por el mismo método se determinará otro punto *D* con la misma ú otra abertura de compas. Finalmente, por los dos puntos *C* y *D* se tirará la linea *CD*, la qual será perpendicular en medio de *AB*. Porque por el modo con

que

que tiramos la *CD*, consta que sus dos puntos *C* y *D* están ambos á igual distancia de *A* que de *B*, por consiguiente la *CD* no se inclina ni al uno ni al otro lado respecto de la *AB* (318). Fig.

320 Si *desde un punto* E *fuera de la linea* AB *se quiere tirar una perpendicular á dicha linea*, se plantará la punta del compas en *E*, y con una abertura mayor que la mas corta distancia entre el punto *E* y la linea *AB*, se trazarán con la otra punta dos arcos que corten *AB* en los puntos *C* y *D*; desde estos puntos como centros, y con una abertura de compas mayor que la mitad de *CD*, se trazarán succesivamente dos arcos que se corten en un punto *F*, por el qual y por el punto *E* se tirará la linea *FE*, esta será perpendicular á *AB* (318), pues tendrá dos puntos *E* y *F* igualmente distantes cada uno de los dos puntos *C* y *D* de la linea *AB*. 21.

321 Si el punto *E* por el qual se quiere que pase la perpendicular, estuviera en la misma linea *AB*, se practicaría lo propio. 22.

Finalmente, si estuviese en tal situacion el punto *E*, que no se pudiese señalar cómodamente, sino uno de los dos puntos *C* ó *D*, se prolongaría la linea *AB*, y se practicaría la misma operacion. La figura 24 es para quando se quiere levantar una perpendicular en el extremo de la linea *AB*. 23. 24.

De las Paralelas.

322 Dos lineas rectas trazadas sobre un mismo plano

Fig. no son *paralelas* quando están en todos sus puntos á igual distancia la una de la otra, ó, lo que es lo mismo, quando siguen tal direccion, que todos los puntos de la una están
25. igualmente distantes de la otra. Las lineas *AB* y *CD* son paralelas. De aquí se puede inferir

323 1.° Que *las paralelas, aun quando se las prolongase infinitamente, no se pueden encontrar*, pues han de estar por su naturaleza siempre á la misma distancia la una de la otra.

324 2.° Que *las lineas* EF, GH *tiradas desde la una paralela perpendicularmente á la otra, son iguales*, pues estas perpendiculares miden la distancia que hay entre las dos paralelas (315), cuya distancia es siempre una misma (322).

325 3.° Que *si dos lineas fueren paralelas, otra linea que sea paralela á la una, será tambien paralela á la otra.*

Porque la tercer linea no puede estar en todos sus puntos á igual distancia de la una de las dos paralelas, sin estar tambien en todos sus puntos á igual distancia de la otra paralela.

326 Sin embargo de lo que acabamos de decir de las lineas paralelas, suelen considerarlas algunas veces los matemáticos como lineas que se encontrarian prolongadas al infinito. Porque aunque estén separadas por algun intervalo determinado, y por consiguiente limitado, dos lineas cuya longitud se supone infinita, dicho intervalo se puede considerar como ninguno respecto de la infinita longitud de di-

chas

chas lineas. Por lo que, *dos lineas que solo se encuentran prolongadas al infinito, y dos lineas paralelas, son una misma cosa*; como tambien podemos considerar recíprocamente *dos lineas paralelas como dos lineas que se encontrarian prolongadas al infinito.* En el discurso de esta obra se nos proporcionarán ocasiones de manifestar quan util y exâcto es este modo de considerar las paralelas. Fig.

327 *Dos lineas paralelas como* AB *y* CD, *cortadas con otra linea* EF, *llamada* secante, *están igualmente inclinadas ácia un mismo punto* E *de la secante.* 26.

Porque si las dos paralelas *AB* y *CD* no estuviesen igualmente inclinadas respecto de la *EF* ácia el punto *E*; de modo que la paralela inferior, v. gr. estuviese mas inclinada que la superior ácia el mismo punto, dichas dos lineas se irian arrimando la una á la otra, y por consiguiente no serian paralelas, contra lo supuesto.

328 Forma toda secante con las paralelas varios ángulos en que hemos de parar la consideracion. Los unos están entre las paralelas, y se llaman *internos*; tales son los ángulos *J,K,L,M.* Los otros están fuera de las paralelas, y 26.
se llaman *externos*; tales son los ángulos *G* y *N* en la parte de arriba, y *P* y *H* en la de abaxo. Quando se comparan de dos en dos los ángulos, ya internos, ya externos, se llaman *alternos* aquellos que están á distintos lados de la secante, el uno á la derecha y el otro á la izquierda, el uno arriba y el otro abaxo; los ángulos *J* y *M* son *alternos internos*, y tambien los dos *L* y *K*. Los dos ángu-

Fig. los *N* y *P* son *alternos externos*, y lo son tambien los dos *G* y *H*.

329 *Los dos ángulos que forman las paralelas á un mismo lado de la secante, el uno exterior y el otro interior, como los ángulos* M *y* N, *son iguales.*

Porque una vez que la cantidad de un ángulo estriba en la inclinacion de las dos lineas que le forman (285); y las dos paralelas están igualmente iuclinadas respecto de la secante *EF* (327), síguese que los ángulos *M* y *N* que forman las paralelas con *EF*, son iguales. Por lo mismo el ángulo exterior *H*, y el ángulo interior *K*, que están debaxo de las paralelas, á un mismo lado de la secante, son tambien iguales. Del mismo modo probaríamos que son tambien iguales uno con otro los ángulos *G* y *L* del otro lado de la secante, y tambien los ángulos *P* y *J*. De aquí inferiremos las quatro proposiciones siguientes.

27. 330 1.° *Los ángulos alternos internos* AGH, DHE *son iguales.*

Porque acabamos de probar (329) que *AGH* es igual á *CHF*; pero *CHF* es igual (302) á *DHE*; luego *AGH* es igual á *DHE*.

331 2.° *Los ángulos alternos externos* BGE, CHF *son iguales.*

Porque *BGE* es igual á *AGH* (302); pero hemos visto (329) que *AGH* es igual á *CHF*; luego *BGE* es igual á *CHF*.

332 3.° *Los ángulos* BGH, DHG *son suplemento el uno*

uno del otro; porque *BGH* es suplemento de *BGE*, igual Fig.
á *DHG* (329).

333 4.° *Los ángulos* BGE, DHF, *ó* AGE, CHF *son suplementos el uno del otro*; porque *DHF* tiene por suplemento *DHG*, igual (329) á *BGE.*

334 Todas estas propiedades se verifican quando dos lineas paralelas son cortadas por otra linea; y recíprocamente todas las veces que una linea recta cortare otras dos lineas rectas, de modo que se verifique alguna de estas propiedades, se podrá inferir, que las dos cortadas son paralelas: esto se demuestra del mismo modo sin variar en nada.

335 De las propiedades que acabamos de demostrar 28.
podemos inferir 1.° *que si dos ángulos* ABC, DEF, *vueltos ácia un mismo lado, tienen sus lados paralelos, son iguales.*

Porque si imaginamos el lado *DE* prolongado hasta encontrar *BC* en *G*, los ángulos *ABC*, *DGC* serán iguales (329), y por la misma razon el ángulo *DGC* será igual al ángulo *DEF*; luego *ABC* es igual á *DEF.*

336 2.° Que *si la linea* GH *es perpendicular á las* 25.
otras dos AB, CD, *estas dos lineas son paralelas.*

Porque una vez que *GH* es perpendicular á *AB* y á *CD*, los ángulos alternos internos *GHD*, *HGE* por ser rectos serán iguales; luego las lineas *AB* y *CD* son paralelas.

337 3.° Que *para tirar por un punto dado* C *una* 29.
linea CD *paralela á una linea* AB, es menester tirar á arbitrio por el punto *C* la linea indefinita *CEF*, que corta *AB*

 en

Fig. en un punto qualquiera *E*; despues se tirará por el punto *C* la linea *CD*, que forme con *CE* (290) el ángulo *ECD* igual al ángulo *FEB* que esta forma con *AB*; la linea *CD* tirada por este método, será paralela á *AB* (334).

30. 338 4.° Que *si dos lineas* CD, EF *fueren perpendiculares á otra linea* AB, *serán paralelas una á otra.*

Porque los ángulos en *C* y *E* serán rectos; luego será el ángulo *DCE* suplemento del ángulo *FEC*; luego serán dichas lineas paralelas una á otra (332).

339 5.° Que *si* CD *y* EF *fueren paralelas*, *y fuese la una de ellas pongo por caso* CD, *perpendicular á* AB, *lo será tambien* EF.

Porque los ángulos *DCE*, *FEC* son suplemento el uno del otro (332), una vez que suponemos ser *CD* y *EF* paralelas una á otra; luego será el ángulo *FEC* recto, pues suponemos que lo es el ángulo *DCE*; luego será tambien *FE* perpendicular á la *AB*.

De las Lineas rectas consideradas en el círculo.

31. 340 Llámase en general *secante* del círculo toda linea como *DE*, que encuentra el círculo en dos puntos, y está en parte fuera del círculo.

31. 341 Llamamos *tangente* una linea *AD*, que toca la circunferencia sin cortarla, aunque se la prolongue.

32. 342 *Toda recta* FG, *que corta la circunferencia en dos puntos* A *y* B, *es secante del círculo.*

Tírense los puntos *A* y *B*, donde la recta *FG* encuen-

cuentra la circunferencia, los dos radios CA, CB. Por ser iguales estos dos radios uno con otro, no pueden ser ambos perpendiculares á la recta FG (308), y estarán á igual distancia cada uno de la perpendicular tirada desde el centro C (316); y así la perpendicular CD tirada desde el centro caerá en medio de AB. Pero esta perpendicular CD es menor que el radio CA ó CB, y son tambien mas cortas que estos radios todas las rectas tiradas desde el centro C á qualquiera de los puntos que están entre A y B (316); luego todos los puntos de la recta AB están dentro del círculo. Como son mas largas las oblicuas tiradas desde un mismo punto C á la recta FG, conforme distan mas de la perpendicular CD (316), resulta que si están en la circunferencia los puntos A y B, estarán fuera de ella los puntos de la recta FG que esten entre A y F ó entre B y G; luego será la recta FG secante del círculo (340). Fig.

343 Luego *no encuentra la tangente la circunferencia del círculo, sino en solo un punto*; porque si le encontrara en dos, sería secante (342).

344 *Toda linea perpendicular al extremo de un radio es tangente del círculo.* Quedará probado si probamos que toda perpendicular al extremo del radio no toca la circunferencia sino en solo un punto.

345 Sea, pues, la linea ABD perpendicular al extremo del radio CB; hemos de probar que no toca el círculo sino en solo el punto B. Es constante que si tiramos 33.

Fig. las dos lineas *CE*, *CF*, estas serán oblicuas á la linea *ABD* (308) por ser tiradas desde el mismo punto que el radio perpendicular *CB* ; luego serán estas oblicuas mas largas que el radio perpendicular; tienen por consiguiente sus extremos *E* y *F* fuera del círculo y de la circunferencia. Lo propio demostrarémos respecto de otro punto qualquiera de la circunferencia distinto de *B*, y por consigiente la linea *ABD* toca la circunferencia solo en el punto *B* ; luego es tangente.

346 Y recíprocamente *toda tangente es perpendicular al radio que remata en el punto de contacto.*

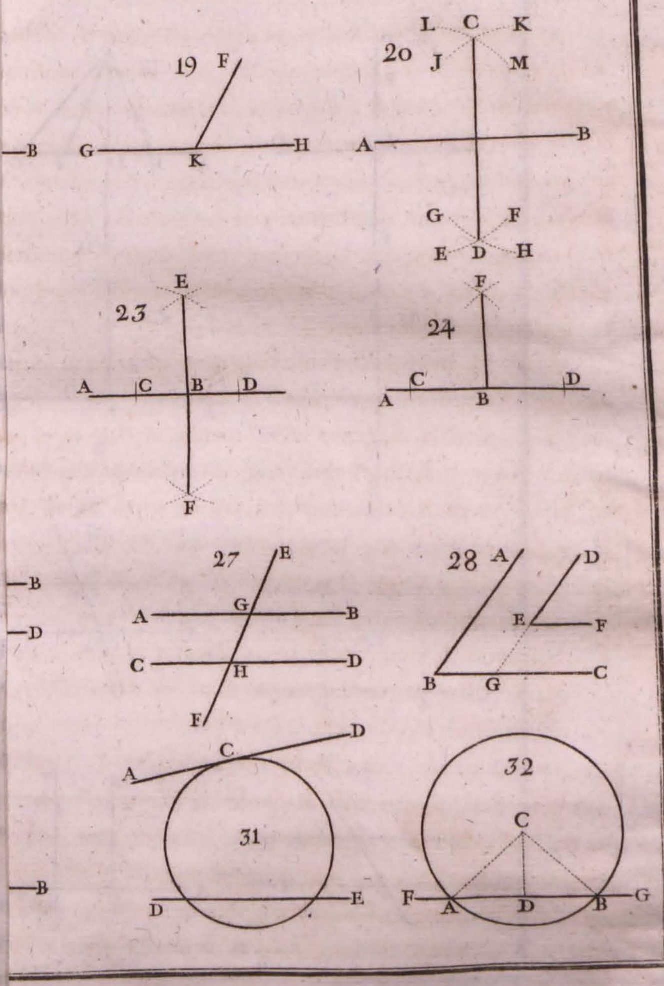
33. Porque si la tangente *ABD* toca el círculo en el punto *B*, donde remata el radio *CB*, es evidente que pues la tangente no corta la circunferencia, no entra en el círculo, y por consiguiente es imposible tirar desde el centro á la tangente una linea mas corta que el radio *CB* ; luego este radio es perpendicular (315) á la tangente, y recíprocamente la tangente es perpendicular al radio (306).

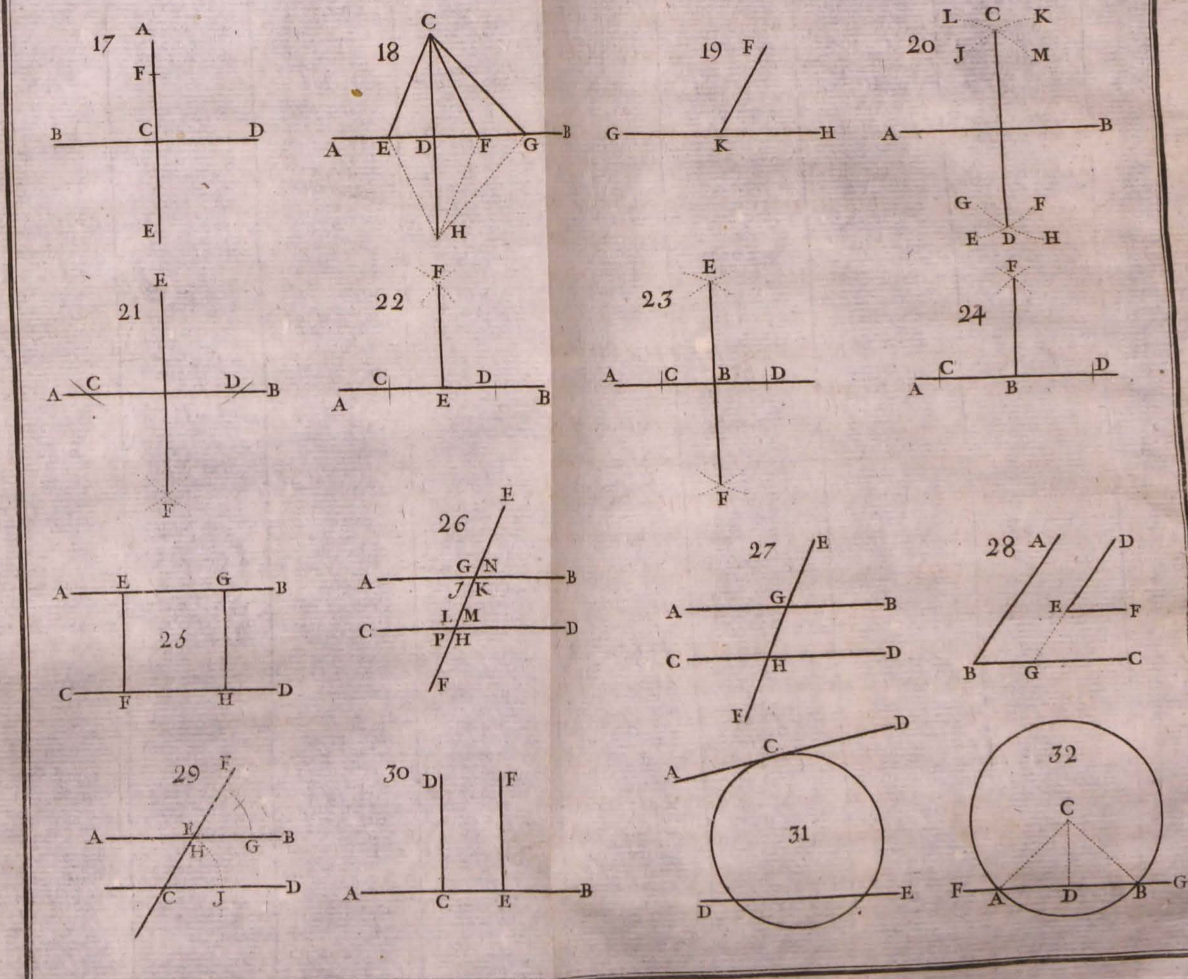
347 Luego por *un mismo punto de la circunferencia no se puede tirar mas de una tangente.*

Porque toda tangente es perpendicular (346) al extremo del radio tirado al punto de contacto; pero por el extremo del radio no puede pasar mas que una perpendicular á dicho radio (309); por consiguiente es imposible tirar dos tangentes á un mismo punto de la circunferencia.

348 Luego tambien *para tirar una tangente al círculo*

33. *por un punto dado* B, *no hay sino tirar á dicho punto un radio*


19
F
G
K
H
20
L C K
J M
A B
G F
E D H
23
E
A C B D
F
24
F
C D
A B
27
E
G
A B
C D
H
F
28
A D
E F
B G C
A C D
31
D E
32
C
F A D B G


17
18
19
20
21
22
23
24
25
26
27
28
29
30
31
32

dio CB , *á cuyo extremo* B *se tirará una perpendicular*, practicando lo dicho antes (321). Fig.

349 *Una perpendicular* EP , *tirada desde el centro* E *de un círculo á una cuerda* FM , *la divide en dos partes iguales.* 34.

Porque ya que la linea *EP* sale del centro del círculo, tiene un punto *E* igualmente distante de los extremos *F* y *M* de la cuerda ; y como á mas de esto es perpendicular á la cuerda, todos sus demas puntos están (307) á igual distancia de los mismos extremos *F* y *M* ; luego el punto *J* está tambien á igual distancia de *F* que de *M*; luego será *J* el medio de la cuerda.

350 Y recíprocamente , *toda recta* EP , *que pasando por el centro* E *de un círculo , divide en dos partes iguales una cuerda* FM , *es perpendicular á esta cuerda.* 34.

Porque si *EP* divide por el medio la cuerda en el punto *J* , tiene este punto *J* á igual distancia de los extremos *F* y *M* , y como pasa tambien por el centro *E* tiene tambien un punto *E* á igual distancia de *F* y *M* ; luego es *EP* una recta que tiene dos puntos *J*,*E* á igual distancia de los puntos *F*,*M* de la cuerda *FM*; luego (318) *EP* es perpendicular á *FM.*

351 *Si una recta* EP , *perpendicular á una cuerda* FM, *la divide por el medio , pasa por el centro del círculo.* 34.

Porque una vez que divide la cuerda por el medio, tiene un punto *J* igualmente distante de *F* que de *M* ; y como es perpendicular, todos sus demas puntos han de estar tambien á igual distancia de los extremos *F* y *M* (307);

Fig. pero el centro *E* es un punto igualmente distante del extremo *F* que del extremo *M* (271); luego el centro *E* es uno de los puntos por donde pasa la perpendicular.

35. 352 *Una recta* EP, *que tirada desde el centro* E *divide en dos partes iguales una cuerda* FM, *divide tambien en dos arcos iguales el arco* FPM, *que tiene por subtensa dicha cuerda, y por consiguiente el ángulo* FEM *que este arco mide.*

Porque esta recta es, segun hemos probado (350) perpendicular á la cuerda *FM*, y tiene todos sus puntos á igual distancia de los extremos *F* y *M* de la cuerda; luego tambien está el punto *P* á igual distancia de *F* que de *M*. Luego si se tiran las *PM*, *FP* serán estas lineas dos cuerdas iguales, y por consiguiente el arco *PRM* será igual (278) al arco *PNF*; luego al arco *FPM*, y al ángulo *FEM* los divide en dos partes iguales el radio *EP*.

36. 353 *Dos cuerdas paralelas* AB, CD *interceptan entre ellas arcos iguales* AC, BD.

Porque si se baxa desde el centro *G* á la *AB* la perpendicular *GJ*, esta perpendicular dividirá en dos partes iguales (349 y 352) cada uno de los dos arcos *AJB*, *CJD*, pues será á un tiempo perpendicular á *AB*, y á su paralela *CD* (339); luego si de los arcos iguales *AJ*, *BJ* se quitan los arcos iguales *CJ*, *DJ*, los arcos restantes *AC*, *BD* han de ser iguales.

354 *Si una cuerda* CD, *y una tangente* HK *son para-*
36. *lelas entre sí, los arcos* JD, JC *que incluyen, serán iguales.*

Por-

Porque si la linea *GJ* pasa por el centro y remata en Fig.
el punto de contacto *J*, será indispensablemente perpendicular á la tangente (346) : será por consiguiente perpendicular á la paralela *CD* (339); luego ya que esta paralela *CD* es una cuerda, el arco *CJD* que subtende, está dividido en dos partes iguales (349 y 352) en el punto *J*.

Luego quando una tangente *HK* es paralela á una cuerda *CD*, el punto de contacto *J* está en medio del arco que dicha cuerda subtende.

355 *Entre todas las rectas* AB, AD, AE *que se pue-* 37.
den tirar á la circunferencia de un círculo desde un punto A, 38.
otro que su centro, ora esté el punto A *en la misma circun-* 39.
ferencia, ora esté dentro, ora esté fuera.

1.° *La recta* AB, *que pasa por el centro, es la mas larga.*

2.° *De las dos rectas* AD, AE, *que no pasan por el centro, la que tiene su extremo* D *mas inmediato al punto* B *de la que pasa por el centro, es la mas larga.*

Tírense los radios *CD*, *CE* á los extremos de las rectas *AD*, *AE* que no pasan por el centro.

Tendremos 1.° *CB* igual á *CD* (271); añadiendo á cada una de estas lineas la parte *AC*, tendremos la linea *AB* igual á la suma de las dos *AC* y *CD*; pero (263) las dos lineas *AC* y *CD* juntas son mayores que la linea *AD*; luego tambien *AB* será mayor que *AD*. Del mismo modo probaríamos que *AB* es mayor que *AE*; esto es, que

la

Fig. la recta *AB* que pasa por el centro es mas larga que otra qualquiera linea *AD* ó *AE* tirada desde el punto *A* á la circunferencia.

2.° Las dos lineas *CO* y *OD* juntas son mayores que la linea *CD* (263); pero *CE* es igual á *CD* (271); luego las dos lineas *CO* y *OD* son mayores que *CE*. Si de la *CE* quitamos *OC*, y la quitamos tambien de la suma de *CO* y *OD*, la recta *OD* será mayor que la recta *OE*. Añadiendo á cada una de estas cantidades la linea *AO*, tendrémos la suma de *AO* y *OD*, esto es la linea *AD*, mayor que la suma de *AO* y *OE*. Pero *AO* y *OE* juntas son mayores que *AE*; luego será *AD* con mas razon mayor que *AE*. Luego &c.

37. 356 Tambien probarémos recíprocamente 1.° *que*
38. *si una recta* AB *tirada desde un punto* A, *otro que el centro,*
39. *á la circunferencia, fuere la mas larga de quantas se pudieren tirar desde dicho punto* A *á la circunferencia; pasará por el centro.*

2.° *Que si ninguna de las dos rectas desiguales* AD, AE *pasare por el centro* C *del círculo, la mas larga* AD *tendrá su extremo* D *mas inmediato al extremo* B *de la que pasare por el centro.*

1.° Ya que, segun acabamos de probar, una recta que no pasa por el centro no es la mas larga de todas las lineas que desde un punto *A*, otro que el centro, se pueden tirar á la circunferencia; es evidente que una recta *AB* pasará por el centro *C* del círculo, si fuere la mas larga de quantas li-

lineas se pudieren tirar desde el punto *A* á la circunferencia. Fig.

2.° La mas larga de las dos rectas *AD*, *AE*, tiradas desde un punto *A*, otro que el centro, á la circunferencia, ha de tener su extremo mas inmediato al extremo *B* de la que pasa por el centro; porque á no ser así, la linea cuyo extremo está mas inmediato al extremo *B* de la recta que pasa por el centro, no sería la mas larga, cuya consecuencia no puede concordar con lo que hemos probado poco ha (355). De todo esto resulta

357 1.° Que *quando dos rectas* AD, AG, *tiradas* 40.
desde un punto A, *otro que el centro, á la circunferencia,* 41.
son iguales; sus extremos D, G *están á igual distancia del* 42.
extremo B *de la recta* AB, *que pasa por el centro, y que por lo mismo serán iguales los dos arcos* BD, BG.

Porque si los extremos de las rectas *AD*, *AG* no estuviesen á igual distancia del extremo *B* de la recta que pasa por el centro, no serian iguales (355).

358 Y recíprocamente, *dos rectas* AD, AG, *tiradas desde un mismo punto* A, *otro que el centro, á la circunferencia son iguales, quando sus extremos están cada uno á igual distancia del extremo* B *de la recta que pasa por el centro.*

Porque hemos visto que si dichas rectas *AD*, *AG* no fuesen iguales (356), estarian sus extremos á distancias desiguales del punto *B*.

359 2.° Que *es imposible tirar desde un punto* A, 37.
otro que el centro de un círculo, tres lineas iguales á la cir- 38.
cunferencia. 39.

Por-

Fig. Porque dos de ellas habrian de estar á un mismo lado
37. respecto de la recta *AB*, que pasa por el centro; y esto
38. no puede ser; porque las rectas *AD*, *AE*, tiradas á un
39. mismo lado de la recta que pasa por el centro, tendrian sus extremos á distancias desiguales del extremo de la que pasa por el centro, y serian por lo mismo desiguales (355).

Por lo que, tres puntos de una misma circunferencia no pueden estar á igual distancia de un mismo punto *A*, otro que el centro; ni es posible que tres puntos de una misma circunferencia, cuyo centro es el punto *C*, sean de otra circunferencia cuyo centro es el punto *A*.

43. Luego *dos circunferencias* FBDF, EBDE *no se pueden encontrar en tres puntos sin confundirse.*

37. 360 *Entre quantas rectas que desde un punto* A, *otro*
39. *que el centro, se pueden tirar á la circunferencia, la linea* AM, *la qual prolongada pasaria por el centro* C, *es la mas corta.*

Probarémos que es la recta *AM* la mas corta, si probamos que otra recta qualquiera *AN* tirada desde el punto *A* á la circunferencia, y cuya prolongacion no pasa por el centro, será mas larga que *AM*. A cuyo fin tírese el radio *CN*.

37. Si está el punto *A* dentro del círculo, las lineas *NA*, *AC* juntas serán mas largas que la linea *NC* (263); pero *NC* es igual á *MC*; luego la suma de las lineas *NA* y *AC* será mayor que *MC*; si de una y otra cantidad se resta la misma linea *AC*, la resta *NA* será mayor que la resta *MA*.

39. Si estuviese el punto *A* fuera del círculo, será la suma

de

de las dos lineas *AN*, *NC* mayor que la linea *AC*; y restando de una parte el radio *NC*, y de otra el radio *MC*, será la resta *AN* mayor que la resta *AM*. Fig.

Y recíprocamente, *si la recta* AM *fuese la mas corta entre quantas lineas se pueden tirar desde un mismo punto* A *á la circunferencia, dicha recta prolongada pasará por el centro* C.

Porque acabamos de probar que si no pasase su prolongacion por el centro *C*, no sería la linea mas corta.

361 *Dos circunferencias excéntricas, esto es que no tienen un mismo centro, que se cortan mutuamente, no pueden encontrarse sino en dos puntos.*

Porque no pueden dos circunferencias encontrarse en tres puntos (359) sin confundirse una con otra. Luego si se cortan no pueden encontrarse sino en dos puntos.

362 Y recíprocamente, *dos circunferencias que se encuentran en dos puntos* B *y* D, *se cortan mutuamente.* 43.

Tírense desde el punto *A*, centro del uno de los círculos, los radios *AB*, *AD* á los puntos donde se encuentran las dos circunferencias. Por ser iguales las dos rectas *AB*, *AD*, ninguna de ellas pasará por el centro *C* del otro círculo *BGDE*, y rematarán ambas en los puntos *B* y *D* equidistantes del extremo *E* de la recta *AE* que pasa por el centro *C* de dicho círculo (357). Figurémonos que desde el mismo punto *A* se tiran infinitas lineas rectas á la circunferencia del círculo *BGDE*; las rectas que remataren en el arco *BGD*, serán mas cortas que los radios *AB*, *AD* (355), y

Fig. y las rectas que remataren en el arco *BED*, serán mas largas que los mismos radios *AB*, *AD* (355). Luego está el arco *BGD* dentro, y el arco *BDE* fuera del círculo *FBDF*; por consiguiente los dos círculos *FBDF*, *BGDEB*, cuyas circunferencias se encuentran en dos puntos, se cortan mutuamente.

363 Luego 1.° *Dos circunferencias que se tocan in-*
44. *terior ó exteriormente, no se encuentran mas que en un punto* E;
45. porque si se encontraran en mas puntos, se cortarian.

44. 364 2.° *Si dos círculos* X *y* Z *se tocan interior ó ex-*
45. *teriormente, la recta* AE *tirada desde el centro* A *del uno al punto de contacto* E, *pasará, prolongada, por el centro* C *del otro círculo.*

Porque siempre será *AE* la mas corta entre quantas rectas se pueden tirar desde el punto *A* al círculo *Z*.

365 Luego, *quando dos círculos se tocan, sus centros y el punto de contacto están en una misma linea recta; y por consiguiente si dos círculos se tocaren interior ó exteriormente, una linea recta tirada desde el centro del uno al centro del otro pasará por el punto de contacto.*

366 Ya que el centro, el medio del arco, y el medio de la cuerda, están todos en una misma linea recta (349, 351 y 352), se podrá inferir que *qualquiera linea que pasare por dos de dichos tres puntos, pasa por el tercero.*

Y como no se puede tirar mas de una perpendicular, al medio de la cuerda, se debe tambien inferir, que *si una per-*

perpendicular á una cuerda pasa por uno qualquiera de dichos tres puntos, pasará indefectiblemente por los otros dos. De estas propiedades podemos sacar Fig.

367 1.° Un método para *dividir un ángulo ó un arco en dos partes iguales, pongo por caso el ángulo* BAC. 46.

Desde su vértice como centro, y con un radio arbitrario, se trazará el arco *DE*; desde los puntos *D* y *E*, tomándolos succesivamente por centros, y con un mismo radio, se trazarán dos arcos que se corten en un punto *G*, por el qual y por el punto *A* se tirará *AG*, la qual, por ser perpendicular en medio de la cuerda *DE* (318), dividirá en dos partes iguales el arco *DJE* (349 y 352), y por consiguiente el ángulo *BAC*, porque los dos ángulos parciales *BAG*, *EAG* tienen por medida (287) los dos arcos *DJ* y *EJ*.

368 2.° Un método para *hacer que pase por tres puntos dados* A, B, C, *que no están en linea recta, una circunferencia de círculo.* 47.

Se tirarán las lineas rectas *AB*, *BC*, que serán dos cuerdas del círculo por trazar. Se levantará una perpendicular (319) en medio de *AB*; se levantará otra en medio de *BC*; el punto *J* donde estas dos perpendiculares se cortaren, será el centro del círculo. Porque este centro ha de estar en la linea *DH* (351), y por lo mismo ha de estar en la linea *FG*; luego ha de estar en un punto comun á ambas lineas; y como no hay otro que el punto *J*, este punto *J* será el centro del círculo.

Si

Fig. 369 Si se tratase de *hallar el centro de un círculo ó de un arco trazado ya*, se echa de ver que se reduciría toda la operacion á señalar tres puntos á arbitrio en dicho arco, y á practicar lo que acabamos de declarar.

370 Ya que no encontramos mas que un punto que satisfaga á la pregunta, hemos de inferir que *por tres puntos dados no se puede trazar mas de un círculo*; y que por consiguiente dos circunferencias de círculo no pueden encontrarse en tres puntos sin confundirse una con otra, conforme quedó probado ya antes de ahora (359).

De los Angulos considerados dentro del círculo.

371 Ya declaramos en otro lugar (287) qual es la medida de los ángulos. Si volvemos á tratar este punto, no es con el fin de dar otro método para medirlos, sino para sentar algunas propiedades que servirán muchísimo en adelante, ya para executar algunas operaciones, ya para facilitar algunas demostraciones.

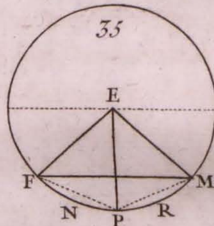
372 *Un ángulo cuyo vértice está en la circunferencia del círculo, tiene por medida la mitad del arco que abraza ó coge.*

Tres son los casos que incluye esta proposicion; porque 1.° puede pasar el uno de los lados del ángulo por el centro del círculo. 2.° puede estar el centro entre los dos lados. 3.° puede estar el centro fuera de dichos lados.

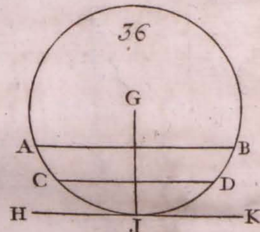
48. 1.° Si el un lado *AB* pasa por el centro *C* del círculo, tírese por el centro la linea *EF* paralela al otro lado *AD*;

por

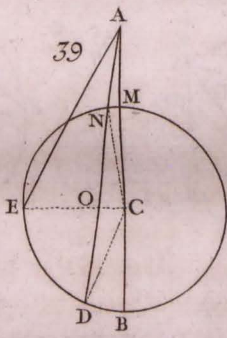
35



36

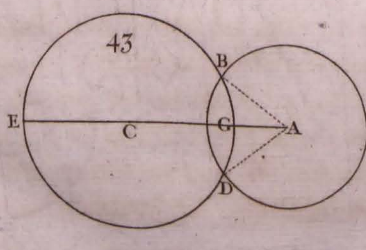


39

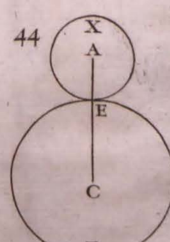


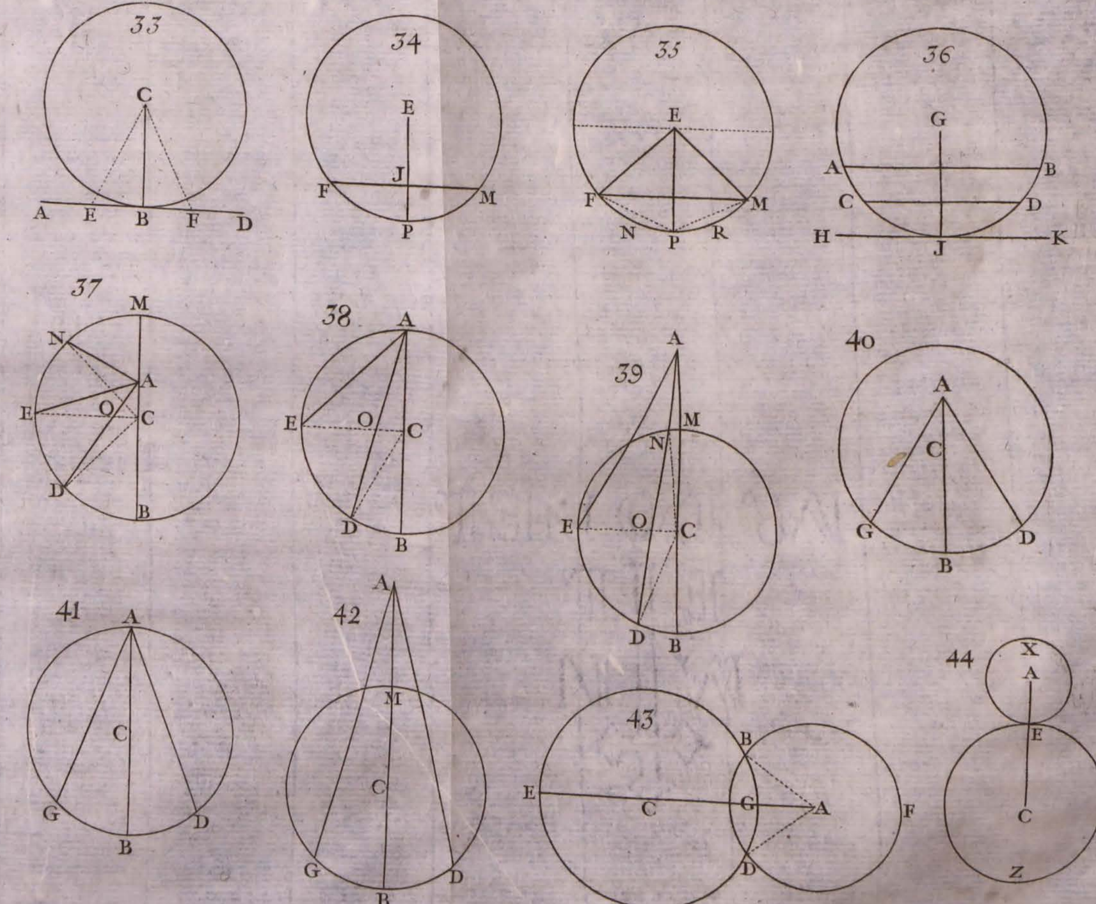
40

43



44




33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44

por causa de las paralelas el ángulo *A* es igual á su exterior *BCF* (329), y tiene por consiguiente la misma medida *BF*; pero el arco *BF* es la mitad del arco *BD*, porque *BF* es igual á su opuesto *EA* (302), igual á *FD*, porque está entre las mismas paralelas (353). Luego tiene el ángulo *A* por medida la mitad del arco *BD* que abraza. Fig.

2.° Si el centro *C* está entre los lados del ángulo *A*, tírese por el centro la linea *AE*, y estará el ángulo *A* dividido en dos ángulos *BAE*, *EAD*, los quales por tener un lado *AE* que pasa por el centro, tendrán cada uno por medida la mitad de sus arcos *BE*, *ED*, segun acabamos de demostrar; por consiguiente todo el ángulo *A* tendrá por medida la mitad de todo el arco *BD* que abraza. 49.

3.° Quando el centro *C* está fuera del ángulo, tírese por el centro la linea *AE*; el ángulo total *EAD* tiene por medida la mitad de todo el arco *ED*; pero la parte *BAE* del ángulo tiene por medida la mitad de *BE*. Luego la otra parte *BAD* tendrá tambien por medida la mitad del arco *BD* que sus dos lados cogen. 50.

373 Síguese de esta proposicion, que *si dos ángulos que tienen sus vértices el uno en el centro del círculo, y el otro en la circunferencia, cogieren un mismo arco, el que tuviere su vértice en el centro será duplo del otro* (287).

374 *El ángulo* A *formado por una cuerda* AD, *y una tangente* AB, *tiene por medida la mitad del arco* ACD *que dicha cuerda subtende.* 51.

Fig. Porque tirando *DE* paralela á la tangente *AB*, el ángulo *DAB* será igual á su alterno *ADE* (330), el qual tiene por medida la mitad del arco *AE* ó de su igual *ACD* (354). Luego el ángulo *A* tiene tambien por medida la mitad del arco que la cuerda *AD* subtende.

375 De la proposicion arriba (372) probada podemos inferir 1.° *que todos los ángulos* BAE, BCE, BDE,
52. *que tuvieren su vértice en la circunferencia, y abrazaren con sus lados el mismo arco ó arcos iguales, serán todos iguales.*

Porque el valor de cada uno será la mitad del mismo arco *BE*.

54. 376 2.° *Que todo ángulo* ABC *cuyo vértice estuviere en la circunferencia, y cuyos lados pasaren por los extremos de un diámetro, será recto ó de* 90°.

Porque abrazará con sus lados la semicircunferencia *AOC*, la qual es de 180°; y como la mitad ha de ser su medida (372) será por consiguiente de 90°.

377 De esta última proposicion sacamos 1.° un mo-
54. do para *levantar una perpendicular en el extremo* B *de una linea* FB; quando no se puede prolongar dicha linea, ni practicar lo que enseñamos antes (321), se practicará lo siguiente.

Desde un punto *D* tomado á arbitrio fuera de la linea *FB*, y con una abertura de compas igual á la distancia *DB*, trácese la circunferencia *ABCO*, que cortará *FB* en algun punto *A*; por este punto y por el centro *D*, tírese el diámetro *ADC*; por el punto *C*, donde este diámetro cor-

corta la circunferencia, tírese al punto *B* la linea *CB*, esta Fig.
será perpendicular á *FB*. Porque el ángulo *CBA* que forma con *FB*, tiene su vértice en la circunferencia, y sus lados pasan por los extremos del diámetro *AC*; este ángulo será pues recto (376); luego *CB* es perpendicular á *FB*.

378 2.° Un método *para tirar desde un punto dado* E 55.
fuera del círculo ABD *una tangente á la circunferencia de este círculo.*

Júntense el centro *C* y el punto *E*, tirando desde el uno al otro la recta *CE*; trácese sobre *CE* como diámetro la circunferencia *CAED*, que corta la circunferencia *ABD* en dos puntos *A* y *D*, por cada uno de los quales y por el punto *E*, tírense las lineas *DE* y *AE*, y se tendrán las dos tangentes que desde el punto *E* se pueden tirar á la circunferencia *ABD*.

Para probarlo, tírense los radios *CD* y *CA*; los dos ángulos *CDE*, *CAE* tienen cada uno su vértice en la circunferencia *ACDE*, y los dos lados de cada uno pasan por los extremos del diámetro *CE*; luego (376) estos ángulos son rectos; luego *DE* y *AE* son perpendiculares al extremo de los radios *CD* y *CA*; luego (344) estas lineas son tangentes en *D* y *A*.

379 Si quisiéramos *formar un círculo cuya cuerda* AB 53.
sea dada, tal que el segmento AOBA *sea capaz de un ángulo dado* abd, *esto es tal que la mitad del arco* AOB *sea la medida del ángulo* abd; resolveríamos la cuestion del modo siguiente.

Fig. Sobre los extremos *A* y *B* de la cuerda *AB* se harán (290) los ángulos *ABO*, *BAO* cada uno igual al ángulo dado *abd*. Por los puntos *A* y *B* tirarémos las lineas *AC*, *BC* perpendiculares á las *AO*, *OB* (321). Desde el punto *C*, donde se encuentran las dos lineas *CA*, *CB*, y con un radio *CB* ó *CA*, trazarémos el círculo *BAD*, cuyo segmento *AOB* será capaz del ángulo propuesto.

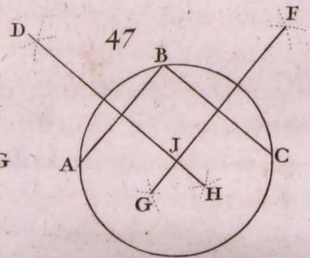
Con efecto, la linea *OB* perpendicular al extremo del radio *CB*, es tangente (344), y el ángulo *ABO* tiene por medida (374) la mitad del arco *AOB*. Si desde un punto *D* de la circunferencia del círculo se tiran las lineas *DA*, *DB*, el ángulo *ADB* tendrá tambien por medida la mitad del arco *AOB* por lo dicho (372); luego el ángulo *ADB* = *ABO*; pero este es igual á *abd*, por lo supuesto; luego *ADB* = *abd*; luego &c.

56. 380 *Un ángulo* BAC, *cuyo vértice está entre el centro y la circunferencia, tiene por medida la mitad del arco* BC *comprehendido entre sus lados, mas la mitad del arco* DE *comprehendido entre estos mismos lados prolongados.*

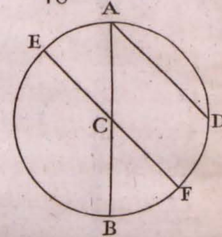
Desde el punto *D*, donde el lado *CA* prolongado encuentra la circunferencia, tírese la *DF* paralela á *AB*, el ángulo *BAC* será igual á *FDC* (329), y tendrá por consiguiente la misma medida que este, esto es, la mitad del arco *FBC* (372), ó la mitad de *BC* mas la mitad de *BF*, ó (por ser *BF* (354) igual á *DE*) la mitad de *BC* mas la mitad de *DE*.

381 *Un ángulo* BAC, *cuyo vértice está fuera del círculo,*

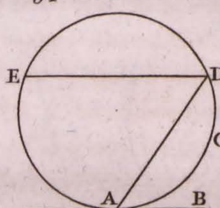
47



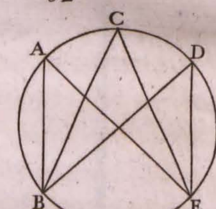
48



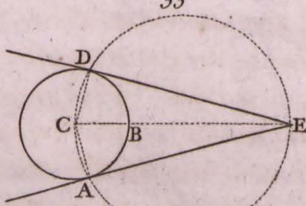
51



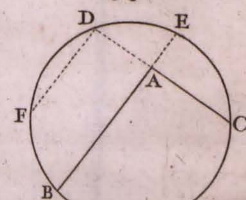
52

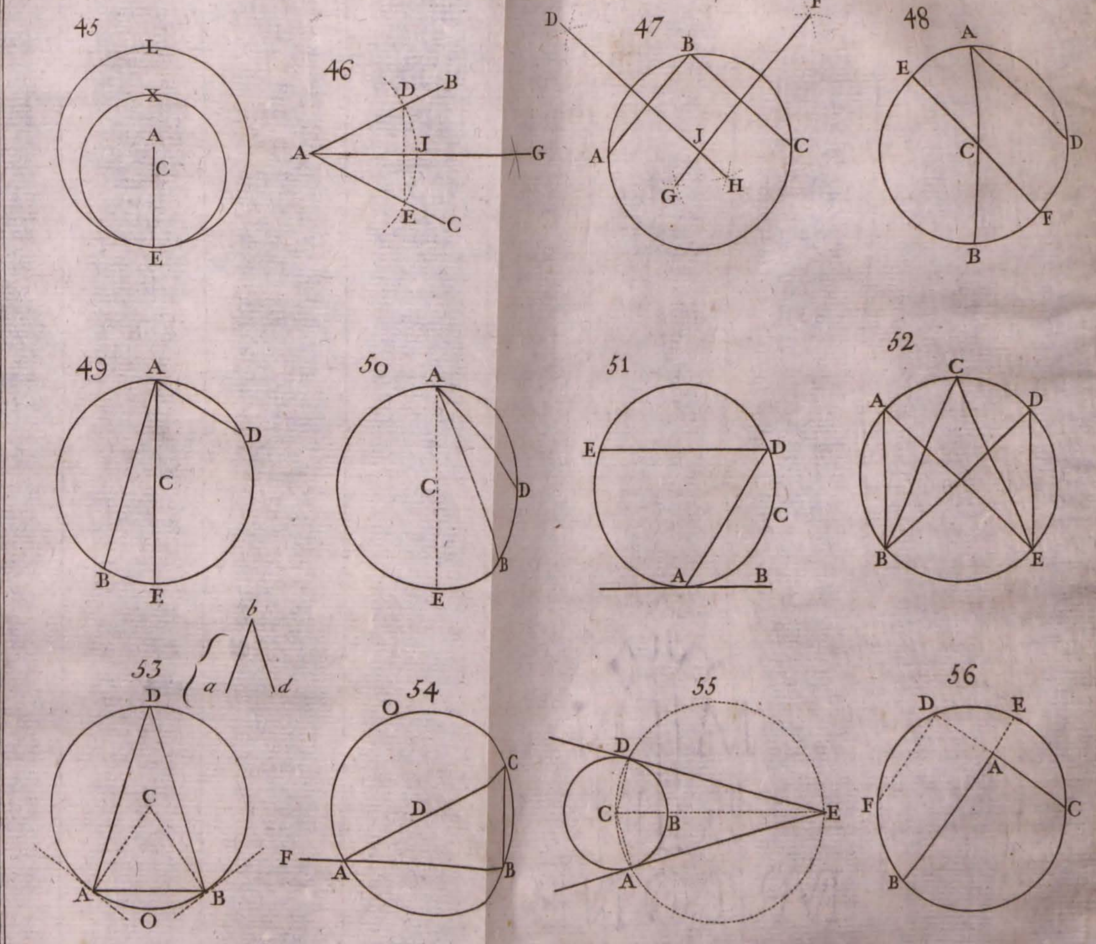


55



56




45
46
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56

lo, tiene por medida la mitad del arco cóncavo BC *menos la* Fig.
mitad del arco convexo ED *comprehendido entre sus lados.* 57.

Por el punto *D*, donde *CA* encuentra la circunferencia, tírese *DF* paralela á *AB*. El ángulo *BAC* será igual á *FDC* (329); tendrá, pues, la misma medida que éste, quiero decir la mitad de *CF*, ó la mitad de *BC* menos la mitad de *BF*, ó (por ser *BF* (354) igual á *ED*) la mitad de *BC* menos la mitad de *ED*.

De las Lineas que incluyen un espacio ó de las Figuras planas.

382 Llámase en general *figura* un espacio terminado ó cerrado por todos lados, por lo que, hay dos cosas que considerar en qualquiera figura; es á saber, las lineas que la forman, cuyo conjunto se llama *ámbito*, *contorno* ó *perímetro* de la figura, y el espacio, ó superficie que el perímetro encierra, que se llama la *area* de la figura. Aquí solo nos proponemos considerar el primero de estos dos puntos, dexando para quando declarémos las propiedades de la superficie, tratar del espacio que coge el perímetro de las figuras.

Decimos de dos ó muchas figuras que son *isoperímetras*, quando son de igual extension sus ámbitos, contornos ó perímetros.

383 Las *figuras planas*, las únicas que considerarémos en estos Elementos, no se distinguen del plano, cuya definicion dimos al principio (257).

384 Las *figuras curvas* son aquellas cuyos puntos no están todos igualmente altos ó baxos; la superfi-

Fig. cie de una bola forma una figura curva.

385 Las *figuras mixtas* son todas aquellas que en parte son planas y en parte curvas.

386 Quando las figuras planas son terminadas por lineas rectas, se llaman *rectilineas* : si son terminadas por lineas curvas, las llamamos *curvilineas*, y *mixtilineas* quando las terminan á un tiempo lineas rectas y lineas curvas. Nuestro intento es tratar solamente de las figuras rectilineas; y por lo que toca á las *curvilineas*, solo harémos mencion del círculo.

387 Para terminar un espacio se necesitan por lo menos tres lineas rectas; y entonces este espacio se llama *triángulo rectilineo*, ó solamente *triángulo*. *ABC* es un triángulo,
58. porque es un espacio cerrado por tres lineas rectas, ó, con mas propiedad, por ser una figura que no tiene sino tres ángulos.

Es evidente que *en todo triángulo la suma de dos lados, tomados como se quisiere, es siempre mayor que el tercero*; AB *mas* BC, v. gr. *vale mas que* AC; porque siendo *AC* la linea recta que vá desde *A* á *C*, es el camino mas corto (263) para ir desde el uno de los dos puntos al otro.

388 Un triángulo cuyos tres lados son iguales, se
59. llama *equilátero*.

389 Aquel cuyos dos lados solos son iguales, se lla-
60. ma *isósceles*.

390 Y aquel cuyos tres lados son todos desiguales, se
61. llama triángulo *escaleno*.

El

391 El lado inferior de todo triángulo suele llamarse *base* de dicho triángulo, bien que se puede considerar como base qualquiera de los demas lados. El lado *AC* es la base de los triángulos que estas figuras representan. Fig. 58,59, 60,61, 62,63,

392 La linea perpendicular tirada desde el vértice de un ángulo á la base, se llama *altura del triángulo*. *BD* perpendicular á *AC* es la altura del triángulo *ABC*. 59.

Pero quando dicha perpendicular cae fuera del triángulo, para sacar la altura de esta figura es menester prolongar la base ácia el lado donde cae la perpendicular. Para sacar la altura *BD* del triángulo *ABC*, es menester prolongar la base *AC* hasta el punto *D* donde encuentra la perpendicular baxada desde el vértice *B*. 63.

393 *La suma de los tres ángulos de todo triángulo rectilíneo vale dos ángulos rectos, ó 180°.*

Prolónguese indefinitamente el lado *AC* ácia *E*, y supóngase tirada la linea *CD* paralela al lado *AB*. Sentado esto, el ángulo *BAC* es igual al ángulo *DCE* (329), por ser paralelas las lineas *AB* y *CD*. El ángulo *ABC* es igual al ángulo *BCD* por razon de las paralelas (330); luego los dos ángulos *BAC* y *ABC* valen juntos tanto como los dos ángulos *BCD* y *DCE*, esto es tanto como el ángulo *BCE*; pero *BCE* es suplemento (295 y 298) de *BCA*; luego los dos ángulos *BAC* y *ABC* forman juntos el suplemento de *BCA*; luego estos tres ángulos valen juntos 180°. 58.

394 La proposicion que acabamos de probar manifiesta al mismo tiempo que el *ángulo exterior* BCE *de un*

Fig. *triángulo* ABC, *es igual á la suma de los dos interiores* BAC *y* ABC *que le están opuestos.*

64. 395 De las proposiciones poco ha probadas (393 y 394) sacarémos 1.° *que un ángulo* ADB *es igual á la suma de los dos ángulos* DBE, DEB *del triángulo* DBE *que forman sus dos lados prolongados con la perpendicular* BE.

2.° *que el mismo ángulo será suplemento de los dos ángulos* DFE, DEF *que sus dos lados prolongados forman con la orizontal* EF.

Lo 1.° salta á la vista, por ser el ángulo *ADB* externo al triángulo *DBE* (394).

Lo 2.° se prueba tambien con facilidad; porque los dos ángulos *E* y *F* del triángulo *EFG* valen con el ángulo *G* dos ángulos rectos (393); pero este ángulo *G* es igual á su opuesto *ADE* : luego &c.

Con igual facilidad y por los mismos principios probaríamos, que el ángulo *ADF* es suplemento de los ángulos *B* y *E* que forman con la perpendicular *BE* sus dos lados prolongados; y que vale la suma de los dos ángulos *GFE* y *GEF* que forman sus mismos lados prolongados con la orizontal *FE*.

396 Inferamos de lo probado (393) 1.° *que un triángulo rectilineo no puede tener mas de un ángulo recto*; en cuyo caso se llama *triángulo rectángulo*; tal es el trián-
62. gulo *ABC*, cuyo ángulo *A* es recto. El lado de un triángulo rectángulo, opuesto al ángulo recto, se llama *hypotenusa*. *BC* es la hypotenusa del triángulo rectángulo *BAC*.

2.°

397 2.° Que con mas razon *no puede tener mas de un ángulo obtuso*; en cuyo caso se le llama *triángulo obtusángulo*; tal es el triángulo *ACB*, cuyo ángulo *C* es obtuso. Fig. 63.

398 3.° Pero *puede tener todos sus ángulos agudos*; y en este caso se le llama *triángulo acutángulo*; tal es el triángulo *ABC*. 65.

399 4.° Que *en conociendo dos ángulos ó solamente la suma de dos ángulos de un triángulo, se conoce el tercer ángulo*, restando de 180° la suma de los dos ángulos conocidos.

400 5.° Que *quando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del uno es por precision igual al tercer ángulo del otro*; porque los tres ángulos de cada triángulo valen juntos 180°.

401 6.° Que *los dos ángulos agudos de un triángulo rectángulo son siempre complemento el uno del otro.*

Porque una vez que vale 90° el uno de los tres ángulos de un triángulo, los otros dos juntos han de valer tambien 90° (393).

402 Hemos probado antes (368) que se puede trazar, siempre que se quisiere, una circunferencia de círculo por tres puntos dados, con tal que no estén en linea recta; de donde inferirémos que

Se puede trazar siempre que se quiera una circunferencia de círculo, por los vértices de los tres ángulos de un triángulo.

Esta operacion se llama *circunscribir* un círculo á un triángulo; y *circunscribir un círculo* á una figura qualquiera, es, en general, trazar al rededor de dicha figura un círcu-

lo,

Fig. lo, de modo que todos los ángulos de la figura estén en la circunferencia del círculo. Y *circunscribir una figura* qualquiera á un círculo, es, en general, trazar al rededor de dicho círculo una figura, de modo que todos sus lados toquen dicha circunferencia.

403 De aquí es facil inferir 1.° *que si dos ángulos de un triángulo son iguales, los lados opuestos á dichos ángulos serán tambien iguales*; y recíprocamente *si dos lados de un triángulo son iguales, los ángulos opuestos á estos lados serán tambien iguales.*

66. Porque si trazamos una circunferencia por los tres ángulos *A,B,C*, y fueren iguales los ángulos *ABC*, *ACB*; los arcos *ADC*, *AEB*, cuyas mitades son su medida (372), serán indispensablemente iguales; luego las cuerdas *AC*,*AB* serán iguales (278). Y recíprocamente, si los lados *AC*,*AB* son iguales, los arcos *ADC*, *AEB* serán iguales; luego los ángulos *ABC*, *ACB* que tienen por medida la mitad de estos arcos, serán iguales.

404 Luego *los tres ángulos de un triángulo equilátero son iguales, y vale por consiguiente cada uno el tercio de* $180°$ *ó* $60°$.

67. 405 2.° Que *en un mismo triángulo* ABC *el mayor lado está opuesto al mayor ángulo, el menor lado al menor ángulo*; y recíprocamente.

Porque si el ángulo *ABC* es mayor que el ángulo *ACB*, el arco *ADC* será mayor que el arco *AEB*, y por consiguiente la cuerda *AC* mayor que la cuerda *AB* (279).

La

La recíproca se demuestra del mismo modo. Fig.

De la igualdad de los Triángulos.

406 Hay muchas proposiciones cuya demostracion estriba en la igualdad de algunos triángulos que en ellas se consideran: es, pues, del caso declarar aquí las señales que manifiestan esta igualdad.

407 1.º *Son iguales dos triángulos quando tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados iguales, cada uno al suyo.* Si el ángulo B del triángulo BAC es igual al ángulo E del triángulo EDF; el lado AB igual al lado DE, y el lado BC igual al lado EF; se probará que estos dos triángulos son iguales. 68.

Concíbase la figura ABC sobrepuesta á la figura DEF, de modo que el lado AB esté puntualmente sobre su igual DE; ya que el ángulo B es igual al ángulo E, el lado BC caerá sobre EF (286), y el punto C caerá sobre el punto F, pues, por lo supuesto, BC es igual á EF. Una vez que está el punto A en D, y el punto C en F, es evidente que AC se aplica puntualmente sobre DF, y que por lo mismo convienen perfectamente los dos triángulos.

Luego, *para construir un triángulo en conociendo dos de sus lados y el ángulo que forman*, se tirará una linea DE igual al uno de los lados conocidos: sobre esta linea se formará un ángulo (290) DEF igual al ángulo conocido, y haciendo EF igual al segundo lado conocido, se tirará DF, y estará formado el ángulo que se desea.

2.º

Fig. 408 2.° *Son iguales dos triángulos, quando tienen un*
68. *lado igual á un lado adyacente á dos ángulos iguales, cada uno al suyo.* Si el lado *AB* es igual al lado *DE*, el ángulo *B* igual al ángulo *E*, y el ángulo *A* igual al ángulo *D*, los dos triángulos serán iguales.

Figurémonos el lado *AB* aplicado puntualmente sobre el lado *DE*, *BC* se confundirá con *EF*, por ser el ángulo *B* igual al ángulo *E* (286); por ser el ángulo *A* igual al ángulo *D*, el lado *AC* se confundirá con *DF*; luego *AC* y *BC* se encontrarán en el punto *F*; luego los dos triángulos serán iguales.

Luego, *para construir un triángulo, en conociendo uno de sus lados y los dos ángulos adyacentes*, se tirará una linea *DE* igual al lado conocido: en los extremos de esta linea se formarán (290) los ángulos *E* y *D* iguales á los dos ángulos conocidos: hecho esto, los lados *EF*, *DF* de estos ángulos terminarán por su concurso el triángulo que se deseare construir.

409 Podemos tambien valernos de la última proposicion para demostrar *que las partes* AC, BD *de dos paralelas*
69. *interceptadas entre otras dos paralelas* AB, CD, *son iguales.*

Báxense las dos perpendiculares *AE*, *BF* á la linea *CD*: los ángulos *AEC*, *BFD* son iguales, pues son rectos; y por razon de las paralelas *AC* y *BD*, *AE* y *BF*, el ángulo *EAC* es igual al ángulo *FBD* (335). Fuera de esto, *AE* es igual á *BF* (324); luego los dos triángulos *AEC*, *BFD* sod iguales, porque tienen igual un lado adyacente á dos

án-

ángulos iguales, cada uno al suyo: luego *AC* es igual á *BD*. Fig.

410 3° *Son iguales dos triángulos, quando tienen sus tres lados iguales cada uno al suyo.*

Sea el lado *AB* igual al lado *DE*, el lado *BC* igual al 68.
lado *EF*, y el lado *AC* igual al lado *DF*. Supóngase el lado *AB* puntualmente aplicado sobre *DE*, y el plano *BAC* echado sobre el plano de la figura *DEF*: el punto *C* se confundirá con el punto *F*.

Desde los centros *D* y *E*, y con los radios *DF* y *EF*, trácense los dos arcos *JK* y *HG* que se cortan en *F*; es patente que el punto *C* ha de ser algun punto de *JK*, por ser *AC* igual á *DF*: el punto *C* ha de ser tambien algun punto de *GH*, por ser *BC* igual á *EF*: ha de ser por consiguiente el punto *F* el único punto comun á dichos dos arcos á un mismo lado de *DE*; luego se confunde el un triángulo con el otro, y son por lo mismo iguales.

Luego, *para construir un triángulo cuyos tres lados son* 68.
conocidos, es menester tirar una recta *DE* igual al uno de los tres lados conocidos: desde el centro *D*, y con un radio igual al segundo lado conocido, se trazará el arco *JK*: desde el centro *E* y con un radio igual al tercer lado conocido, se trazará tambien el arco *GH*: finalmente, por el punto de interseccion *F* se tirarán á los puntos *D* y *F* las rectas *FD* y *FE*.

De los Quadriláteros.

411 A los triángulos se siguen los quadriláteros, esto es, las figuras terminadas por quatro lineas rectas; pero lla-

Fig. llamarémos simplemente *quadrilátero* una figura, en la qual
70. no hubiere lado alguno paralelo á otro, cuya figura suelen algunos llamar *trapezoide*.

71. 412 Llamarémos *trapecio* todo quadrilátero, en el qual no hay sino dos lados paralelos como *AD*, *BC*.

72,73 74,75 413 Llamamos *paralelogramo* un quadrilátero, cuyos lados opuestos son paralelos. Por donde se vé que puede haber quatro especies de paralelogramos, que distinguirémos con nombres particulares.

72. 414 1.° Quando los ángulos y lados contiguos del paralelogramo son desiguales, se le llama *romboide*.

73. 415 2.° Si los lados del paralelogramo fueren iguales y desiguales los ángulos contiguos, se le llamará *rombo* ó *losange*,

74. 416 3.° Llámase *rectángulo* el paralelogramo quando son rectos, y por consiguiente iguales todos sus ángulos, y desiguales los lados contiguos.

75. 417 4.° Y se le llama *quadrado* al paralelogramo, quando son iguales los lados y los ángulos.

70. 418 Llamamos *diagonal* en un quadrilátero una línea como *AC* tirada desde un ángulo á su opuesto.

71. 419 El lado inferior *BC* de un quadrilátero suele llamarse *base* de dicho quadrilátero.

71. 420 Llámase *altura* de un quadrilátero la perpendicular *AE* tirada á la base desde el lado opuesto.

70. 421 Ya podemos probar que *todos los ángulos juntos de un quadrilátero* ABCD *son iguales á quatro ángulos rectos.*

Por-

Porque, si tiramos la diagonal *AC*, dividirá el quadrilátero en dos triángulos, cuyos ángulos son los mismos que los del quadrilátero; pero los ángulos de cada triángulo valen dos ángulos rectos (393); luego los ángulos de todo el quadrilátero valen juntos dos veces dos ángulos rectos, ó quatro ángulos rectos. Fig.

422 Tambien probarémos que *en un paralelogramo* ABCD *los ángulos opuestos* A *y* C, *ó* B *y* D *son iguales, como tambien los lados opuestos* AD, BC *y* AB, DC. 72.

Porque ya que los lados *AD*, *BC* son paralelos por la naturaleza del paralelogramo (413), los ángulos *D* y *C* valen juntos dos rectos (332). Por la misma razon *A* y *D* valen juntos dos ángulos rectos; luego *A* y *C* tienen un mismo suplemento *D*; luego son iguales (297). Del mismo modo demostrarémos que *B* y *D* son tambien iguales.

Por lo que mira á la segunda parte de la proposicion, queda probada arriba (409) una vez que son paralelos los dos lados opuestos de un paralelogramo.

423 De donde inferirémos 1.° que *si en un paralelogramo un ángulo* A *es recto, lo serán todos quatro.* 74. 75.

Porque si *C* es recto, una vez que es suplemento de *D* (332), *D* será tambien recto; y como *D* es tambien suplemento de *A*, será tambien recto el ángulo *A*.

424 2.° *Si dos lados* AD, AB *contiguos ó adyacentes á un ángulo* A, *son iguales, los quatro lados serán iguales.* 75.

425 3.° Que las propiedades de los paralelogramos son 1.° *que tengan los lados opuestos paralelos.* 2.° *que tengan*

Fig. *gan estos mismos lados opuestos iguales.* 3.° *que tengan iguales los ángulos opuestos*; y que por consiguiente para saber si una figura de quatro lados es un paralelogramo, basta saber si concurre en ella alguna de estas tres condiciones.

74. 426 La diagonal *AC* divide todo paralelogramo en dos triángulos iguales. Porque estos dos triángulos tienen todos sus lados iguales (422); luego son iguales (410).

427 De aquí inferirémos que *si un quadrilátero* ABCD *tuviere iguales y paralelos dos lados opuestos* AB, CD, *tendrá tambien iguales y paralelos los otros dos lados* AD, BC.

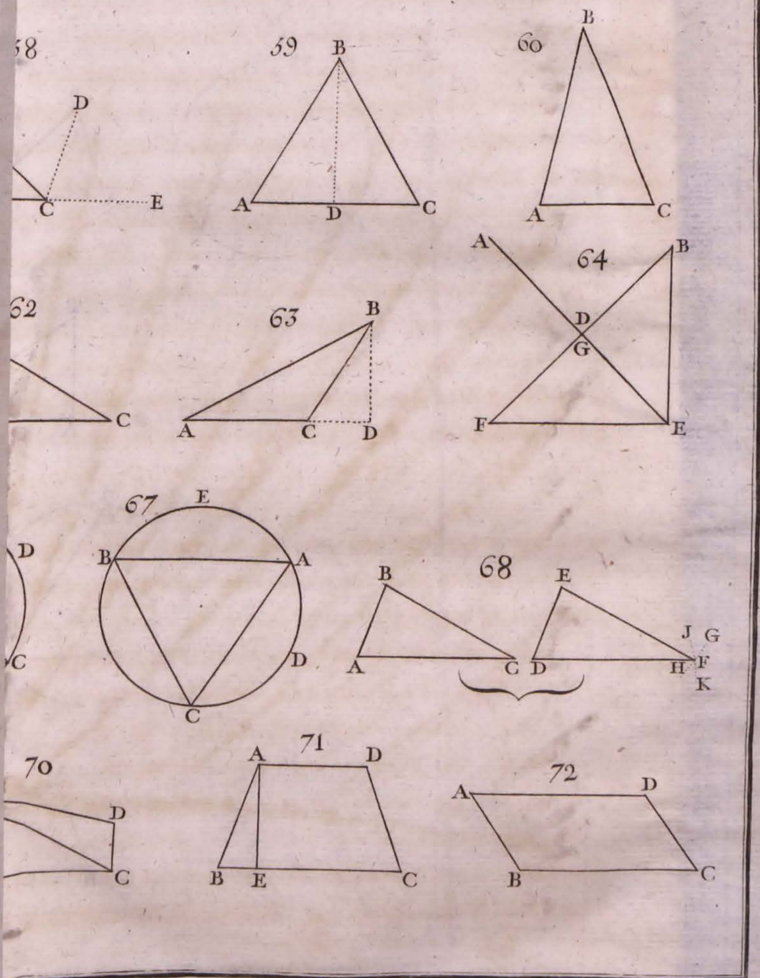
Porque tirando la diagonal *AC*, resultarán los dos triángulos iguales *ABC*, *ADC*; luego el lado *AD* será igual al lado *BC*, y el ángulo *BCA* igual al ángulo *CAD* (330), y por consiguiente (334) *AD* y *BC* serán paralelos.

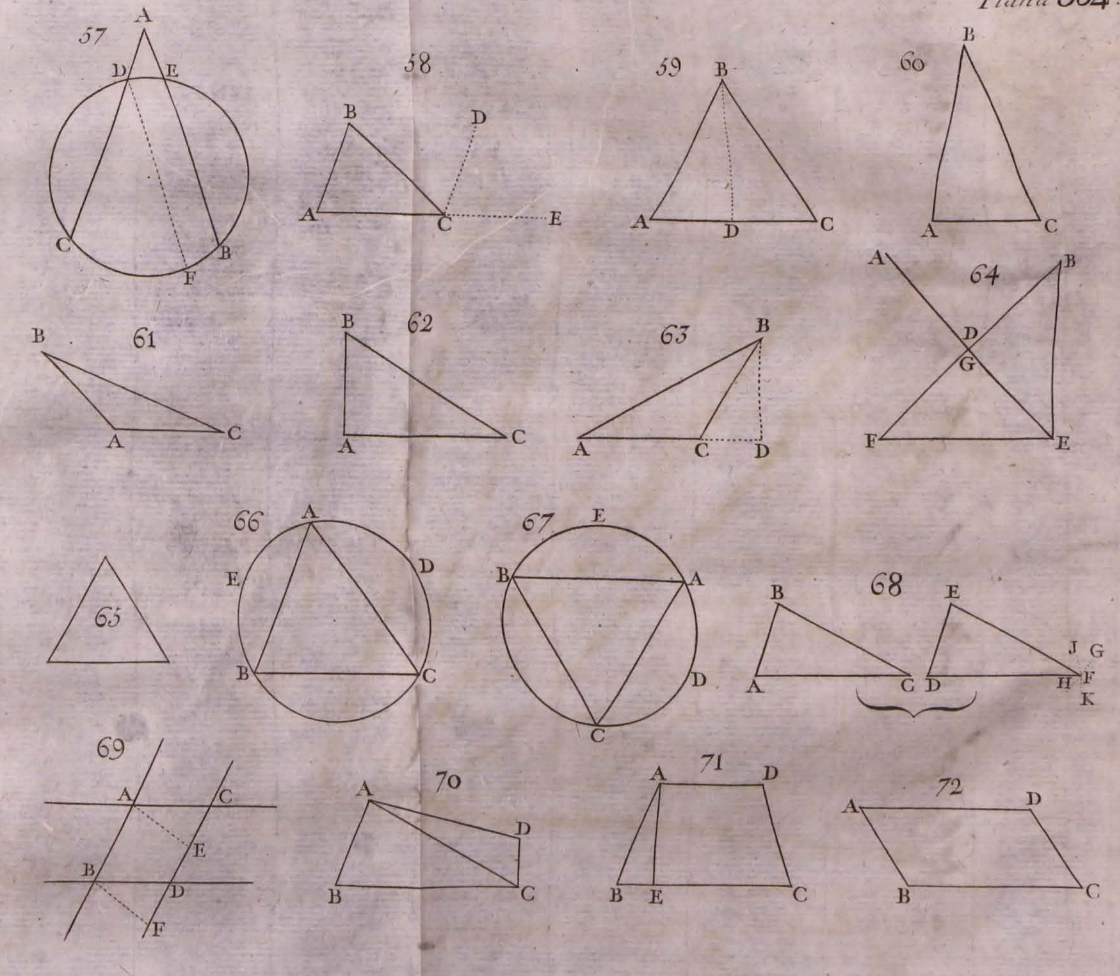
De los Polýgonos.

428 Quando son mas de quatro las lineas que terminan ó cierran un espacio, forman una figura que se llama *polýgono*. Quando tiene

5 lados se llama . . . . *pentágono*,
6 . . . . *exágono*,
7 . . . . *eptágono*,
8 . . . . *octógono*,
9 . . . . *enneágono*,
10 . . . . *dodecágono*.

No aumentamos mas esta lista, porque del mismo modo se dá á conocer una figura con nombrar el número de sus lados,


58
D
C
E
59
B
A
D
C
60
B
A
C
62
C
63
B
A
C
D
64
A
B
D
G
F
E
D
C
67
E
B
A
D
C
68
B
A
C
E
D
J G
H F
K
70
D
C
71
A
D
B
E
C
72
A
D
B
C


57
58
59
60
61
62
63
64
65
66
67
68
69
70
71
72

dos, como usando de estos diferentes nombres, cuya multitud embarazaria inutilmente la memoria: si hemos especificado los expresados, es porque ocurren con mas frecuencia que los demas. Fig.

429 En un polygono se llama *ángulo saliente* todo ángulo cuyo vértice está fuera de la figura: tales son los ángulos *A*, *B*, *D*, *C* &c. 78.

Angulo *entrante* llamamos aquel cuyo vértice se mete en la figura; el ángulo *CDE* es entrante. 77.

430 *Todo polygono puede ser dividido por diagonales tiradas desde uno de sus ángulos, en tantos triángulos, menos dos, quantos lados tiene.*

Basta mirar las figuras *ABCDE* y *ABCDEF* para hacerse cargo de que es verdadera generalmente esta proposicion. 76. 77.

431 Luego para *hallar la suma de todos los ángulos interiores de todo polygono*, se ha de tomar 180° tantas veces, menos dos, como lados tiene.

Porque es evidente que la suma de los ángulos interiores de los polygonos *ABCDE* y *ABCDEF* es la misma que la suma de los ángulos de los triángulos *ABC*, *ACD* &c. en que están divididos los polygonos. Pero la suma de los tres ángulos de cada uno de estos triángulos es de 180°; se ha de tomar, pues, 180° tantas veces quantos triángulos hay; esto es (430) tantas veces menos dos, quantos lados tiene el polygono. 76. 77.

Conviene reparar que en la figura *ABCDEF* el ángu- 77.

Fig. lo *CDE* para ser comprehendido en la proposicion antecedente, se ha de contar, no por la parte *CDE* esterior al polygono, sí por la parte *ACDE* compuesta de los ángulos *ADE*, *ADC*; es un ángulo de mas de 180°, el qual debe considerarse como ángulo, del mismo modo que otro qualquiera que no llegue á 180°. Porque no es otra cosa un ángulo (284) que la cantidad que una linea recta se ha movido al rededor de un punto fixo; y aunque ande mas ó menos de 180° la vuelta que dá se llama siempre ángulo.

432 Si se prolongaren ácia una misma direccion todos los lados de un polygono sin ángulos entrantes, *la su-*
76. *ma de todos los ángulos exteriores valdrá* 360°, *sea el que fuere el número de los lados del polygono.*

Porque cada ángulo exterior es suplemento del ángulo interior contiguo; así los ángulos exteriores é interiores, tomados juntos, valen tantas veces 180° quantos lados hay; pero para que todos los interiores valgan esta suma, no falta sino dos veces 180° ó 360°; luego los ángulos exteriores valen juntos 360°.

433 Llámase polygono *regular* aquel cuyos lados son todos iguales unos con otros, y los ángulos tambien.

Es, pues, facil *hallar*, *siempre que se quiera*, *quanto vale cada ángulo interior de un polygono regular.*

Porque, buscando por lo dicho antes (431) quanto valen juntos todos los ángulos interiores, bastará dividir el valor total por el número de los lados. Si se pregunta v. gr. quanto vale un ángulo interior de un pentágono regu-

gular, como son cinco sus lados, tomo 180° cinco veces Fig.
menos dos, esto es, tres veces; hallo que 540° es el valor de los cinco ángulos interiores; luego ya que son todos iguales unos con otros, cada uno será la quinta parte de 540° ó 108°.

434 *Si en un polygono regular* ABCDE *se tiran des-* 78.
de los vértices A *y* B *de dos ángulos inmediatos las lineas* AF, BF *que dividan cada uno de dichos ángulos en dos ángulos iguales, dichas lineas tomadas desde los vértices de los ángulos* A *y* B *hasta su punto de concurso* F, *serán iguales, y todas las demas lineas* CF, DF, EF *tiradas desde dicho punto* F *á los demas ángulos, serán tambien iguales con las primeras.*

Porque 1.° el ángulo total en *A* es igual al ángulo total en *B*, pues suponemos que la figura es regular; luego el ángulo *H*, mitad del primero, es igual al ángulo *J*, mitad del segundo; luego en el triángulo *AFB* los dos lados *FA* y *FB* son iguales (403).

2.° La linea *FC* es igual á la linea *FB*. Lo demostrarémos si probamos que el triángulo *FBC* es igual al triángulo *AFB*; de donde inferirémos que es isósceles, del mismo modo que el triángulo *AFB*. Los lados *BA* y *BF* del primero son iguales á los lados *BC* y *BF* del segundo; fuera de esto, por lo supuesto, el ángulo *J* comprehendido entre los dos lados del primero es igual al ángulo *K* comprehendido entre los lados del segundo; luego son iguales en todo los dos triángulos (407); luego el lado *FC* es igual al lado *FB*.

Fig. Del mismo modo se demostraría que el lado *FD* es igual al lado *FC*, probando que el triángulo *CFD* es igual en todo al triángulo *BFC* &c.

435 El punto *F* se llama el centro, y las lineas tira-
78. das desde dicho punto á los vértices de los ángulos del polygono, se llaman *radios obliquos*, todos iguales unos con otros, como lo acabamos de probar. Las lineas tiradas desde el punto *F* perpendiculares á los lados del polygono como *FG*, *FP* se llaman *radios rectos* ó *apotemas*.

436 Se le puede *circunscribir*, *siempre que se quiera, un círculo á un polygono regular dado.*

Porque, como el centro del polygono dista igualmente de cada uno de los ángulos, si desde dicho centro y con un intervalo igual al radio obliquo, como *FA*, se traza una circunferencia, pasará por todos los vértices de los ángulos; será por consiguiente el círculo circunscripto al polygono.

78. 437 *Los radios rectos como* FO, FP &c. *de un polygono regular* ABCDE, *son iguales unos con otros.*

Porque, si nos figuramos un círculo circunscripto al polygono propuesto, cada uno de sus lados será una cuerda de dicho círculo, y estará esta dividida en dos partes iguales (349) por las lineas tiradas desde el centro *F* perpendiculares á dichos lados.

Luego en los triángulos *OFA*, *PFA*, el lado *AP* será igual al lado *AO*, el ángulo *FAO* igual al ángulo *FAP* (434), y los ángulos *FPA*, *FOA* serán tambien iguales, pues ambos son rectos; luego los triángu-

los

los *FAP*, *FAO* tienen un lado igual á un lado, é iguales los ángulos adyacentes; luego son iguales (408); luego el lado *FP* es igual al lado *FO*. Fig. 78.

Del mismo modo se podrá probar la igualdad de los demas radios rectos.

438 Luego se puede *inscribir*, *siempre que se quiera, un círculo en un polygono regular dado.*

Porque, ya que son iguales todos los radios rectos, si desde el centro del polygono y con el intervalo de un radio recto como *FG*, se traza una circunferencia, esta tocará todos los lados del polygono, sin pasar mas allá; por consiguiente será inscripto el círculo en el polygono.

439 En virtud de esto podemos suponer, siempre que queramos, que un polygono regular está inscripto ó circunscripto á un círculo.

440 De donde inferirémos 1.° que *el radio recto de un polygono regular corta el lado del polygono en dos partes iguales.*

Porque, este polygono puede estar inscripto en un círculo, conforme acabamos de decir; por consiguiente puede cada lado ser considerado como una cuerda. Pero hemos demostrado (349), que quando una linea pasa por el centro y es perpendicular á la cuerda, parte esta cuerda en dos partes iguales. Concurriendo, pues, en el radio recto las dos circunstancias de pasar por el centro y ser perpendicular al lado del polygono, cuerda del círculo en que está inscripto, ha de cortar el lado del polygono en dos partes iguales.

Fig. 441 2.° Que *el radio obliquo de un polygono regular*
78. *divide en dos partes iguales el ángulo de la circunferencia: el radio* FB *v. gr. divide el ángulo* ABC *en otros dos ángulos iguales, que son* FBA *y* FBC.

Porque, los triángulos *AFB*, *BFC* tienen el lado *FB* comun, el lado *AB* igual al lado *BC*, por ser regular el polygono, y el lado *AF* igual al lado *FC* (434); luego serán tambien iguales los ángulos del un triángulo con los ángulos del otro (409), y serán iguales uno con otro los ángulos *FBA*, *FBC*.

442 *Si se inscriben en un mismo círculo dos polygonos regulares, el que tuviere doblados lados del otro, tendrá ma-*
79. *yor perímetro*; pues los dos lados *AB* y *BC* del octógono juntos son mayores que el lado *AC* del quadrado.

En general, el *perímetro del polygono que tiene mas lados, es mayor que el perímetro del polygono que menos lados tiene, suponiéndolos regulares é inscriptos en el mismo círculo ó en círculos iguales.*

El perímetro del pentágono v. gr. es mayor que el del quadrado; porque siendo la circunferencia del círculo mayor que el perímetro de qualquier polygono inscripto, es evidente, que quanto mas se acerca á la circunferencia el perímetro de un polygono inscripto, tanto mayor será su perímetro. Pero el perímetro del pentágono se arrima mas á la circunferencia que el del quadrado, pues los lados del pentágono son cuerdas menores que los lados del quadrado, y quanto menores son las cuerdas, menos se distinguen del ar-

arco cuyas son ; luego el perímetro del pentágono es ma- Fig.
yor que el del quadrado.

443 *Entre todos los polygonos regulares circunscriptos al mismo círculo ó á círculos iguales , el que mas lados tiene, tiene el menor perímetro.*

Esto es evidente quando el uno de los polygonos tiene doblados lados del otro , porque en el octógono el la-
do *AD* es menor que la parte correspondiente *ABD* del 80.
perímetro del quadrado.

Pero se puede demostrar generalmente la proposicion del modo siguiente : la circunferencia de un círculo es menor que el perímetro de qualquiera polygono circunscripto; por consiguiente , quanto mas se acerca á la circunferencia el polygono circunscripto , tanto menor será su perímetro. Pero el polygono se acerca tanto mas á la circunferencia, quantos mas lados tiene , porque siendo estos lados tangentes , se apartan tanto menos de la circunferencia , quanto son menores ; luego quantos mas lados tiene un polygono circunscripto , tanto menor es su perímetro.

444 Síguese de esto , que si un polygono inscripto ó circunscripto , tuviese una infinidad de lados , su perímetro se acercaría infinitamente á la circunferencia , y se confundiría con ella ; podria , pues , tomarse por la circunferencia misma ; por lo que , *se puede considerar el círculo como un polygono regular de una infinidad de lados.*

445 Es evidente , que si desde el centro de un polygono regular se tiran lineas á todos los ángulos,

Fig. estas lineas formarán ángulos iguales.

Pues estos ángulos tendrán por medida arcos subtensos por cuerdas iguales ; luego , para *hallar el ángulo del centro de un polygono regular , se han de partir* 360° *por el número de los lados.*

Porque estos ángulos juntos tienen por medida toda la circunferencia. En el exágono , v. gr. cada ángulo del centro será la sexta parte de 360° ó será de 60°.

446 Luego *el lado del exágono regular es igual al radio del círculo circunscripto.*

81. Porque si se tiran los radios *AO* y *BO* , el triángulo *AOB* será isósceles , y por consiguiente los dos ángulos *BAO* y *ABO* serán iguales (403) ; pero como el ángulo *AOB* es de 60° , los otros dos juntos han de valer 120° (393) ; luego cada uno de ellos es de 60° ; son , pues , iguales los tres ángulos , y por consiguiente el triángulo es equilátero (404) ; luego *AB* es igual al radio *AO*.

447 Síguese de esta última proposicion que *el perímetro del exágono regular inscripto en el círculo , es seis veces mayor que el radio del círculo ; y por lo mismo dicho perímetro es tres veces mayor que el diámetro.*

Y como la circunferencia del círculo es mayor que el perímetro del exágono inscripto , la circunferencia del círculo es mas de tres veces mayor que su diámetro ; quiero decir , que la razon entre la circunferencia y el diámetro es mayor que la razon de 3 á 1 , ó de 21 á 7.

De

Fig.

De las Lineas proporcionales.

448 *Si sobre el un lado* AZ *de un ángulo qualquiera* 82.
ZAX *se señalan las partes iguales* AB, BC, CD, DE &c. *del tamaño y número que se quisiere; y si despues de tirar á arbitrio por el uno* F *de los puntos de division, la linea* FL *que encuentra en* L *el lado* AX, *se tiran por los otros puntos de division las lineas* BG, CH, DJ, EK &c. *paralelas á* FL: *digo que las partes* AG, GH, HJ &c. *del lado* AX, *serán tambien iguales unas con otras.*

Tírense por los puntos *G*, *H*, *J* *&c.* las lineas *GM*, *HN*, *JO* *&c.* paralelas á *AZ*; los triángulos *ABG*,*GMH*, *HNJ*,*JOK* *&c.* serán todos iguales unos con otros; porque 1.° cada una de las lineas *GM*,*HN*,*JO* *&c.* es igual á *AB*, pues todas (409) son iguales respectivamente á *BC*, *CD*,*DE* *&c.* 2.° los ángulos *GMH*,*HNJ*,*JOK* *&c.* son todos iguales unos con otros, pues son todos iguales al ángulo *ABG* (335). 3.° los ángulos *MGH*, *NHJ*, *OJK* *&c.* son todos iguales unos con otros, pues son todos iguales al ángulo *BAG* (329).

Tienen, pues, todos los triángulos *BAG*, *MGH*, *NHJ* *&c.* un lado igual adyacente á dos ángulos iguales, cada uno al suyo; son, pues, todos iguales unos con otros; luego los lados *AG*, *GH*, *HJ* *&c.* de dichos triángulos son todos iguales unos con otros; luego está con efecto dividida la linea *AX* en partes iguales por las paralelas.

449 De donde resulta 1.° *que en un triángulo* FAL,

las

Fig. *las lineas* BG, CH, DJ &c. *paralelas á la base* FL, *están en progresion arismética.*

Porque ya que, segun acabamos de demostrar, son iguales unos con otros los triángulos *GMH*, *HNJ*, *JOK*, *KPL*, serán tambien iguales unas con otras las lineas *MH*, *NJ*, *OK*, *PL*; luego *CH* es *BG* mas *MH*; *DJ* que es *CH* mas *NJ*, será *BG* mas 2*MH*, por ser *NJ* igual á *MH*. Y como prosiguiendo demostraríamos que *EK* es *BG* mas 3*MH* &c. queda probada la proposicion.

Como esta demostracion no pende del número de las lineas que se tiren paralelas á la base *FL*, es evidente, que aun quando fuese infinito el número de estas paralelas, quedará verdadera la proposicion.

450 2.° Que *si es* AB *la parte que se quisiere de* AG, *la* BC *será semejante parte de* GH; CD *será semejante parte de* HJ: *si*, v. gr. AB *es los* $\frac{2}{3}$ *de* AG, BC *será los* $\frac{2}{3}$ *de* GH, *y así prosiguiendo.*

Lo mismo será de 2, 3, 4 &c. partes juntas de *AF*, comparadas con 2, 3, 4 &c. partes juutas de *AL*; luego una porcion qualquiera *AD* ó *DF* de la linea *AF* es la misma parte de la porcion correspondiente *AJ* ó *JL* de la linea *AL*, que *AB* de *AG*; quiero decir que

$$AD : AJ :: AB : AG$$

y

$$DF : JL :: AB : AG.$$

Tambien se puede decir que $AF : AL :: AB : AG$; luego por ser la razon $AB : AG$ comun á estas tres proporciones podemos decir que

AD

$AD : AJ :: DF : JL$ Fig.

y $AD : AJ :: AF : AL.$

451 Luego *si por un punto* D *tomado á arbitrio en* 83.
uno de los lados AF *de un triángulo* AFL, *se tira una linea* DJ *paralela al lado* FL, *los lados* AF, AL *estarán cortados proporcionalmente*; *quiero decir que tendremos*

$$AD : AJ :: DF : JL$$

y $$AD : AJ :: AF : AL;$$

y mudando los dos medios de lugar (186),

$$AD : DF :: AJ : JL$$

y $$AD : AF :: AJ : AL,$$

sea el que fuere el ángulo *FAL*.

452 Luego 1.° *Si desde un punto* A, *tomado á ar-* 84.
bitrio fuera de la linea GL, *se tiran á diferentes puntos de dicha linea, muchas lineas* AG, AH, AJ, AK, AL, *toda linea* BF *paralela á la linea* GL, *cortará todas estas lineas en partes proporcionales*; *quiero decir, que tendremos*

$$AB : BG :: AC : CH :: AD : DJ :: AE : EK :: AF : FL$$

y $$AB : AG :: AC : AH :: AD : AJ :: AE : AK :: AF : AL.$$

Porque considerando succesivamente los ángulos *GAH*, 84.
GAJ, *GAK*, *GAL*, del mismo modo que hemos consi- 83.
derado el ángulo *FAL*, demostrarémos tambien que todas estas razones son iguales.

453 2.° *La linea* AD, *que divide en dos partes igua-* 85.
les un ángulo BAC *de un triángulo, corta el lado opuesto* BC *en dos partes* BD, DC *proporcionales á los lados correspondientes* AB, AC; *esto es de modo que tenemos* BD : DC :: AB : AC.

Por-

Fig. Porque si por el punto *B* tiramos *BE* paralela á *AD*, la qual encuentra la *CA* prolongado en *E*, considerando el triángulo *CEB*, las lineas *CE*, *CB* estarán cortadas proporcionalmente por la linea *AD* (451), y tendremos *BD* : *DC* :: *EA* : *AC*. Pero es facil probar que *AE* es igual á *AB* ; porque por causa de las paralelas *AD* y *BE*, el ángulo *E* es igual al ángulo *DAC* (329), y el ángulo *EBA* es igual á su alterno *BAD* (330); luego ya que *DAC* y *BAD* son iguales, por ser cada uno la mitad de *BAC*, los ángulos *E* y *EBA* serán iguales; luego los lados *AE* y *AB* son tambien iguales (403); luego la proporcion *BD*: *DC* :: *EA* : *AC*, se tronforma en estotra *BD* : *DC* :: *AB* : *AC*.

454 *Si la linea* DJ *corta proporcionalmente las lineas*
83. AF *y* AL *en los puntos* D *y* J, *de modo que* AF : AD :: AL : AJ, *la linea* DJ *será paralela á* FL.

Porque, segun hemos demostrado (451), la paralela al lado *FL*, tirada desde el punto *D*, ha de cortar en *AL* una parte que tenga la misma razon con *AL*, que *AD* con *AF*; pero segun suponemos, *AJ* tiene con *AL* la misma razon que *AD* con *AF*; luego *DJ* es paralela á *FL*.

455 Luego, *si se cortan proporcionalmente en los pun-*
84. *tos* B, C, D, E. F *las lineas* AG, AH, AJ, AK, AL, *tiradas desde el punto* A *á distintos puntos de la linea* GL, *la linea* BCDEF *que pasare por todos estos puntos, será una linea recta paralela á* GL.

456 Las proposiciones demostradas (451 y sig.) son tambien ciertas, quando la linea *BF*, en lugar de estar en-

entre el punto *A* y la linea *GL*, como en la primera de estas figuras, cae mas allá del punto *A*, como en la segunda. Porque todo lo dicho (449 y 450) en que estriban las proposiciones (451 y sig.), se verificaría respecto de las paralelas que cortasen *ZA* y *XA*, prolongada mas allá del punto *A*. Fig. 84. 86. 82.

De la semejanza de los Triángulos.

457 Siempre que se comparan dos triángulos uno con otro, ó en general dos figuras qualesquiera, se dice que son *semejantes* quando los ángulos de la una son iguales á los ángulos de la otra, y los lados de la primera proporcionales á los lados correspondientes de la segunda. Los dos triángulos *ADJ*, *AFL* serán semejantes si el ángulo *A* es igual al ángulo *A*, el ángulo *D* al ángulo *F*, y el ángulo *J* al ángulo *L*, y ademas de esto *AD* : *AF* :: *AJ* : *AL* :: *DJ* : *FL*. 87.

458 Estos lados correspondientes se llaman *lados homólogos*, y son homólogos dos lados quando están puestos de un mismo modo en ambas figuras, respecto de los ángulos y demas lados. Así para que se puedan llamar homólogos dos lados, es menester que los ángulos adyacentes al primero sean respectivamente iguales á los ángulos adyacentes al segundo. *DJ* y *FL* no pueden ser homólogos, á no ser que los ángulos *D* y *J* sean respectivamente iguales á los ángulos *F* y *L*. 87.

459 *Dos triángulos que tienen los ángulos iguales, cada uno al suyo, tienen proporcionales sus lados homó-*

Fig. *mólogos, y son por consiguiente semejantes.*

87. Si los dos triángulos DAJ, FAL son tales que el ángulo A del primero sea igual al ángulo A del segundo, el ángulo D al ángulo F, y el ángulo J al ángulo L; digo que tendrémos $AD : AF :: AJ : AL :: DJ : FL$.

Porque ya que el ángulo A del primero es igual al ángulo A del segundo, se puede aplicar el uno de estos dos
83. triángulos sobre el otro, conforme representa la figura; en cuyo supuesto ya que el ángulo D es igual al ángulo F, las lineas DJ y FL serán paralelas (334); luego por lo dicho (451) tendremos $AD : AF :: AJ : AL$.

Tiremos ahora por el punto J la recta JH paralela á AF; por lo probado (451) tendremos $AJ : AL :: FH : FL$, ó (por ser FH igual á DJ (409)) $:: DJ : FL$, luego $AD : AF :: AJ : AL :: DJ : FL$.

Como podemos mudar los medios de lugar, tambien podemos decir que $AD : AJ :: AF : AL$ y $AJ : DJ :: AL : FL$.

460 Ya que (400) quando dos ángulos de un triángulo son iguales á dos ángulos de otro triángulo, el tercer ángulo del primero es indispensablemente igual al tercer ángulo del segundo: inferamos que *dos triángulos son semejantes quando tienen dos ángulos iguales cada uno al suyo.*

461 Por lo probado (335) dos ángulos que están vueltos ácia un mismo lado, y tienen sus lados paralelos son iguales, síguese que *dos triángulos que tienen todos sus lados paralelos, cada uno al suyo, tienen tambien todos sus án-*

ángulos iguales, cada uno al suyo, y tienen por consiguiente Fig.
proporcionales (459) *sus lados.*

Esto se verifica en los dos triángulos *ABE*, *CDF*, los quales tienen paralelos los lados *AB* y *CD*, los lados *BE* y *DF*, y los lados *AE* y *CF*. 88.

462 Luego *dos triángulos cuyos lados son perpendiculares cada uno al suyo, tienen tambien estos mismos lados proporcionales.*

Porque, si se le hace dar un quarto de conversion al uno de dichos triángulos, sus lados llegarán á ser paralelos á los del segundo.

463 *Si desde el ángulo recto* A *de un triángulo rectángulo* BAC *se baxa una perpendicular* AD *al lado opuesto* BC; 1.° *los dos triángulos* ADB, ADC *serán semejantes el uno al otro y al triángulo* BAC. 2.° *La perpendicular* AD *será media proporcional entre las dos porciones ó segmentos* BD *y* DC *de la hypotenusa.* 3.° *Cada lado* AB *ó* AC *del ángulo recto será medio proporcional entre la hypotenusa y el segmento correspondiente* BD *ó* DC. 89.

Porque, los dos triángulos *ADB*, *ADC* tienen cada uno un ángulo recto en *D*, del mismo modo que el triángulo *BAC* tiene un ángulo recto en *A*; tienen fuera de esto cada uno un ángulo comun con el mismo triángulo *BAC*, pues el ángulo *B* pertenece á un mismo tiempo al triángulo *ADB*, y al triángulo *BAC*; del mismo modo el ángulo *C* pertenece al triángulo *ADC*, y al triángulo *BAC*; luego (460) estos tres triángulos son semejantes; lue-

go

Fig. 90 (459) comparando los lados homólogos de los dos triángulos *ADB* y *ADC*, tendremos

BD : *AD* :: *AD* : *DC*;

comparando los lados homólogos de los dos triángulos *ADB* y *BAC*, tendremos

BD : *AB* :: *AB* : *BC*.

Finalmente, comparando los lados homólogos de los triángulos *ADC* y *BAC*, tendremos

CD : *AC* :: *AC* : *BC*.

Donde se vé que *AD* es media proporcional (178) entre *BD* y *DC*; *AB* media proporcional entre *BD* y *BC*; y finalmente *AC* media proporcional entre *CD* y *BC*.

464 *Dos triángulos que tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados proporcionales, tienen tambien sus otros dos ángulos iguales, y son por consiguiente semejantes.*

87. Si en los dos triángulos *ADJ*, *AFL* el ángulo *A* del primero es igual al ángulo *A* del segundo, y si al mismo tiempo los lados que forman estos ángulos son tales, que sea *AD* : *AF* :: *AJ* : *AL*; digo que serán semejantes; esto es que los dos triángulos tendrán los demas ángulos iguales cada uno al suyo, y sus terceros lados *DJ* y *FL* en la misma razon que *AD* y *AF* ó que *AJ* y *AL*.

Porque, podemos aplicar el ángulo *A* del triángulo *ADJ* sobre el ángulo *A* del triángulo *AFL*, conforme re-
83. presenta la figura. Pero ya que, segun suponemos, *AD* : *AF* :: *AJ* : *AL*, las dos rectas *AF* y *AL* están cortadas proporcionalmente en los puntos *D* y *J*; luego *DJ* es paralela á

á FL (454); luego (329) el ángulo AFL es igual al ángulo ADJ, y el ángulo ALF igual al ángulo AJD. Fig.

De aquí y de lo dicho antes (459) se infiere que $DJ : FL :: AD : AF :: AJ : AL$.

465 *Dos triángulos que tienen proporcionales sus tres lados homólogos, tienen sus ángulos iguales cada uno al suyo, y son por lo mismo semejantes.*

Si se supone que $DE : AB :: EF : BC :: DF : AC$; 90.
digo que el ángulo D será igual al ángulo A, el ángulo E igual al ángulo B, y el ángulo F igual al ángulo C.

Figurémonos que sobre DE se ha construido un triángulo DGE, cuyo ángulo DEG sea igual al ángulo B, y el ángulo GDE igual al ángulo A; el triángulo DEG será semejante al triángulo ABC (460); luego (459) $DE : AB :: GE : BC :: DG : AC$; pero, segun el supuesto, $DE : AB :: EF : BC :: DF : AC$; luego por causa de la razon comun $DE : AB$, tendremos $GE : BC :: DG : AC :: DF : BC :: DF : AC$, de donde podemos sacar estas dos proporciones $GE : BC :: EF : BC$
y $DG : AC :: DF : AC$.

Luego ya que en cada una de estas dos proporciones son iguales unos con otros los consecuentes; serán tambien iguales unos con otros los antecedentes; luego GE es igual á EF y DG igual á DF. Tiene, pues, el triángulo DEG sus tres lados iguales á los del triángulo DEF; es pues igual (410) á este triángulo DEF; pero acabamos de probar que el triángulo DEG es semejante á ABC, lue-

Fig. go es tambien *DEF* semejante á *ABC*.

83. 466 Hemos probado antes (461), que quando se cortan dos lados de un triángulo con una linea paralela al tercer lado, resultan triángulos *ADJ* y *AFL* semejantes; como esto es cierto, sea la que se quisiere la cantidad del
84. ángulo *A*, se debe inferir que los triángulos *AGH*,*AHJ*, *AJK*,*AKL* son semejantes á los triángulos *ABC*, *ACD*, *ADE*, *AEF*, cada uno al suyo, y que por último (459) *KL* : *EF* :: *AK* : *AE* :: *KJ* : *ED* :: *AJ* : *AD* :: *JH* : *DC* :: *AH*: *AC* :: *GH* : *CB* ; luego sacando de esta serie de razones aquellas no mas que contienen partes de las lineas *GL* y *BF*, tendremos *KL* : *EF* :: *KJ* : *DE* :: *JH* : *CD* :: *GH* : *BC* ; esto es, que *si desde un punto* A *se tiran á diferentes puntos de una linea recta* GL, *otras muchas lineas rectas, estas lineas cortarán toda paralela á* GL, *del mismo modo que cortarán* GL ; *esto es, en partes que tendrán unas con otras las mismas razones que las partes correspondientes de* GL.

467 La proposicion arriba (448) sentada nos enseña un modo muy sencillo para *dividir una linea dada en partes iguales ó en partes que tengan unas con otras razones dadas.*

82. Supongamos que se nos ofrezca dividir la linea *AR* en dos partes que tengan una con otra una razon dada, pongo por caso la de 7 á 3 ; por el punto *A* se tirará de modo que forme con *AR* el ángulo que se quiera, la linea indefinita *AZ*, y tomando una abertura de compas arbitraria *AB*, se la llevará diez veces á lo largo de *AZ* ; supon-

pongo que sea *Q* el extremo de la última parte, se juntarán los extremos *Q* y *R* de la linea *AQ* y de la linea *AR*; hecho esto, si por el punto *D*, extremo de la tercera division, se tira la *DJ* paralela á *QR*, la linea *AR* estará dividida en dos partes *RJ* y *AJ*, las quales estarán una con otra :: 7 : 3; porque (450) son entre sí :: *DQ* : *AD* que hemos hecho de 7 y de 3 partes.

Fig.

Esto manifiesta que si quisiésemos dividir la linea *AR* en un número mayor de partes, pongo por caso en cinco partes que fuesen unas con otras como los números 7, 5, 4, 3, 2; se sumarian unos con otros todos estos números, saldria la suma 21; se llevarian 21 aberturas de compas sobre la linea *AZ*, y se tirarian paralelas á la linea *QR*, por los extremos de la 7ª, 5ª, 4ª, 3ª, y 2ª division.

Si las razones estuviesen determinadas en lineas, se pondrian todas estas lineas á continuacion las unas de las otras sobre la linea *AZ*.

Esto manifiesta lo que se deberia practicar para dividir la linea *AR* en partes iguales. Pero quando las partes de la linea que se intenta dividir han de ser pequeñas ó quando es muy pequeña la linea que se ha de dividir, la mas mínima discrepancia entre las paralelas altera muchísimo la igualdad de las partes; por lo que, no será inutil declarar el método siguiente.

468 Sea *fg* la linea por dividir en partes iguales, 91.
en seis, v. gr.: se tirará una linea indefinita *BC*, en lo qual se señalará seis veces de seguida una misma abertu-

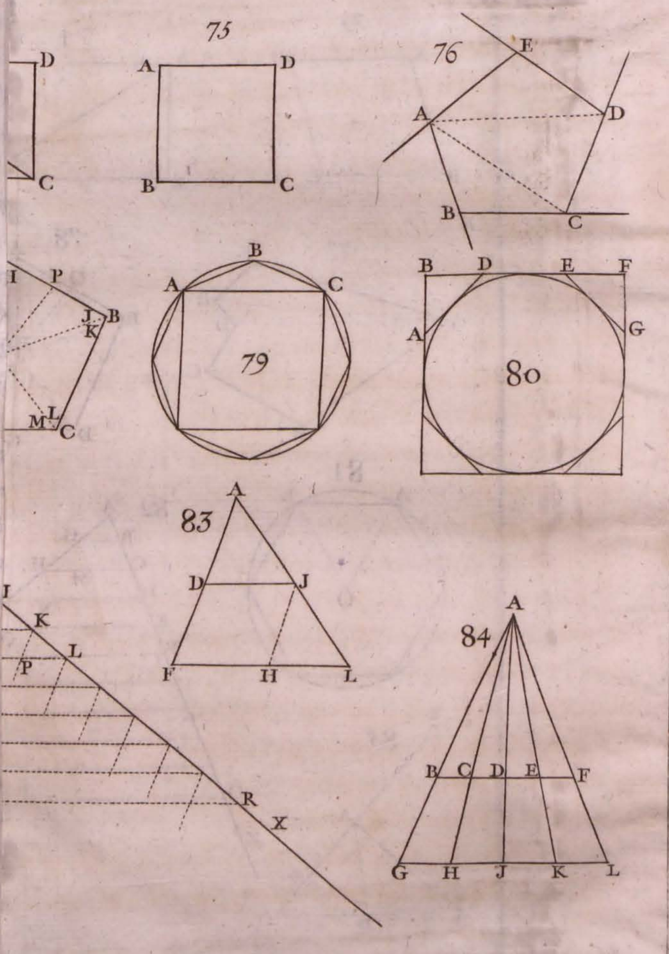
Fig. ra de compas arbitraria, y resultarán seis partes iguales;
91. se trazará sobre *BC* un triángulo equilátero *BAC*, trazando desde los centros *B* y *C*, y con un radio igual á *BC* dos arcos que se corten en *A*. Sobre los lados *AB*, *AC* se tomarán las partes *AF*, *AG* cada una iguales á *fg*; y tirando *FG*, esta linea será igual á *fg*. Por el punto *A* se tirarán á todos los puntos de division de *BC* lineas rectas, las quales cortarán *FG* del mismo modo que está cortada *BC*.

Porque, como las lineas *AF* y *AG* son iguales unas con otras, y son tambien iguales unas con otras las lineas *AB* y *AC*, tenemos *AB* : *AF* :: *AC*: *AG*; luego *AB* y *AC* están cortadas proporcionalmente en *F* y *G*; luego *FG* es paralela á *BC*, y por consiguiente (461) el triángulo *FAG* es semejante á *ABC*; luego *FAG* es equilátero; luego *FG* es igual á *AF*, y por lo mismo á *fg*. A mas de esto, como *FG* es paralela á *BC*, estas dos lineas estarán cortadas (466) proporcionalmente por las lineas tiradas desde el punto *A* á la recta *BC*.

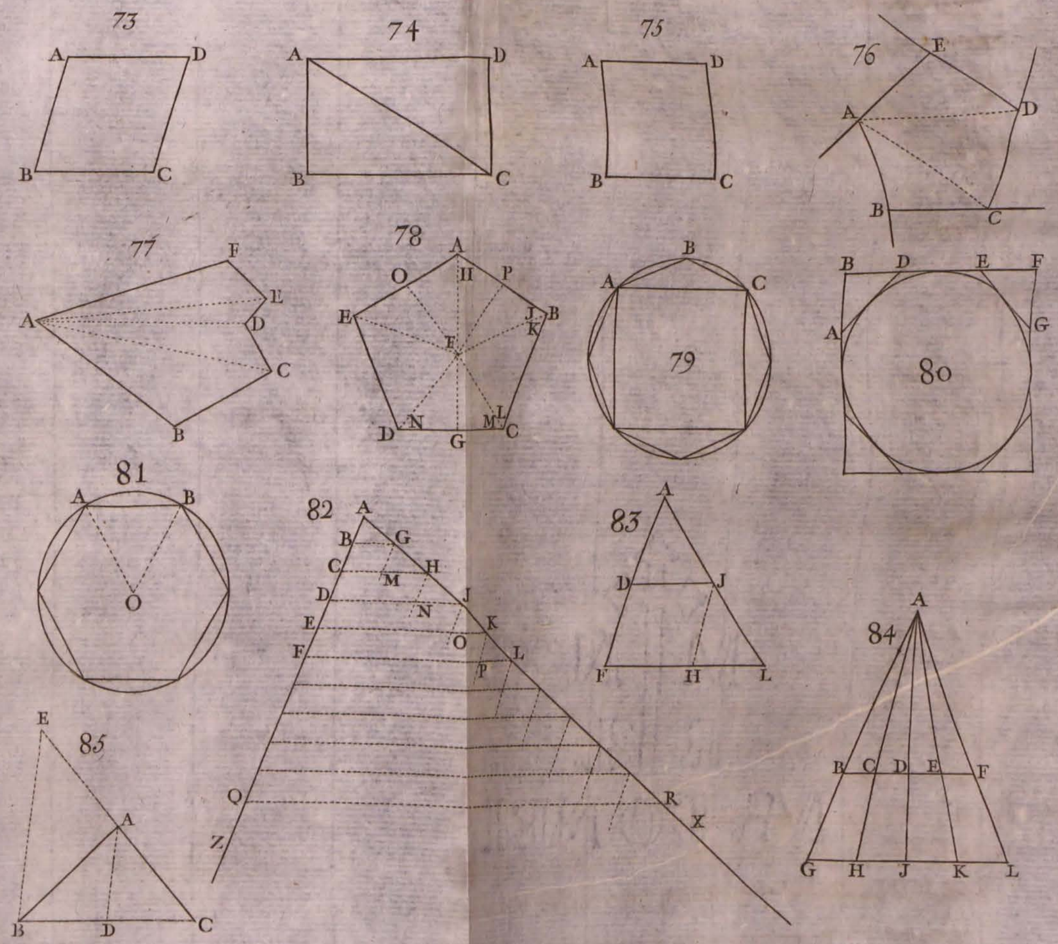
92. 469 *Si desde los puntos* P, Q *de una misma recta* PQ
93. *se tiran dos paralelas* PM, QN *desiguales, y otras dos paralelas* PO, QR *proporcionales á las dos primeras; de modo que* PM : QN :: PO : QR, *las dos rectas* OR, MN *tiradas por los extremos de dichas paralelas, concurrirán, prolongadas si fuere menester, en un mismo punto* S *con la recta* PQ, *tambien prolongada si fuese del caso.*

Supongamos que la recta *OR* concurra en *S* con la *PQ*, y la recta *MN* en *T* con la misma *PQ*; el punto *T* coincidirá

con


75
76
79
80
83
84
A
B
C
D
E
F
G
H
I
J
K
L
M
P
R
X

Tomo I. Plana 324.



con el punto *S*. Porque los triángulos *MPT*, *NQT* son semejantes (459), y tendremos *PT* : *QT* :: *PM* : *QN*; por la construccion tenemos tambien *PM* : *QN* :: *PO* : *QR*, y por la semejanza de los triángulos *OPS*, *RQS* tenemos *PO* : *QR* :: *PS* : *QS*; luego *PT* : *QT* :: *PS* : *QS*; luego (188) *PT*—*QT* : *QT* :: *PS*—*QS* : *QS* ó *PQ* : *QT* :: *PQ* : *QS*, y por consiguiente *QT* es igual á *QS*; coincide, pues, el punto *T* con el punto *S*. Fig.

Si estuviesen las lineas *MN*, *OR* en la situacion que representa la figura 93, de la proporcion *PT* : *QT* :: *PS* : *QS*, sacaríamos *PT*+*QT* : *QT* :: *PS*+*QS* : *QS*; esto es, *PQ* : *QT* :: *PQ* : *QS*, de la qual tambien inferiríamos que *QT* es igual á *QS*.

470 De la última proposicion sacamos lo que hay que practicar para *tirar por un punto dado* P *cerca de dos lineas* AB, CD *convergentes*, esto es, *que ván á juntarse en un punto, una linea que vaya á parar, prolongada, al mismo punto donde concurririan, tambien prolongadas, las dos lineas dadas.* 94. 95.

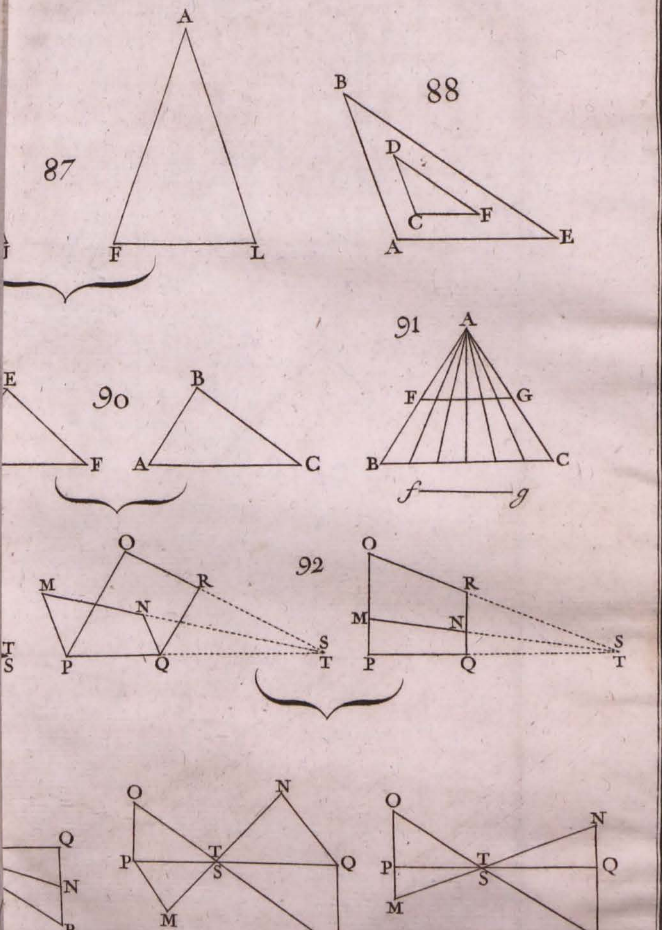
Tiraráse por el punto dado *P* la recta *MPO* ó *MOP* que encuentra en *O* y *M* las dos rectas dadas *AB*, *CD*, y por otro punto qualquiera se tirará á la *POM* una paralela *NQR* ó *QRN*, que encontrará las rectas dadas en los puntos *N* y *R*. Sobre la recta *MO* se construirá un triángulo equilátero *MSO*, y sobre los lados, prolongados si fuere menester *SM*, *SO* de este triángulo, se tomarán las porciones *Sn*, *Sr* iguales á la linea *NR*, y se tirará *nr*. El

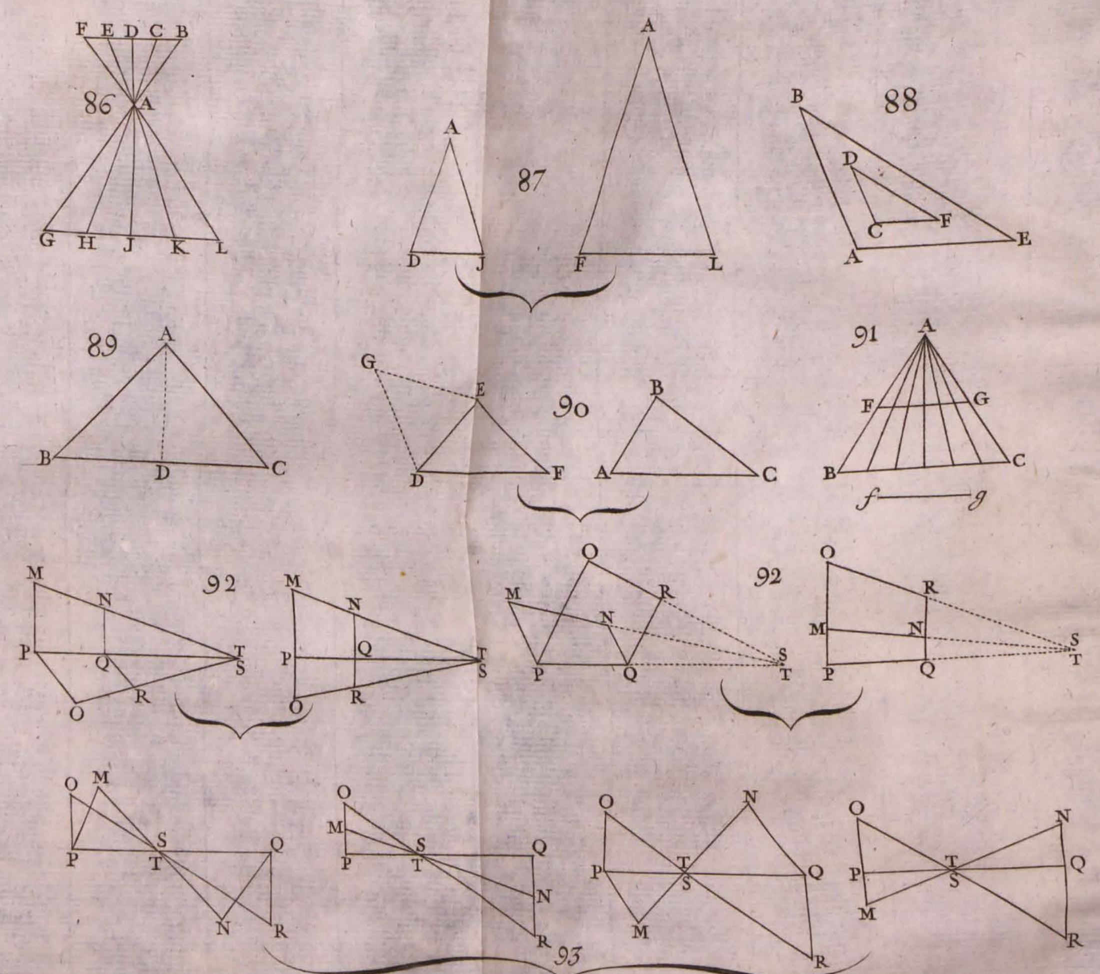
Fig. triángulo *Snr* será equilátero (454 y 481), y por con-
94. siguiente *nr* y *Sn* serán iguales una con otra, y con la li-
95. nea *NR*. Tírese finalmente desde el vértice *S* del triángulo equilátero, y por el punto *P* la recta *SP*, la qual prolongada, si fuere menester, cortará en *q* la recta *nr*, tambien prolongada si conviniere. Hecho esto, se pasará la porcion *qr* á *QR* sobre la recta *QRN*, y por el punto *Q*, determinado de este modo, y el punto dado *P* se tirará la recta *PQ*, la qual se dirigirá al punto de concurso de las dos lineas *AB*, *CD*.

Porque, por la construccion tendremos *PM* : PO :: *qn* : *qr* (466), y por la misma construccion tambien es *QR* igual á *qr*; luego si restamos estas dos partes iguales de las lineas iguales *NR*, *nr*, las rectas *QN*, *qn* serán iguales. Y así substituyendo *QN*, *QR* en lugar de las *qn*, *qr* de la primera proporcion, tendremos *PM* : *PO* :: *QN* : *QR*; luego concurrirán en un mismo punto (469) las tres rectas *AB*, *CD*, *PQ*.

471 De la proposicion sentada (451) podemos sacar un método para *hallar una quarta proporcional á tres*
96. *lineas dadas* ab, cd, ef; *esto es, una linea que sea el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros sean las lineas* ab, cd, ef.

Para executarlo, despues de tiradas dos rectas indefinitas *AF*, *AL* que formen una con otra un ángulo el que se quiera, se llevará *ab* desde *A* á *D*, y *cd* desde *A* á *F*; se llevará igualmente *ef* desde *A* á *J*; y juntando los dos puntos


87
A
F
L
88
B
D
C
F
A
E
90
E
F
B
A
C
91
A
F
G
B
C
f
g
92
O
M
R
N
P
Q
S
T
O
R
M
N
P
Q
S
T
93
O
N
Q
P
T
S
Q
N
M
R
R
O
N
P
T
S
Q
M
R


86
F E D C B
A
G H J K L
87
A
D J
A
F L
88
B D C F A E
89
A
B D C
90
G E D F
B A C
91
A F G B C
f g
92
M N P Q T S O R
93
O M P S T N R Q

tos *D* y *J* con la recta *DJ*, se tirará por el punto *F* la recta *FL* paralela á *DJ*, cuya paralela determinará *AL*, esta será la quarta proporcional que se busca. Fig.

Se podrá tambien executar la misma operacion por la proposicion sentada (451). Para cuyo fin se tomarán en 96.
una linea indefinita *AF* las dos partes *AD*, *AF* iguales á *ab*, *cd* respectivamente; y tirando *DJ* igual á *ef*, de modo que forme con *AF* un ángulo el que se quiera, se tirará por el punto *A* y el punto *J*, la recta *AJL*; y cortándola con una linea *FL* paralela á *DJ*, esta paralela será el quarto término que se busca.

De las Lineas proporcionales consideradas en el círculo.

472 Decimos de dos lineas que están cortadas en *razon inversa* ó *recíproca*, quando se forma una proporcion con las partes de dichas lineas, de manera que las dos partes de la una son los extremos, y las dos partes de la otra los medios de la proporcion.

Y se dice de dos lineas que son *recíprocamente proporcionales* á sus partes, quando la una de dichas lineas y su parte forman los extremos de una proporcion, siendo los medios la otra linea y su parte.

473 *Dos cuerdas* AC, BD *que se cortan en el círculo* 97.
en un punto qualquiera E, *formando un ángulo qualquiera, siempre se cortan en razon recíproca; quiero decir, que* AE : BE :: ED : CE.

Porque, si se tiran las cuerdas *AB*, *CD*, se forman

Fig, dos triángulos BEA, CED, de los quales nos será facil demostrar que son semejantes ; porque fuera del ángulo BEA igual á CED (302), el ángulo ABE ó ABD es igual al ángulo DCE ó DCA, pues estos dos ángulos tienen su vértice en la circunferencia y cogen el mismo arco AD (375); luego los triángulos BEA y CED son semejantes (460); luego tienen sus lados homólogos proporcionales ; esto es, $AE : BE :: DE : EC$, donde se vé que las partes de la cuerda AC son los extremos y las partes de la cuerda BD son los medios.

474 Ya que es cierta la proposicion que acabamos de probar, esté donde estuviere el punto E, y forme el ángulo que se quisiere la linea AC con la BD, será tambien cierta quando las cuerdas fueren perpendiculares la
98. una á la otra y la una de ellas AC, v. gr. pasare por el centro ; pero como en este caso la cuerda BD está dividida en dos partes iguales (349), los dos términos medios de la proporcion $AE : BE :: DE : CE$, son iguales y la proporcion se transforma en estotra $AE : BE :: BE : CE$; luego *toda perpendicular, baxada desde un punto* B *de la circunferencia al diámetro, es media proporcional entre las dos partes* AE, CE *de dicho diámetro.*

475 Entre muchos usos para que puede servir esta proposicion, declararémos solo uno que consiste en *hallar*
99. *una media proporcional entre dos lineas dadas* ae, ec.

Tiraráse una recta indefinita AC, sobre la qual se colocarán al tope ó punta con punta dos lineas AE, EC igua-

iguales á las lineas dadas *ae*, *ec*; y trazando sobre toda la *AC* como diámetro el semicírculo *ABC*, se levantará en el punto de union *E* la perpendicular *EB* sobre *AC*; esta perpendicular será la media proporcional que se pide. Fig.

476 *Dos secantes* AB, AC, *las quales tiradas desde un mismo punto* A *fuera del círculo, ván á parar á la parte cóncava de la circunferencia, son siempre recíprocamente proporcionales á sus partes exteriores* AD, AE, *esté donde estuviere el punto* A *fuera del círculo, y sea el que fuere el ángulo que forma la una secante con la otra.* 100.

Figurémonos las cuerdas *CD* y *BE*, y resultarán dos triángulos *ADC*, *AEB*, en los quales 1.° el ángulo *A* es comun, el ángulo *B* es igual al ángulo *C*, por tener ambos su vértice en la circunferencia, y abrazar el mismo arco *DE* (375); luego (460) estos dos triángulos son semejantes, y tienen por consiguiente sus lados proporcionales; luego *AB* : *AC* :: *AE* : *AD*, donde se vé que la secante *AB* y su parte exterior *AD*, son los extremos, siendo la secante *AC* y su parte exterior los medios.

477 Infiérese de aquí que *si la linea* AB *fuese ó llegase á ser tangente, será media proporcional entre toda la secante* AC *y su parte exterior* AE. 101.

Porque los ángulos *ACB*, *ABE* son iguales, pues la medida de cada uno es la mitad del mismo arco (372 y 374) *EDB*; los ángulos *ABC*, *AEB* son tambien iguales; porque el ángulo *ABC* tiene por medida la mitad del arco *CEDB* (374), y los dos ángulos inmediatos *AEB*,

BEC

Fig. *BEC* tienen por medida la mitad de toda la circunferencia (298); como el ángulo *CEB* tiene por medida la mitad del arco *CFB* , quedará para medida de *AEB* la mitad de *CEDB* ; luego el ángulo *AEB* será igual al ángulo *ABC* ; luego los dos triángulos *AEB* , *ABC* que tienen dos ángulos iguales á dos ángulos , tendrán el tercer ángulo igual al tercer ángulo (400) ; luego serán semejantes (459); por consiguiente tendrémos $AC : AB :: AB : AE$; luego es la tangente media proporcional entre toda la secante tirada desde un mismo punto y la parte exterior de la misma secante.

478 Puede servir esta proposicion para *cortar una linea en media y extrema razon.*

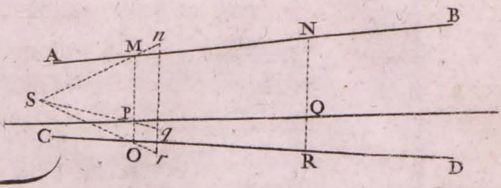
102. Dícese de una linea *AB* , que está cortada en *media y extrema razon*, quando lo está en dos partes *AC*, *BC*, tales que la una *BC* de dichas partes es media proporcional entre toda la linea *AB* y la otra parte *AC* ; esto es , tales que

$$AC : BC :: BC : AB.$$

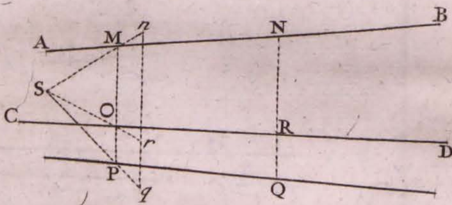
Executase esta division del modo siguiente. En el un extremo *A* se levanta una perpendicular *AD* igual á la mitad de *AB* ; desde el centro *D* , y con un radio igual á *AD*, se traza una circunferencia , la qual corta en *E* la linea *BD*, que junta los dos puntos *B* y *D*. Finalmente se lleva *BE* desde *B* á *C* , trazando desde el centro *B* y con el radio *BE* , el arco *CE* , y con esto estará cortada la linea *AB* en media y extrema razon en el punto *C*.

Con efecto , por ser la linea *AB* perpendicular á *AD*,

es

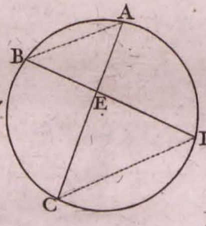


94

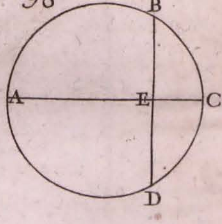


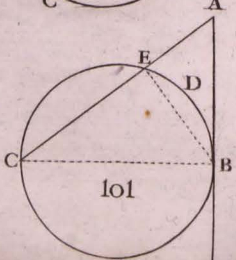
95

98

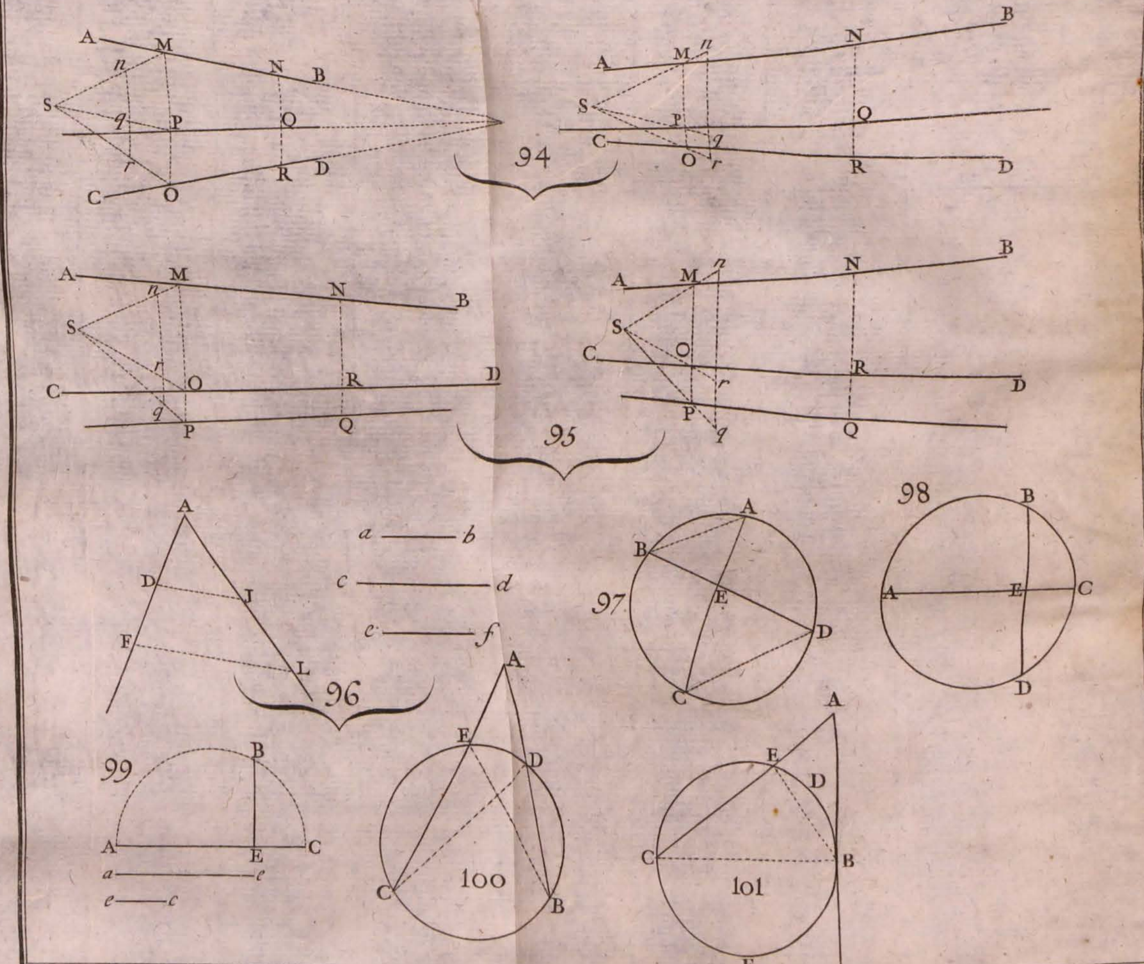


97





101



94
95
96
97
98
99
100
101

es tangente (348); y como BF es secante, tenemos (477) $BF : AB :: AB : BE$ ó BC; luego (189) $BF—AB : AB—BC :: AB : BC$; pero AB es igual á FE, por ser AB dupla de AD; luego $BF—AB$ es igual á BE ó BC; y como $AB—BC$ es AC, tenemos $BC : AC :: AB : BC$, ó (185) $AC : BC :: BC : AB$. Fig.

De las Figuras semejantes.

479 Ya diximos antes (457), que son semejantes dos figuras, quando cada ángulo de la una es igual á cada ángulo de la otra por el mismo orden, y los lados de la primera son proporcionales á los lados correspondientes de la segunda. Diximos tambien que estos lados correspondientes como AB y ab, CD y cd, DE y de, EA y ea se 103. llaman lados homólogos. Son, pues, homólogos, segun prevenimos en otra parte (458), dos lados quando están colocados de un mismo modo cada uno en su figura, respecto de los ángulos y demas lados; así, para que dos lados sean homólogos es preciso que los ángulos adyacentes al primero sean respectivamente iguales á los ángulos adyacentes al segundo. AB y ab v. gr. son homólogos, si A y B son iguales respectivamente á los ángulos a y b.

480 *Pueden los ángulos de un polygono ser iguales respectivamente á los ángulos de otro polygono, sin que los lados del uno sean proporcionales á los lados del otro.*

Porque si tenemos dos exágonos semejantes, v. gr. $abcdef$ y $ABCDEF$, y prolongamos dos lados del segundo, 104.

co-

Fig. como *BC* y *ED*, y se tira la linea *GH* paralela al lado *CD*, resultará un tercer exágono *ABGHEFA*, cuyos ángulos son iguales á los del segundo, por causa de las paralelas *GH* y *CD*; por consiguiente los ángulos de este tercer exágono son tambien iguales á los ángulos del primero. No obstante, los lados del tercer exágono no son proporcionales á los del primero, porque una vez qne por lo supuesto los lados del polygono *ABCDEF* son proporcionales á los del primero, es imposible que los lados del tercer exágono sean proporcionales á los lados del primero.

105. 481 *Pueden tambien ser proporcionales los lados de un polygono á los lados de otro, sin que sean iguales los ángulos del uno á los ángulos del otro.*

Sean v.gr. dos exágonos semejantes *abcdef* y *ABCDEF*; tírense desde los dos ángulos *B* y *F* las dos lineas *BG* y *FL* iguales respectivamente á los dos lados *BC* y *EF*; desde el punto *G* y con el intervalo *CD* trácese un arco ácia el punto *D*. Desde el punto *L* y con el intervalo *ED* trácese otro arco, que corte el primero en un punto como *H*; finalmente tírense las lineas *GH* y *HL*; resultará un tercer exágono *ABGHLF*, cuyos lados son iguales, por la construccion, á los del segundo y por lo mismo proporcionales á los del primero; y sin embargo es patente que los ángulos del tercer exágono no son iguales á los ángulos del segundo, ni por consiguiente á los del primero.

482 Infiérese de todo esto que *nadie puede asegurar que son semejantes dos polygonos, sin estar seguro* 1.° *de que*

son

son iguales los ángulos del uno con los del otro. 2.° *de que son tambien proporcionales los lados del primero á los del segundo.* Fig.

En los triángulos basta, segun hemos demostrado, la una de estas condiciones para que se verifique tambien la otra; pues si son iguales los ángulos, son proporcionales los lados (459), y si son proporcionales los lados, son iguales los ángulos (465).

483 *Si desde dos ángulos homólogos* A *y* a *de dos polygonos semejantes, se tiran diagonales* AC, AD, ac, ad *á los demas ángulos, estarán divididos los dos polygonos en un mismo número de triángulos semejantes cada uno al suyo.* 103.

Porque, por el supuesto de ser los polygonos semejantes, el ángulo B es igual al ángulo b, y el lado $AB : ab :: BC : bc$; luego los dos triángulos ABC, abc, que tienen un ángulo igual comprehendido entre dos lados proporcionales, son semejantes (464); luego el ángulo BCA es igual al ángulo bca, y $AC : ac :: BC : bc$.

Si de los ángulos iguales BCD, bcd, se quitan los ángulos iguales BCA, bca, los ángulos residuos ACD, acd serán iguales. Pero $BC : bc :: CD : cd$; luego ya que acabamos de probar que $BC : bc :: AC : ac$, tendremos $CD : cd :: AC : ac$; luego los dos triángulos ACD, acd son tambien semejantes, porque tienen un ángulo igual á un ángulo formado por dos lados proporcionales. Lo mismo probarémos, y del mismo modo, respecto de los triángulos ADE y ade, y respecto de todos los triángulos que hubiese á mas de estos, si fuese mayor el número de los lados de cada polygono.

Si

Fig. 103. 484 *Si dos polygonos* ABCDE, abcde *constan de un mismo número de triángulos semejantes, cada uno al suyo, y dispuestos del mismo modo, serán semejantes.*

Porque, los ángulos *B* y *E* son iguales á los ángulos *b* y *e*, una vez que son semejantes los triángulos; y por la misma razon los ángulos parciales *BCA*, *ACD*, *CDA*, *ADE* son iguales á los ángulos parciales *bca*, *acd*, *cda*, *ade*; luego los ángulos totales *BCD*, *CDE* son iguales á los ángulos totales *bcd*, *cde*, cada uno al suyo. Fuera de esto, la semejanza de los triángulos nos dá esta serie de razones iguales $AB : ab :: BC : bc :: AC : ac :: CD : cd :: AD : ad :: DE : de :: AE : ae$, si tomamos en esta serie las razones cuyos términos son los lados de los dos polygonos, sale $AB : ab :: BC : bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae$; luego estos polygonos tienen tambien los lados homólogos proporcionales; luego son semejantes.

103. 485 Luego, para *construir una figura semejante á una figura propuesta* ABCDE, *y cuyo lado homólogo á* AB *sea una linea dada* ab, se llevará la linea dada sobre *AB*, desde *A* á *f*; por el punto *f* se tirará *fg* paralela á *BC*, y que encuentre *AC* en *g*; por el punto *g* se tirará *gh* paralela á *CD*, y que encuentre *AD* en *h*; finalmente, por el punto *h* se tirará *hi* paralela á *ED*, y saldrá el polygono *Afghi* semejante á *ABCDE*.

486 *Los contornos ó perímetros de dos figuras semejantes son unos con otros como los lados homólogos de dichas figuras*; quiero decir, que en la suma de los lados de la figura

ra

ra $ABCDE$ cabe la suma de los lados de la figura $abcde$, como en el lado AB cabe el lado ab. Fig.

Porque en la serie de razones iguales $AB : ab :: BC :$ 103.
$bc :: CD : cd :: DE : de :: AE : ae$, la suma de los antecedentes (190) es á la suma de los consecuentes, como un antecedente es á su consecuente $:: AB : ab$; pero es evidente que la suma de los antecedentes es el contorno de la figura $ABCDE$, y la suma de los consecuentes el contorno de la figura $abcde$.

487 Si nos figuramos la circunferencia del círculo 106.
$ABCDEFGH$, dividida en un número de partes iguales, el que se quisiere, y si despues de tirar desde el centro J, á los puntos de division radios JA, JB &c. se traza con otro radio Ja la circunferencia $abcdefgh$, que encuentra dichos radios en los puntos a, b &c.; es evidente que si en cada circunferencia juntamos los puntos de division con cuerdas, se formarán dos polygonos semejantes; porque los triángulos ABJ, abJ &c. son semejantes pues tienen un ángulo comun en J formado por dos lados proporcionales; porque ya que JA es igual á JB y Ja es igual á Ja, tenemos evidentemente $AJ : BJ :: aJ : bJ$, y lo propio se demuestra del mismo modo respecto de los demas triángulos.

De todo esto y de lo dicho antes (486) inferirémos que el contorno $ABCDEFGH$ es al contorno $abcdefgh ::$ $AB : ab$, ó (por causa de los triángulos semejantes ABJ, abJ) $:: AJ : aJ$. Como esta semejanza no pende del número de los lados de estos dos polygonos, subsistirá igualmen-

Fig. 106. mente aun quando el número de los lados de cada uno llegára á ser infinito. Pero en este caso hemos probado (444) que el círculo se confundirá con el polygono inscripto, ó que se puede tomar el uno por el otro; luego *las circunferencias mismas* ABCDEFGH, abcdefgh *serán unas con otras* :: AJ : aJ; *esto es, como sus radios; y por consiguiente como sus diámetros.*

De las Superficies.

488 Llegamos ya á la segunda de las tres especies de extension que distinguimos al principio de estos Elementos; esto es, á la extension en longitud y latitud.

489 Antes de pasar adelante, conviene prevenir, que una *superficie curva* y una *superficie curvilinea* son dos cosas distintas. Ya dimos á entender (384) qué cosa es una figura ó superficie curva. Una superficie plana puede ser tambien curvilinea, bien que no pueda ser curva: un círculo, v. gr. es una superficie curvilinea y plana al mismo tiempo.

Aquí nos proponemos considerar la superficie plana, y particularmente la que por ser terminada por lineas rectas se llama *rectilinea.*

Entre las figuras curvilineas solo considerarémos el círculo; y aunque son infinitas las mixtilineas, tratarémos solamente de las que tienen relacion con el círculo, quales son el segmento y el sector de círculo.

490 Llámase *segmento* de círculo el espacio compre-

prehendido entre un arco y su cuerda. *ABCDA* es un segmento de círculo. El *sector* de círculo es el espacio comprehendido entre un arco y dos radios. La figura *EFHG* es un sector de círculo. Fig. 107.

Las superficies rectilineas que vámos á considerar, son el triángulo, el quadrilátero y el polygono. No es nuestro ánimo repetir aquí lo que hasta ahora hemos declarado respecto de estas figuras; porque en lo dicho solo hemos atendido á su contorno, ámbito ó perímetro, y ahora aplicarémos la consideracion al espacio que dicho perímetro incluye, lo que es propiamente *superficie* ó *area.*

491 *Todo triángulo rectilineo* ABC *es la mitad de un paralelogramo de igual base y altura que él.* 108.

Porque podemos figurarnos tirada por el vértice del ángulo *C* una linea *CE* paralela al lado *BA*, y por el vértice del ángulo *A*, una linea *AE*, paralela al lado *BC*; de donde resulta con los lados *AB* y *BC* un paralelogramo *ABCE* de igual base y altura que el triángulo *ABC*, de cuyo paralelogramo es diagonal la linea *AC*. Pero hemos probado (426), que la diagonal de todo paralelogramo le divide en dos partes ó triángulos iguales; luego cada uno de los dos triángulos *BAC* y *ACE* es la mitad del paralelogramo *ABCE*; luego el triángulo *ABC* es la mitad del paralelogramo *ABCE.*

492 *Los paralelogramos* ABCD, EBCF *de igual base y altura, son iguales en superficie.* 109.

Fig. Los dos paralelogramos *ABCD*, *EBCF* tienen comun la figura *EBCD*; así su igualdad pende de sola la igualdad de los triángulos *ABE*, *DCF*. Pero es facil probar que estos dos triángulos son iguales; porque *AB* es igual á *CD*, por ser estas lineas paralelas y comprehendidas entre paralelas (409); y por la misma razon *BE* es igual á *CF*; por otra parte (335), el ángulo *ABE* es igual al ángulo *DCF*; luego estos dos triángulos tienen un ángulo igual formado por dos lados iguales cada uno al suyo; luego son iguales; luego son tambien iguales el paralelogramo *ABCD* y el paralelogramo *EBCF*.

Del mismo modo demostraríamos que los dos triángulos *ABE*, *DCF* son iguales; luego con restar de cada
110. uno el triángulo *DJE*, los dos trapecios restantes *ABJD*, *EJCF* serán iguales: finalmente con añadir á cada uno de estos trapecios el triángulo *BJC*, el paralelogramo *ABCD* y el paralelogramo *EBCF* que resultarán, serán iguales.

493 Podemos, pues, inferir que *los triángulos de igual base y altura, ó de bases y alturas iguales son iguales*; pues son mitades de paralelogramos de una misma base y una misma altura que ellos (491).

De la medida de las Superficies.

494 *Medir una superficie es determinar quantas veces en dicha superficie cabe otra superficie conocida.*

Las medidas que para esto sirven suelen ser quadrados; algunas veces sirven tambien paralelogramos rectángulos; así,

así, medir la superficie *ABCD* es determinar quantos quadrados como *abcd*, ó rectángulos como $a'b'c'd'$ caben en ella; si el lado *ab* del quadrado *abcd* es de un pie, es determinar quantos pies quadrados tiene la superficie *ABCD*; si el lado $a'b'$ del rectángulo $a'b'c'd'$ fuese de un pie, y el lado $b'c'$ de tres pies, sería determinar quantos rectángulos de un pie de largo y tres de ancho caben en la superficie *ABCD*. Fig. 111.

Para medir en partes quadradas la superficie del rectángulo ABCD, *se ha de buscar quantas veces el lado* AB *contiene el lado* ab *del quadrado* abcd *que sirve de unidad ó de medida*; *buscar asimismo quantas veces en el lado* BC *cabe* ab; *y multiplicando estos dos números uno por otro, saldrá el número de quadrados como* abcd, *que habrá en la superficie* ABCD. Si v. gr. en *AB* cabe *ab* 4 veces, y en *BC* cabe *bc* 7 veces, multiplico 7 por 4, y el producto 28 expresa, que en el rectángulo *ABCD* hay 28 quadrados como *abcd*.

Porque, si por los puntos de division *E*, *F*, *G*, se tiran paralelas á *BC*, resultarán quatro rectángulos iguales, cada uno de los quales podrá tener tantos quadrados como *abcd*, quantas partes iguales á *ab* hay en el lado *BC*; luego se han de repetir los quadrados contenidos en el uno de estos rectángulos tantas veces quantos rectángulos hay; esto es, tantas veces como en el lado *AB* cabe *ab*; y como el número de los quadrados que caben en cada rectángulo es el mismo que el número de las partes de *BC*, es evidente, que si se multiplica el número de las partes de *BC*, por el número de partes iguales de *AB*, saldrá el número

Fig. de quadrados como *abcd* que caben en el rectángulo *ABCD*.

Aunque hemos supuesto en nuestra demostracion que en los lados *AB* y *BC* cabe un número cabal de veces *ab*, no por esto dexa de aplicarse al caso en que la medida *ab* no cupiese un número de veces cabal en dichos lados. Si *BC* v. gr. no tuviese sino $6\frac{1}{2}$ medidas, cada rectángulo no tendria sino $6\frac{1}{2}$ quadrados, y si el lado *AB* no tuviese sino $3\frac{1}{3}$ medidas, no habria sino $3\frac{1}{3}$ rectángulos, cada uno de $6\frac{1}{2}$ quadrados; se debería, pues, multiplicar $6\frac{1}{2}$ por $3\frac{1}{3}$; esto es, el número de medidas de *BC* por el número de medidas de *AB*.

495 Ya que (492) el paralelogramo rectángulo
109. *ABCD* es igual al paralelogramo *EBCF* de la misma base
110. y altura, se sigue que, para hallar la superficie de este, se deberá multiplicar el número de las partes de su base *BC* por el número de las partes de su altura *BA*; se puede, pues, decir en general que

Para hallar el número de medidas quadradas contenidas en la superficie de un paralelogramo qualquiera ABCD *se debe medir la base* BC *y la altura* EF *con una misma medida, y multiplicar el número de las medidas de la base por el número de las medidas de la altura.*

Se echa, pues, de ver por lo dicho (494), que
111. quando se quiere valuar la superficie *ABCD* no se hace mas que repetir la superficie *GBCH* ó el número de los quadrados que contiene, tantas veces quantas su lado *GB* cabe en el lado *AB*; así el multiplicando es en realidad una

su-

superficie, y el multiplicador es un número abstracto, que solo sirve para determinar quantas veces se ha de tomar dicho multiplicando. Fig. 111.

Se dice no obstante muy comunmente, que *para hallar la superficie de un paralelogramo se debe multiplicar su base por su altura*; pero esto debe mirarse como un modo de hablar abreviado, en el qual se omite el número de los quadrados correspondientes á las partes de la base, y el número de las partes de la altura. En una palabra, no se puede decir que se multiplica una linea por una linea. Multiplicar es tomar cierto número de veces: de suerte, que quando se multiplica una linea, jamas puede salir otra cosa que una linea; y quando se multiplica una superficie, jamas puede salir otra cosa que una superficie. Una superficie no puede constar de otros elementos que superficies; y aunque se dice con freqüencia, que el paralelogramo *ABCD* puede 112.
considerarse como compuesto de tantas lineas iguales y paralelas á *BC*, quantos puntos hay en la altura *EF*, se debe entender que estas lineas tienen una latitud infinitamente pequeña (porque muchas lineas sin latitud ninguna no pueden formar una superficie); y entonces cada una de dichas lineas es una superficie, que tomada tantas veces quantas su altura cabe en la altura *EF*, dá la superficie *ABCD*.

Usarémos no obstante esta expresion: *multiplicar una linea por una linea*; pero conviene tener presente que será solo para abreviar. Añadirémos que *el producto de dos lineas expresa una superficie*; bien que hablando con propiedad de-

Fig. bería decirse el número de las partes de una linea multiplicado por el número de las partes de otra linea, expresa el número de partes quadradas contenidas en el paralelogramo que tuviese la una de dichas lineas por altura, y la otra linea por base.

En conformidad de esto, para representar la superficie
112. del paralelogramo $ABCD$, escribirémos $BC \times EF$; en la figura 111 escribiríamos $BC \times AB$; y para la figura 113, cuyos dos lados AB y BC son iguales, en lugar de $AB \times BC$ ó $AB \times AB$ escribirémos $\overline{AB}^2$ ó $(AB)^2$; de suerte que $\overline{AB}^2$ expresará la linea AB multiplicada por sí misma, ó la superficie del quadrado construido sobre la linea AB; si quisiéramos representar que la linea AB está *levantada al cubo*, escribiríamos $\overline{AB}^3$ ó $(AB)^3$, lo mismo que $AB \times AB \times AB$ ó $\overline{AB}^2 \times AB$.

496 De lo que acabamos de decir resulta, que dos paralelogramos serán iguales en superficie, siempre que el producto de la base del uno multiplicada por la altura, sea igual al producto de la base del segundo multiplicada por su altura; luego *quando dos paralelogramos son iguales en superficie, tienen sus bases recíprocamente proporcionales á sus alturas*; esto es, que la base y la altura del uno pueden considerarse como los extremos de una proporcion, de la qual la base y la altura del otro serian los medios; porque considerándolos así, el producto de los extremos es igual al producto de los medios, en cuyo caso hay necesariamente proporcion.

Pe-

Pero puede percibirse inmediatamente esta verdad, Fig.
considerando que si la base del uno es menor, v. gr. que la del otro, es preciso que sea su altura mayor á proporcion para que salga el mismo producto.

497 Ya que un triángulo es la mitad de un paralelogramo de una misma base y altura (491), se infiere de lo que acabamos de decir (495), que *para hallar la superficie de un triángulo, se ha de multiplicar la base por la altura y tomar la mitad del producto.*

498 Y como es lo mismo tomar la mitad del producto expresado, que multiplicar la base por la mitad de la altura ó la altura por la mitad de la base, resulta que *se hallará la superficie de todo triángulo, multiplicando su base por la mitad de su altura.*

499 No hay duda en que si por cada punto de la linea *AB* nos figuramos tiradas lineas paralelas á la base *CD*, estas lineas llenarán toda la superficie del triángulo *ACD*, de manera que la superficie de esta figura será igual 114.
á la suma de todas estas paralelas. Pero estas lineas forman una progresion arismética (449), que empieza por cero, pues en *A* empieza solo por un punto y no por una linea; luego siendo lo propio la superficie de estas lineas que la superficie del triángulo, y siendo esta superficie igual al producto de *CD* por la mitad de *AB*; se infiere que *para hallar la suma de todos los términos de una progresion arismética que empieza por cero, se ha de multiplicar el término mayor por la mitad de la suma de todos los términos.*

Fig. 500 De la práctica enseñada (498) resulta 1.° *que para hallar la superficie de un trapecio es menester sumar los dos lados paralelos, tomar la mitad de la suma, y multiplicarla por la perpendicular tirada entre las dos paralelas.*

115. Porque, si se tira la diagonal *BD* salen dos triángulos *ABD*, *BDC*, cuya altura comun es *EF*. Para hallar la superficie del triángulo *ABD* se debería, pues, multiplicar la mitad de *AD* por *EF*; y para sacar la superficie del triángulo *BDC* se debería multiplicar la mitad de *BC* tambien por *EF*; luego la superficie del trapecio vale la mitad de *AD* multiplicada por *EF*, mas la mitad de *BC* multiplicada por *EF*; esto es, la mitad de la suma *AD* mas *BC*, multiplicada por *EF*.

Si por el medio *G* de la linea *AB* se tira *GH* paralela á *BC*, esta linea *GH* será la mitad de la suma de las dos lineas *AD* y *BC*. Porque sea *J* el punto donde *GH* corta la diagonal *BD*, los triángulos *BAD*, *BGJ*, semejantes por causa de las paralelas *AD* y *GJ*, manifiestan que (459) *GJ* es la mitad de *AD*, pues *BG* es la mitad de *AB*. Pero como *GH* es paralela á *BC* y á *AD*, la *DC* está cortada (451) del mismo modo que la *AB*; probarémos, pues, del mismo modo que *JH* es la mitad de *BC*, considerando los triángulos semejantes *BDC* y *JDH*.

Luego, y por lo dicho antes, podemos afirmar que *la superficie de un trapecio* ABCD *es igual al producto de su altura* EF, *por la linea* GH *tirada á distancias iguales de las dos bases opuestas.*

2.°

501 2.° Para *hallar la superficie de un polygono qualquiera* se le dividirá en triángulos por lineas tiradas desde un mismo punto á cada uno de sus ángulos, y se calculará separadamente la superficie de cada uno de estos triángulos; sumando todos estos productos, saldrá la superficie total del polygono. Pero á fin de que sea el menor que se pueda el número de los triángulos, convendrá tirar todas estas lineas desde uno de los ángulos, como en el polygono *ABCDEF*. Fig. 116.

502 *La superficie de un polygono regular* ABCDE *circunscripto á un círculo, es igual al producto del radio por la mitad del perímetro.* 117.

Tírense desde el centro *F* lineas como *FA*, *FB* &c. á los ángulos del polygono, cuyas lineas dividirán el polygono en tantos triángulos, como lados tiene. Tienen todos estos triángulos una misma altura igual al radio comun ó al apotema *FG*, tirado al punto de contacto, por ser perpendicular á la tangente (346) todo radio tirado al punto de contacto. Pero qualquiera de los triángulos como *DFC* es igual al producto de la mitad del lado *DC*, base suya, por el radio *FG*, altura suya. Luego la suma de los triángulos ó el polygono circunscripto es igual al producto de la mitad de todos los lados, esto es, de la mitad del perímetro por el radio.

503 Lo mismo es multiplicar la mitad del perímetro del polygono regular por su apotema, que multiplicar la mitad del apotema por todo el perímetro. Y como la superficie

Fig. 117. de un triángulo, cuya base fuese el perímetro de un polygono regular dado, y la altura la misma que la del apotema de dicho polygono, sería igual (498) al producto de su base por la mitad de su altura; resulta que *la superficie del polygono regular es con efecto igual á la de un triángulo que tuviese por base el perímetro del polygono, y por altura la de su apotema.*

Y como la circunferencia de un círculo no se distingue (444) del perímetro de un polygono regular de una infinidad de lados, tambien *será la superficie de un círculo igual al producto de su perímetro ó circunferencia por la mitad del radio, ó á la superficie de un triángulo cuya base fuese igual al perímetro del círculo y la altura la misma que el radio.*

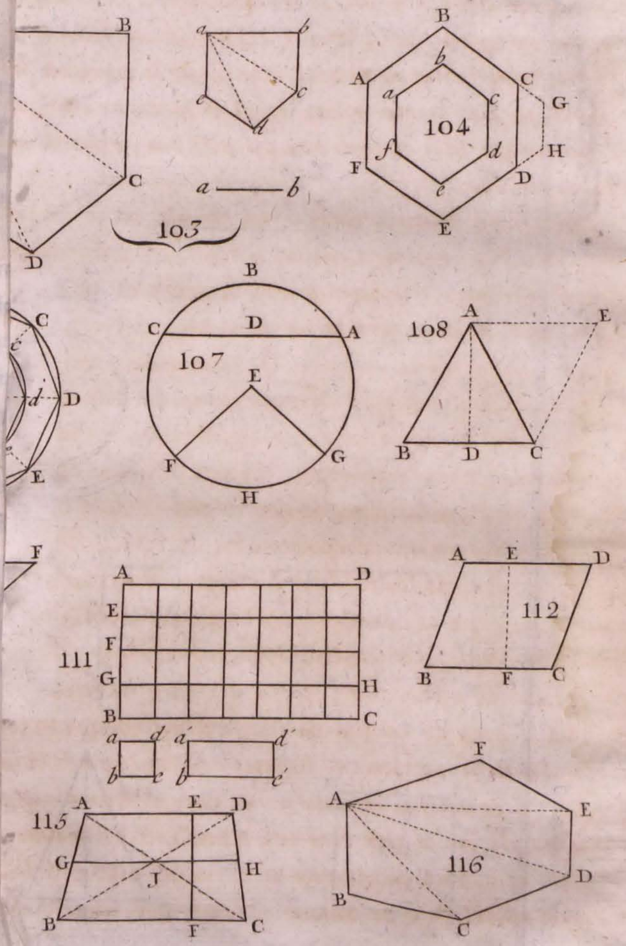
Porque el radio de un círculo qualquiera no discrepa del apotema del polygono regular de una infinidad de lados, en el qual se le puede suponer inscripto.

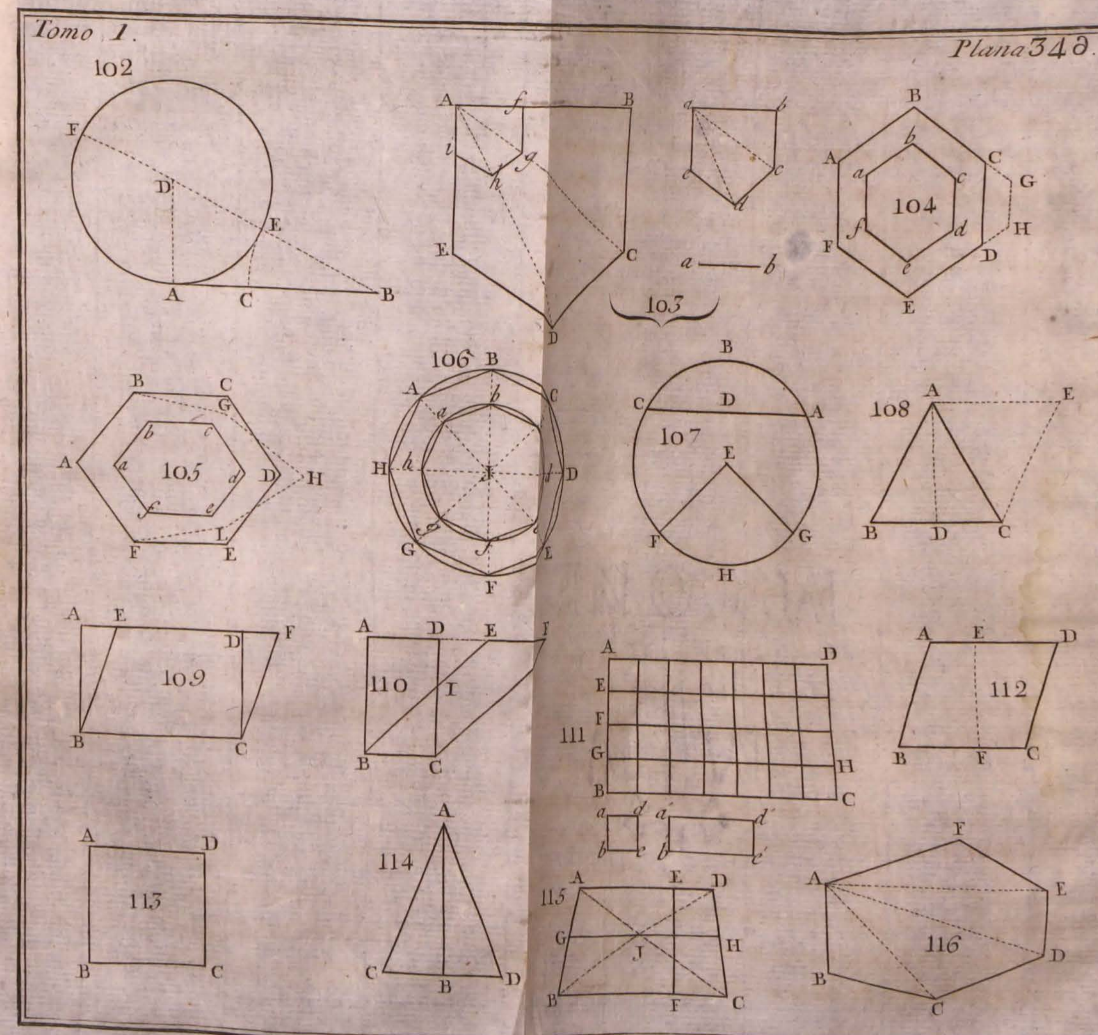
504 Ya que las circunferencias de los círculos son unas con otras como los radios ó como los diámetros (487), es evidente, que si conociésemos la circunferencia de un círculo de diámetro conocido, se podria determinar la circunferencia de otro círculo, cuyo diámetro fuese tambien conocido, pues no habria mas que calcular el quarto término de esta proporcion: *el diámetro de la circunferencia conocida es á esta misma circunferencia, como el diámetro de la circunferencia que se pide es á esta segunda circunferencia.*

No se conoce cabalmente la razon del diámetro á la circunferencia; pero se conoce un valor tan aproxîmado,

que

Plana 34ª.




Tomo I.
Plana 34 ∂.
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112
113
114
115
116

que una razon mas cabal puede considerarse como de todo punto inutil en la práctica.

Pedro Mecio halló, que la razon del diámetro á la circunferencia es la de 113 á 355. Pero nosotros probarémos á su tiempo, que el radio es á la semicircunferencia, y por consiguiente el diámetro á la circunferencia :: 1 : 3,14159265358979 32, cuya aproximacion han continuado algunos hasta ciento y veinte y siete decimales.

Muchos siglos antes ya habia hallado Arquimedes, que un círculo cuyo diámetro fuese de 7 pies, tendría 22 pies de circunferencia, con muy poca diferencia. Así, si se pide qual será la circunferencia de un círculo cuyo diámetro coge 20 pies, se ha de buscar el quarto término de la proporcion, cuyos tres primeros son

$$7 : 22 :: 20 :$$

Este quarto término el qual es $62\frac{6}{7}$ expresa con muy corta diferencia la longitud de la circunferencia de un círculo de 20 pies de diámetro. Usando de la razon de 7 : 22, se puede excusar formar la proporcion; basta triplicar el diámetro, y añadir al producto la séptima parte del mismo diámetro; porque $3\frac{1}{7}$ es el número de veces que 7 cabe en 22.

Ya es facil hallar la superficie de un círculo propuesto, á lo menos con una puntualidad suficiente respecto de lo que se necesita para la práctica.

Si se pregunta de quantos pies quadrados será la superficie de un círculo que tenga 20 pies de diámetro, calcularé su circunferencia por el método poco ha declarado,

Fig. do ; y hallaré que es de $62\frac{6}{7}$ pies. Multiplicaré , pues, $62\frac{6}{7}$ por 5 mitad del radio (503), y hallaré $314\frac{2}{7}$ pies quadrados , valor de la superficie de dicho círculo.

505 Ya que se puede considerar el círculo como un polygono regular de una infinidad de lados (444), un sector de círculo se puede considerar como una porcion de polygono regular , y su superficie como compuesta de una infinidad de triángulos , que todos tienen su vértice en el centro , y por altura el radio ; luego *para hallar la super-*
118. *ficie de un sector de círculo* CFHGC , *se ha de multiplicar el arco que le sirve de base , por la mitad del radio.*

Por lo que mira al segmento *FHGF* , es evidente que *para hallar su superficie , se debe restar la superficie del triángulo* FCG *de la del sector* CFHGC.

Es evidente , que en un mismo círculo las longitudes de los arcos son proporcionales al número de sus grados; que por lo mismo quando se conoce la longitud de la circunferencia , se puede *hallar la de un arco de un número de grados qualquiera*, haciendo esta proporcion 360° *son al número de grados del arco , cuya longitud se busca, como la longitud de la circunferencia es á la del mismo arco.*

Si se tratase *de buscar la superficie de un sector , conocido que sea el número de grados de su arco y el radio*, se buscará por medio de la proporcion que acabo de enseñar la longitud del arco , base del sector propuesto , y se la multiplicará por la mitad del radio. Supongamos que se me pregunte qual es la superficie de un sector de $32^\circ\ 40'$ en un

cír-

círculo que tiene 20 pies de diámetro; hallaré como antes (504), que la circunferencia es de $62\frac{6}{7}$ pies; buscando el quarto término de una proporcion cuyos tres primeros son $360^{\circ} : 32^{\circ}\ 40' :: 62\frac{6}{7}$: este quarto término, que se hallará ser $5\frac{19}{27}$ será la longitud del arco de $32^{\circ}\ 40'$, la qual multiplicada por 5, mitad del radio, dá $28\frac{14}{27}$ para la superficie del sector de $32^{\circ}\ 40'$. Fig.

Hecho esto, es muy facil *hallar la superficie del segmento*, determinando el lado *FG* y la altura *CD* del triángulo *FCG*, por una operacion fundada en las proposiciones sentadas antes (459, 464 y 465). 118.

506 Sería muy facil hallar la superficie de la corona *X*, buscando la superficie del círculo, cuyo radio es *DG*, la superficie del círculo cuyo radio es *DE*, y restando la primera de la segunda, sería la resta la superficie de la corona *X*. 119.

Pero darémos en adelante un método mas breve para hallar la superficie de una corona ó ánulo qualquiera.

De la comparacion de las Superficies.

507 *Las superficies de los paralelogramos son unas con otras generalmente como los productos de sus bases por sus alturas.*

Quiero decir, que en la superficie de un paralelogramo cabe la de otro paralelogramo, tanto como el producto de la base del primero por su altura cabe el producto de la base del segundo por su altura. Y en esto no hay du-

Fig. duda alguna, pues todo paralelogramo es igual al producto de su base por su altura.

De donde hemos de inferir, que *quando dos paralelogramos tienen una misma altura, son uno con otro como sus bases; y que quando tienen la misma base, son uno con otro como sus alturas.*

Porque no mudará la razon de los productos, porque se omita en cada uno el factor comun (201) á ambos.

508 Ya que los triángulos son mitades (491) de los paralelogramos de una misma base y altura que ellos, hemos de inferir, que *los triángulos de una misma altura son unos con otros como sus bases; y que los triángulos son unos con otros como sus alturas, quando tienen unas mismas bases, ó bases iguales.*

509 *Las superficies de los paralelogramos ó de los triángulos semejantes son unas con otras como los quadrados de los lados homólogos.*

120. Porque las superficies de los paralelogramos $ABCD$ y $abcd$ son unas con otras (507) como los productos de sus bases por sus alturas; esto es, $ABCD : abcd :: BC \times AE : bc \times ae$. Pero si los paralelogramos $ABCD$, $abcd$ son semejantes, y si AB y ab son dos lados homólogos, los triángulos AEB, aeb serán semejantes (460), porque ademas del ángulo recto en E y e, han de tener tambien el ángulo B igual al ángulo b; tendremos, pues, $AE : ae :: AB : ab$, ó $:: BC : bc$, por ser semejantes los paralelogramos; podemos, pues (200), en los productos $BC \times AE$ y

bc

$bc \times de$, substituir la razon de $BC : bc$ en lugar de la de Fig.
$AE : ae$; y entonces la razon de estos productos será la 120.
de $(BC)^2 : (bc)^2$; luego $ABCD : abcd :: (BC)^2 : (bc)^2$; y como es lícito tomar por base el lado que se quiera, queda probado que en general las superficies de los paralelogramos semejantes son unas con otras como los quadrados de sus lados homólogos.

510 Por lo que toca á *los triángulos semejantes, es evidente que tienen una misma propiedad*, pues son mitades de paralelogramos de la misma base y altura que ellos, y las mitades tienen unas con otras la misma razon que los todos.

511 *En general, las superficies de dos figuras semejantes qualesquiera, son unas con otras como los quadrados de los lados ó de las líneas homólogas de dichas figuras.*

Porque las superficies de dos figuras semejantes siempre se pueden considerar (483) como compuestas de un mismo número de triángulos semejantes cada uno al suyo; entonces la superficie de cada triángulo de la primer figura será á la del triángulo correspondiente en la segunda, como el quadrado de un lado del primero es al quadrado de un lado homólogo del segundo (510); luego ya que por estar en la misma razon todos los lados homólogos, sus quadrados han de estar tambien en la misma razon (198), cada triángulo del primer polygono será al triángulo correspondiente del segundo, como el quadrado de un lado qualquiera del primer polygono, es al quadrado del lado homólogo del segundo; luego (190) la suma de todos los trián-

gu-

Fig. gulos del primero será á la suma de todos los triángulos del segundo, ó la superficie del primero á la superficie del segundo, tambien en la misma razon.

512 *Son, pues, unas con otras las superficies de los círculos como los quadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Porque son los círculos figuras semejantes (487) cuyos radios y diámetros son lineas homólogas.

Lo propio debe entenderse de los sectores y segmentos de igual número de grados.

Se echa, pues, de ver que no sucede lo mismo con las superficies de las figuras semejantes que con sus contornos; los contornos siguen la razon simple (486) de los lados; quiero decir, que de dos figuras semejantes, si un lado de la una es duplo ó triplo &c. de un lado homólogo de la otra, el contorno de la primera será tambien duplo, triplo &c. del contorno de la otra; pero no sucede lo propio con las superficies; la de la primer figura sería en este caso quatro veces, nueve veces &c. mayor que la primera.

Puede hacerse patente esta verdad considerando, que
121. el paralelogramo *ABCD*, cuyo lado *AB* es duplo del lado *AG* del paralelogramo semejante *AGJE*, contiene quatro paralelogramos de todo punto iguales á este; y el triángu-
122. lo *ADF*, cuyo lado *AD* es duplo del lado *AB* del triángulo semejante *ABC*, contiene quatro triángulos iguales á este; asimismo, el triángulo *AGK*, cuyo lado *AG* es triplo de *AB*, contiene nueve triángulos iguales á *ABC*. Lo mismo probaríamos respecto de los círculos; *un círculo que tu-*

vie-

viese un radio duplo ó triplo ó quádruplo &c. del radio de Fig.
otro círculo, tendrá 4 veces ó 9 veces ó 16 veces &c. tanta superficie como este.

513 Si se quisiese, pues, construir una figura semejante á otra, y cuya superficie tuviese con la de esta una razon dada, v. gr. la razon de 3 á 2, no se deberian hacer los lados homólogos en la razon de 3 á 2, porque entonces serian las superficies como 9 á 4; pero se deberian hacer estos lados de tal cantidad que fuesen unos con otros sus quadrados :: 3 : 2; esto es, suponiendo que el lado *AB* de la figura *X* sea de 50^p, v. gr. se de- 123.
beria, para hallar el lado hómologo *ab* de la figura *x* que se busca, calcular el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros serian $3 : 2 :: (50)^2$ ó 50×50 es á un quarto término; este quarto término, que es $1666\frac{2}{3}$ sería el quadrado del lado *ab*; por lo que, sacando la raiz quadrada (151) de $1666\frac{2}{3}$, saldrán $40^p,824$, esto es, $40^p\ 9^p\ 10^l$ con poca diferencia para el lado *ab*. En conociendo el valor de un lado de la figura *x*, es facil construir esta figura por lo dicho (484).

514 *Si un quadrado y un pentágono fuesen ambos re-* 124.
gulares é isoperímetros, el que mayor número de lados tuviere, será mayor en superficie; quiero decir, que, en general, de las figuras regulares isoperímetras aquella tiene mayor superficie que mas lados tiene.

Porque, si inscribimos un círculo en cada una de las dos figuras propuestas, y tiramos los radios *CA* y *CB*, el

Fig. pentágono será igual al producto de la mitad de su perí-
124. metro por el radio CB (502), y el quadrado será también igual al producto de la mitad de su perímetro por el radio CA; ya que los perímetros son iguales por lo supuesto, el pentágono y el quadrado son uno con otro como los radios CB y CA. Pero el radio CB es mayor que el radio CA; porque si fuesen iguales estos dos radios, sus dos círculos lo serian tambien; y por consiguiente el perímetro del pentágono sería menor que el perímetro del quadrado, porque de todos los polygonos regulares circunscriptos á círculos iguales, el que mayor número de lados tiene, tiene menor perímetro (443). Pero los perímetros del pentágono y del quadrado son iguales, segun suponemos; luego el círculo del pentágono ha de ser mayor que el del quadrado; luego el radio CB es mayor que CA; luego la superficie del pentágono es mayor que la del quadrado.

Lo propio se probará por el mismo camino respecto de otros dos polygonos regulares isoperímetros, de los quales el uno tuviese mas lados que el otro.

515 Luego *ya que el círculo es un polygono de una infinidad de lados* (444) *tiene mas superficie que otra qualquiera figura de igual perímetro.*

516 Conviene reparar, que *si un quadrado y un rectángulo oblongo son isoperímetros, el quadrado será mayor que el rectángulo.*

Supongamos v. gr. un quadrado cuyos lados son cada uno de 10 varas, y un rectángulo cuya base sea de 15

va-

varas y el lado perpendicular á la base tenga 5, el períme- Fig.
tro del quadrado será de 40 varas, y lo será tambien el del rectángulo; sin embargo tendrá el quadrado 100 varas quadradas de area, y el rectángulo no tendrá sino 75.

De donde se debe inferir que *entre los rectángulos oblongos isoperímetros, los que mas se arriman á la figura del quadrado son mayores que los otros*; un rectángulo v. gr. cuya base es de 12 varas, y el lado de 8, es mayor que el otro de que hemos hablado, aunque son iguales sus perímetros. Y de esto se echa de ver, que dos piezas de tierra, dos huertas v. gr. pueden ser desiguales, bien que los contornos de las cercas sean iguales.

517 *Si sobre los tres lados* AB, BC, AC *de un triángulo rectángulo* ABC *se construyen tres quadrados* BEFA, BGHC, AJLC; *el quadrado formado sobre la hypotenusa será igual á la suma de los quadrados formados sobre los otros dos lados.* 125.

Báxese desde el ángulo recto *B* á la hypotenusa *AC* la perpendicular *BD*; los dos triángulos *BDA*, *BDC* serán cada uno semejantes al triángulo *ABC* (463); y por consiguiente las superficies de estos tres triángulos serán unos con otros como los quadrados de sus lados homólogos; tenemos, pues, esta serie de razones iguales $ABD : (AB)^2 :: BDC : (BC)^2 :: ABC : (AC)^2$, ó $ABD : ABEF :: BDC : BGHC :: ABC : AJLC$; luego (189) $ABD + BDC : ABEF + BGHC :: ABC : AJLC$. Pero es evidente que *ABC* vale las dos partes *ABD+BDC*; luego

Fig. *AJLC* vale *ABEF*+*BGHC*, lo que podemos señalar
125. tambien de este otro modo $(AC)^2$ vale $(AB)^2+(BC)^2$.

518 Ya que el quadrado de la hypotenusa vale la suma de los quadrados de los dos lados del ángulo recto, inferiremos, que *el quadrado del uno de los lados del ángulo recto vale el quadrado de la hypotenusa menos el quadrado del otro lado; esto es, que* $(BC)^2$ *vale* $(AC)^2-(AB)^2$, *y* $(AB)^2$ *vale* $(AC)^2-(BC)^2$.

519 Y pues el quadrado de la hypotenusa vale la suma de los quadrados de los lados del ángulo recto, se infiere que si el triángulo rectángulo es isósceles, como suce-
126. de, v. gr. en un quadrado quando se tira la diagonal *AC*, el quadrado de la hypotenusa será duplo del quadrado del uno de sus lados; luego la superficie de un quadrado es á la superficie del quadrado construido sobre la diagonal, como 1 es á 2; luego (199) el lado de un quadrado es á su diagonal, como 1 es á la raiz quadrada de 2; y como esta raiz no puede hallarse cabal en números, se infiere que *no se puede expresar cabal en números la razon del lado de un quadrado á su diagonal*; *esto es, que la diagonal es inconmensurable, ó no tiene medida alguna comun con su lado.*

127. 520 Ya podemos declarar el método que ofrecimos (506) para *medir la superficie de una corona* X, cuyo método consiste en buscar una media proporcional *GH* (475) entre las partes *EG*, *GF* del diámetro del círculo mayor; y la superficie del círculo cuyo radio fuere dicha media proporcional, será igual á la superficie de la corona.

Por-

Porque, una vez que la media proporcional *GH* es perpendicular en el punto *G*, será rectángulo el triángulo *DGH*. Pero de la propiedad del triángulo rectángulo (518) resulta, que al círculo del radio *DG* le falta el círculo del radio *GH* para que sea igual al círculo cuyo radio fuere *DH* ó *DE*; y como al círculo cuyo radio fuere *DG* le falta cabalmente la corona *X* para ser igual al círculo cuyo radio fuere *DE*, se infiere que el círculo cuyo radio fuere *GH* es igual á la superficie de la corona *X*. Fig.

521 En la demostracion del núm. 517 hemos visto como la semejanza de los triángulos *ABC*, *ADB*, *CDB* dá $ABC : (AC)^2 :: ADB : (AB)^2 :: BDC : (BC)^2$; pero los triángulos *ABC*, *ADB*, *BDC* tienen todos tres una misma altura, son por consiguiente unos con otros (508) como sus bases; luego $ABC : ADB : BDC :: AC : AD : DC$, luego *el quadrado formado sobre la hypotenusa es á cada uno de los quadrados formados sobre los otros dos lados, como la hypotenusa es á cada uno de los segmentos correspondientes á dichos lados.* 125.

522 En esto se funda un método para formar con lineas lo que hicimos con números (513); esto es, un método para *construir una figura* x *semejante á una figura propuesta* X, *y cuya superficie sea respecto de la de esta en una razon dada.* 123.

Tírese una linea indefinita *DE*, en la qual se tomarán las dos partes *DP* y *PE* tales, que *DP* sea á *PE* como la superficie de la figura dada *X* ha de ser á la de la otra figu- 128. 123.

Fig, gura x ; esto es :: 3 : 2 , si se quiere que sea x los $\frac{2}{3}$ de X.
128. Sobre DE como diámetro se trazará el semicírculo DBE; y levantando en el punto P la perpendicular PB, se tirarán desde el punto B, donde encuentra la circunferencia, á los dos extremos D y E, las cuerdas BD, BE. Sobre DB se tomará BA igual á un lado AB de la figura X, y tirando AC paralela á DE, será BC el lado homólogo de la figura x, la qual se construirá despues segun enseñamos (485).

La razon es esta ; la superficie de la figura X ha de ser á la de la figura x, como el quadrado del lado AB es al quadrado del lado que buscamos ab, esto es :: $(AB)^2$: $(ab)^2$; y como tambien se quiere que estas superficies sean la una á la otra :: 3 : 2 ; es preciso que $(AB)^2 : (ab)^2$ :: 3 : 2. Pero $AB : BC :: BD : BE$, y por consiguiente (198) $(AB)^2 : (BC)^2 :: (BD)^2 : (BE)^2$; y como el triángulo DBE es rectángulo (376), tenemos (521) $(BD)^2 : (BE)^2 :: DP : PE$; esto es, como 3 : 2 ; luego tambien $(AB)^2 : (BC)^2 :: (AB)^2 : (ab)^2$; luego ab ha de ser igual á BC.

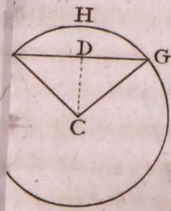
129. 523 Infiérese de lo que acabamos de probar (521) que los *quadrados de las cuerdas* AC, AD &c. *tiradas desde el extremo de un diámetro* AB *son unas con otras como las partes* AP, AO *que cortan en dicho diámetro las perpendiculares baxadas desde los extremos de dichas cuerdas.*

Porque, si tiramos las cuerdas BC y BD, tendremos (521) en el triángulo rectángulo ACB;

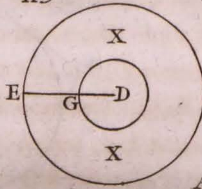
$$(AB)^2 : (AC)^2 :: AB : AP;$$

y

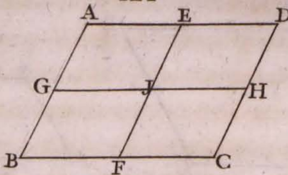
Plana 358.



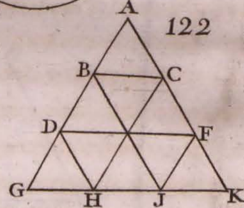
119

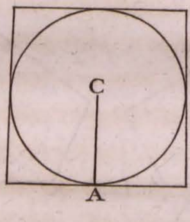


121

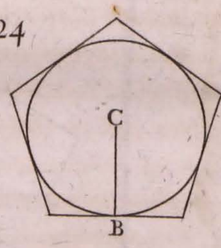


122

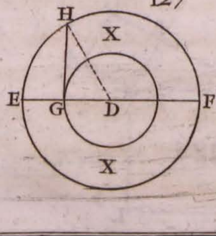




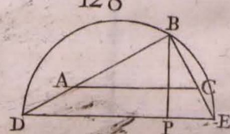
124

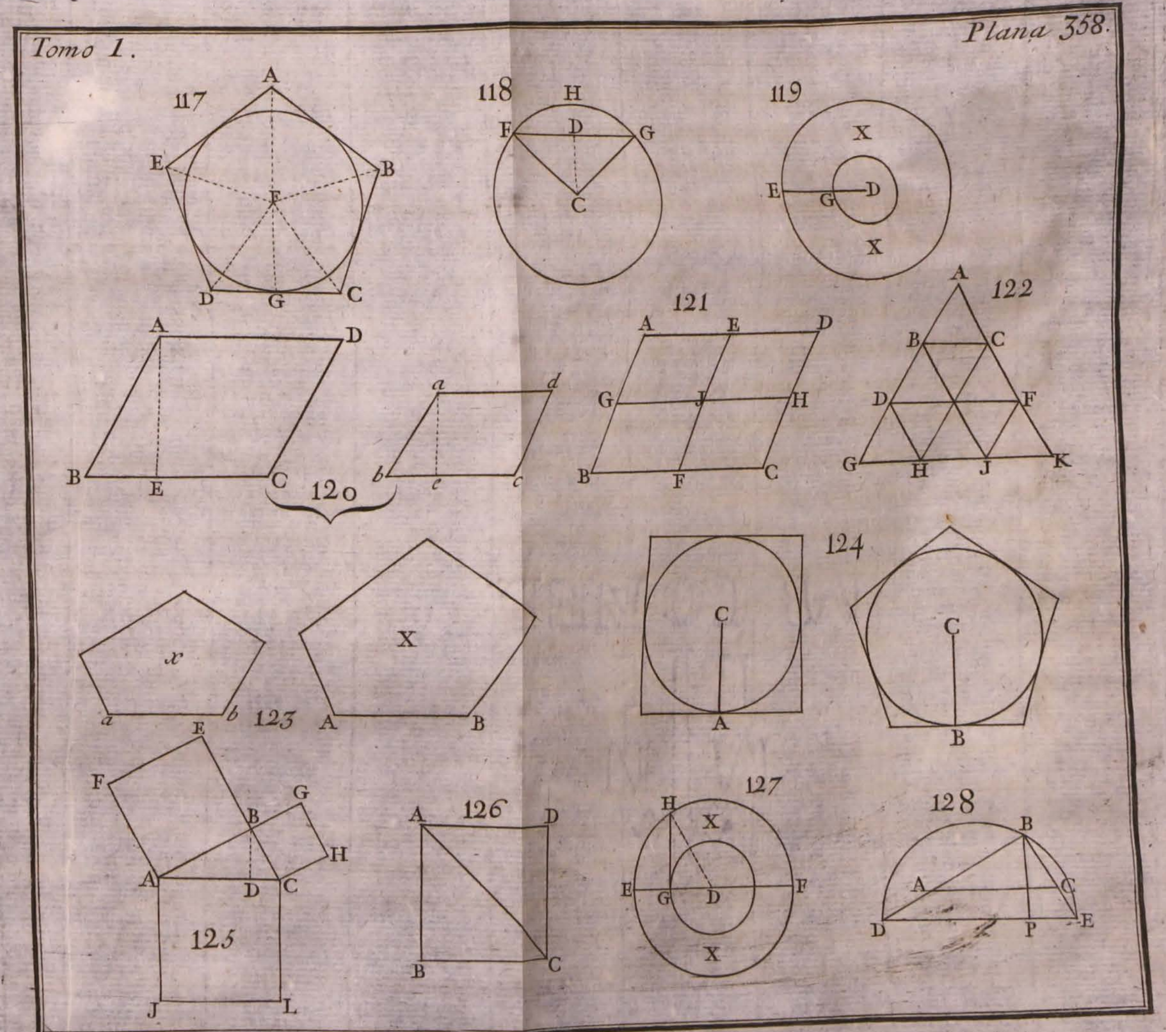


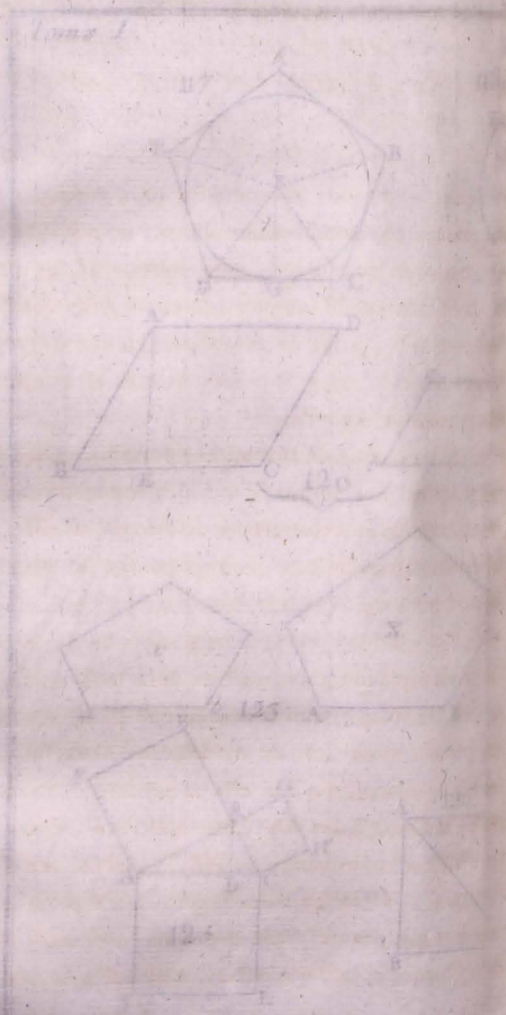
127



128




Tomo 1.
Plana 358.
117
118
119
120
121
122
123
124
125
126
127
128


Tome I
117
120
123
125

y en el triángulo rectángulo ADB; Fig.

$$AD^2 : AB^2 :: AO : AB;$$

luego (201) $(AD)^2 : (AC)^2 :: AO : AP$.

De los Planos.

524 Sentados los métodos para medir y averiguar las razones de las superficies planas, no nos falta, para poder tratar de los sólidos, sino considerar las propiedades de las lineas rectas en sus diferentes situaciones respecto de los planos, y las de los planos en sus diferentes situaciones respecto unos de otros; este es el asunto que llama ahora nuestra atencion.

A los planos de que vamos á tratar no les suponemos ni magnitud, ni figura alguna determinada; los supondremos extensos indefinitamente ácia todas las direcciones; y si les damos las figuras que representan las láminas, es con sola la mira de aliviar la fantasía.

525 Dícese de una linea AB que *es perpendicular á un plano*, quando no se inclina ácia lado alguno de dicho plano. De lo que se infiere que una linea perpendicular á un plano, lo es tambien á todas las lineas que encuentra en dicho plano. Así, si AB es perpendicular al plano X, lo es tambien á las dos lineas CD, EF, y son por consiguiente rectos los ángulos ABC, ABD, ABE, ABF. 130.

526 *Desde un punto* B *del plano* X *no se puede levantar mas que una perpendicular á dicho plano.*

Porque si la linea AB es perpendicular al plano, la li-

Fig. nea *OB* será oblicua por precision ; pues teniendo esta linea
130. sus puntos entre el plano y la perpendicular *AB* , no puede menos de inclinarse ácia alguno de los lados del plano.

527 *Tampoco se puede tirar desde un punto fuera de un plano mas que una perpendicular á dicho plano.*

Por lo que , si *AB* es perpendicular al plano *X* , *AG* será oblicua ; pues si nos figuramos tirada la linea *BG*, resultará el triángulo *ABG* , cuyo ángulo *B* será recto , por ser , segun suponemos , la linea *AB* perpendicular al plano; por consiguiente será agudo el ángulo *G* ; luego la linea *AG* está inclinada ácia *B*.

528 El ángulo *AGB* que forma la oblicua *AG* con la linea *BG* que encuentra la perpendicular , es la medida de la inclinacion de la linea *AG* respecto del plano.

529 Dícese de un plano que *es perpendicular* á otro, quando le corta de manera que no se inclina ácia lado alguno ; y se dice de un plano que es *oblicuo* respecto de otro, quando se le inclina por algun lado.

530 Llamamos *comun seccion* de dos planos la linea donde se encuentran , concurren ó se cortan mutuamente di-
131. chos planos; tal es la linea *EF* respecto de los planos *T* y *S*.

531 Si desde un mismo punto *L* de la comun seccion de dos planos se tiran las dos lineas *LG* , *LH* , la una en el plano *S* , la otra en el plano *T* , ambas perpendiculares á la comun seccion *EF* , el ángulo *GLH* que formrán , será la medida de la inclinacion de los dos planos , si formaren uno con otro un ángulo agudo ; pero si formaren un ángulo

rec-

recto, los dos planos serán perpendiculares el uno al otro. Fig.

532 *Si una linea* AB *fuere perpendicular al plano* X, 132.
y otro plano Y *pasare por la linea* AB, *cogiéndola, será el plano* Y *perpendicular al plano* X.

Porque tirando desde el punto *B* en el plano *X* una linea *BC* perpendicular á la comun seccion *EF* de los dos planos, la linea *AB* será perpendicular á *BC* y á *EF* (525), por ser perpendicular al plano *X*, luego el ángulo *ABC* será recto. Pero este ángulo determina la situacion de los dos planos; luego serán perpendiculares el uno al otro.

533 *Una linea recta no puede estar parte en un plano* 133.
y parte fuera de él; quiero decir, *que una linea recta* AB *en el plano* X, *y una linea recta* BC *fuera de dicho plano no son una sola y misma linea.*

Levántese desde el punto *B* en el plano *X* una perpendicular *BE* á la linea *AB*, y una perpendicular *BD* á la linea *BE*. La suma de los ángulos *EBA* y *EBD* es igual á la suma de dos ángulos rectos. Así (301) las lineas *BA* y *BD* tiradas desde el mismo punto *B* de la linea recta *BE* componen una sola recta *ABD*; y por consiguiente, las lineas *AB* y *BC* no son una sola linea recta. Lo mismo se probaría aunque pasare la linea *BC* mas cerca ó mas lexos de la *AB*.

534 *Lo propio digo de un plano respecto de otro.*

Porque si se tirase una linea recta en la parte plana comun á los dos planos, se podria prolongar en el uno y en el otro, y tendria parte en uno de los dos planos, y la par-

te

Fig. te que estuviese en el otro plano estaría mas alta ó mas baxa; lo que no puede ser, segun acabamos de probar (533).

134. 535 *Dos lineas* AB, CD *que se cortan están en un mismo plano.*

Para probarlo, tírese desde un punto qualquiera *A* de la linea *AB* á un punto qualquiera *D* de la linea *CD*, una linea recta *AD*. Es evidente que la parte *AE* está en el plano del triángulo *AED*, pues es el uno de los lados de dicho triángulo; por la misma razon la parte *DE* está tambien en el plano del triángulo *AED*; luego las lineas *AB*, *CD*, tienen cada una una parte en un mismo plano; luego (533) están todas en un mismo plano.

132. 536 *La interseccion ó seccion comun* EF *de dos planos* X *é* Y *que se cortan, es una linea recta.*

Porque la linea *EF* pertenece á ambos planos, por ser su comun seccion. Pero por ser linea del plano *X* no puede tirar ni ácia arriba, ni ácia abaxo, porque en qualquiera de estos dos casos se saldria del plano *X*; y en quanto es linea del plano *Y*, no puede desviarse ni á la derecha, ni á la izquierda; luego la linea *EF* no se tuerce ácia lado alguno; luego es recta.

130. 537 *Si una linea* AB *levantada sobre el plano* X *fuere perpendicular á las dos lineas* BC, BE, *que están en dicho plano, será tambien perpendicular al plano.*

Prolónguense las lineas *BC*, *BE* ácia *B*, y tómense en sus prolongaciones las partes *BD*, *BF* iguales con las lineas *BC* y *BE*, que supongo iguales una con otra. Ya que

AB

AB es perpendicular á *CD*, y el punto *B* está á igual distancia de los puntos *C* y *D*, el extremo *A* está tambien á igual distancia de dichos puntos (307). Por la misma razon el extremo *A* está á igual distancia de los puntos *E* y *F*; luego la linea *AB* es perpendicular al plano. Fig. 130.

538 Luego, *si una linea levantada sobre un plano es perpendicular á dos lineas de dicho plano, será tambien perpendicular á todas las lineas que encontrare del plano*; porque una vez que es perpendicular al plano, lo será tambien á todas las lineas que encontrare del plano (525).

539 *Si un plano* Y *fuese perpendicular á otro plano* X, *y se tira en el uno, v. gr. en el plano* Y, *una linea* AB *perpendicular á la comun seccion* EF, *dicha perpendicular lo será tambien al otro plano* X. 132.

Figurémonos una linea *CBD* perpendicular al plano *Y*, y puesta en el plano *X*, será perpendicular á la linea *AB*, que está en el plano *Y* (525). Y recíprocamente *AB* será perpendicular á *CD*; fuera de esto, tambien suponemos que *AB* es perpendicular á *EF*; luego es perpendicular al plano *X* (537).

Del mismo modo probaríamos que si se tirára en el plano *X* la linea *BC* perpendicular á *EF*, sería tambien perpendicular al plano *Y*.

540 De esta proposicion se puede inferir, que *si por el punto* B *de la comun seccion de los dos planos* X *é* Y *se tira una linea perpendicular al uno de los planos* X, *no podrá menos de estar en el otro plano* Y.

Por-

Fig. Porque, si no fuera así, dos lineas tiradas desde un mismo punto, es á saber *AB* y la otra linea, serian ambas perpendiculares al plano *X*; caso imposible (527).

135. 542 *Las lineas como* AB *y* CD *perpendiculares al plano* X *son paralelas.*

Tírese la linea recta *BD* en el plano *X* entre las dos perpendiculares, y supóngase que un plano *Y* pase por *AB* y *BD*; este plano será perpendicular al plano *X*, pues pasa por la perpendicular *AB*, y pasará tambien por *CD*, ó, lo que es lo mismo, estará *CD* en el plano *Y* (540); luego las tres lineas *AB*, *CD*, *BD* están en el plano *Y*. Pero las dos lineas *AB*, *CD* son perpendiculares á *BD* (525), que está tambien en el plano *X*; luego *AB* y *CD* son paralelas (338).

542 De donde inferiremos que *se puede suponer que están en un mismo plano* Y *dos lineas perpendiculares á otro plano* X. Es evidente por la prueba de la primer proposicion.

543 *Podemos tambien suponer que están en un mismo plano dos lineas quando son paralelas.*

Supongamos que un plano pase por la una de dichas lineas, y por un punto de la otra; es preciso que esta esté toda en dicho plano; porque si esta segunda paralela no estuviera toda en dicho plano, se apartaría de él, y por consiguiente se apartaría mas y mas de la primera paralela que está en el plano. De lo que resultaría contra la suposicion, que las dos lineas no serian paralelas.

135. 544 *Si la una* AB *de dos lineas* AB, CD *paralelas,* fue-

fuere perpendicular al plano X, *la otra paralela* CD *lo será* Fig.
tambien.

Figurémonos un plano *Y* que pase por las dos paralelos, será *BD* la comun seccion de los dos planos. Pero esta linea *BD* es perpendicular á *AB*, pues *AB* lo es al plano *X*, y por consiguiente á *BD* (525); del mismo modo *BD* es tambien perpendicular á la otra paralela *CD* (306), y recíprocamente *CD* es perpendicular á *BD*; fuera de esto, el plano *Y* es perpendicular al plano *X* (532), pues pasa por la *AB* perpendicular á dicho plano *X*; luego la linea *CD* que está en el plano *Y*, y es perpendicular á la comun seccion *BD*, lo será tambien al plano *X* (539).

545 *Dos lineas* AB, CD *paralelas á otra linea* GH 135.
son paralelas una á otra, aunque las dos primeras no estén en un mismo plano con la otra.

Porque, si nos figuramos un plano *X*, al qual *GH* sea perpendicular, las otras dos lineas *AB*, *CD* serán tambien perpendiculares al mismo plano *X* (544); luego estas dos lineas serán paralelas la una á la otra (541).

546 Decimos de dos planos que son *paralelos* quando todos los puntos del uno están á igual distancia del otro, ó, lo que viene á ser lo mismo, quando todas las perpendiculares tiradas desde el uno de los planos al otro son iguales.

547 *Si dos planos* X, Y *fueren paralelos, y los cortare otro plano* Z, *las secciones* AB, CD *de este último plano con los dos primeros serán paralelas.* 136.

Porque 1.° por estar estas secciones en dos planos

pa-

Fig. paralelos, no pueden concurrir en un punto. 2.° Tampoco pueden apartarse la una de la otra, encaminándose ácia diferentes lados, porque como pertenecen ambas al plano *Z*, han de seguir la misma direccion ó encaminarse ácia un mismo lado; luego dichas secciones son lineas paralelas.

137. 548 *Si dos planos* Y, Z, *que se cortan son perpendiculares á otro plano* X, *su comun seccion* AB *es perpendicular á* X.

Figurémonos dos lineas en el plano *X* que pasen ambas por el punto *B*, y una de las quales *JL* sea perpendicular al plano *Y*, y la otra *OP* al plano *Z*. Ya que la linea *JL* es perpendicular al plano *Y*, lo será tambien á la linea *AB* en quanto esta linea está en el plano *Y* (525); luego *AB* es tambien perpendicular á *JL*. Ya que *OP* es perpendicular al plano *Z*, será tambien perpendicular á *AB* en quanto está *AB* en el plano *Z*; luego es tambien *AB* perpendicular á *OP*; luego una vez que *AB* es perpendicular á dos lineas del plano *X*, será tambien perpendicular á dicho plano (537).

549 Quando dos planos que se cortan son perpendiculares á otro, las intersecciones de dichos dos planos con el tercero forman ángulos que son iguales á los que forman uno con otro dichos dos planos. Y si estos planos están inclinados el uno respecto del otro, los ángulos agudos opuestos al vértice, formados por las intersecciones, ó por mejor decir, el uno de estos ángulos es la medida de la inclinacion de los planos.

Pro-

Fig.

Propiedades de las lineas cortadas con planos paralelos.

550 *Dos lineas rectas* AB, CD *que rematan en los dos planos* X, Z *paralelos uno á otro, y están cortadas con otro plano* Y *paralelo á los primeros, están cortadas proporcionalmente.* 138.

Figurémonos tirada la linea *AD* que encuentre el plano *Y* en *G*; resultarán los triángulos *BAD*, *CDA*, cuyos planos formarán en los tres planos *X*, *Y* y *Z* las secciones *EG*, *BD* y *GF*, *AC*. Pero las dos primeras *EG*, *BD* serán paralelas, porque son las secciones de los planos paralelos *Y* y *Z* con el triángulo *BAD*; y las otras dos *GF*, *AC* son tambien paralelas, pues son las secciones de los dos planos paralelos *Y* y *X* con el triángulo *CDA*; luego por causa de las bases paralelas del triángulo *BAD*, tendremos *AE* : *EB* :: *AG* : *GD*; y tambien, por ser paralelas las bases del triángulo *CDA*, tendremos *CF* : *FD* :: *AG* : *GD*; luego *AE* : *EB* :: *CF* : *FD*.

551 *Si desde un punto* J *fuera de un plano* X *se tiran á diferentes puntos* K, L, M *de dicho plano las rectas* JK, JL, JM, *y corta estas rectas un plano* x *paralelo al plano* X, *digo* 1.° *que estas rectas serán cortadas proporcionalmente*: 2.° *que la figura* Klm *será semejante á la figura* KLM. 139.

Supongamos 1.° tres puntos no mas *K*, *L*, *M*. Ya que las rectas *kl*, *lm*, *mK* son las intersecciones de los planos *JKL*, *JLM*, *JKM* con el plano *x*, son paralelas á las rectas *KL*, *LM*, *MK*, que son las intersecciones de los mis-

Fig. mismos planos con el plano X (547); luego los triángulos JKL, JLM, JMK son semejantes á los triángulos Jkl, Jlm, Jmk, cada uno al suyo; luego $JK : Jk :: KL : kl :: JL : Jl :: LM : lm :: JM : Jm :: MK : mk$; pero 1.° si de esta serie de razones iguales sacamos solo las que se forman con las rectas que salen del punto J, tendremos $JK : Jk :: JL : Jl :: JM : Jm$; luego las rectas JK, JL, JM están cortadas proporcionalmente.

2.° Si de la primera serie de razones iguales sacamos las que se forman con las lineas que están en los dos planos paralelos, saldrá $KL : kl :: LM : lm :: KM : km$; luego los dos triángulos KLM, klm son semejantes, pues tienen sus lados proporcionales.

Supongamos ahora el número que quisiéremos de puntos A,B,C,D,F &c. demostrarémos cabalmente del mismo modo que las rectas JA, JB, JC &c. están cortadas proporcionalmente; y si suponemos diagonales AC, AD &c. ac, ad &c. tiradas desde los ángulos correspondientes A y a, demostrarémos tambien del mismo modo que los triángulos ABC, ACD &c. son semejantes á los triángulos abc, acd &c. cada uno al suyo; luego los dos polygonos $ABCDF$, $abcdf$ constan de un mismo número de triángulos semejantes cada uno al suyo, y puestos de un mismo modo, y son por consiguiente semejantes (484).

552 Ya que las dos figuras KLM, klm son semejantes, inferamos que el ángulo KLM es igual al ángulo klm, y por consiguiente *si dos rectas* KL, LM, *que forman un ángu-*

gulo klm, *el ángulo* KLM *será igual al ángulo* klm, *aun* Fig.
quando estos dos ángulos no estén en un mismo plano.

553 De ser semejantes las dos figuras *ABCDF* y *abcdf*, y de serlo tambien las dos *KLM*, *klm*, se infiere que *las superficies de las dos secciones* abcdf, klm *son como las de las figuras* ABCDF,KLM. 139.

Porque $ABCDF : abcdf :: (AB)^2 : (ab)^2$ (511); pero los triángulos semejantes *JAB*, *Jab* dán $AB : ab :: JA : Ja$. Luego (198) $(AB)^2 : (ab)^2 :: (JA)^2 : (Ja)^2$ ó (551) (porque podemos suponer que por el punto *J* pasa un plano paralelo á los dos planos *X* y *x*) $:: (JM)^2 : (Jm)^2$, ó (por ser semejantes los triángulos *JML*, *Jml*) $:: (LM)^2 : (lm)^2$); y por consiguiente (511) $:: KLM : klm$; luego $ABCDF : abcdf :: KLM : klm$, ó (186) $ABCDF : KLM :: abcdf : klm$.

554 Síguese de esta demostracion, que *las superficies* ABCDF, abcdf *son una con otra como los quadrados de dos rectas* JA, Ja *tiradas desde el punto* J *á dos puntos correspondientes de las dos figuras, y por consiguiente* (551) *como los quadrados de las alturas ó perpendiculares* JP, Jp *tiradas desde el punto* J *á los planos* X y x.

Inferamos, pues, 1.° que si las dos superficies *ABCDF*, *KLM* fuesen iguales, lo serian tambien las dos superficies *abcdf*, *klm*.

2.° Que quanto acabamos de decir será verdadero, aun quando el punto *J* en vez de ser comun á las rectas *JA*, *JB*, *JC &c.* y á las rectas *JM*, *JL &c.* fuere dis-

Fig. tinto respecto de cada figura, con tal que estuviere á igual altura respecto del plano x.

De los Sólidos.

555 Hemos llamado *sólido*, *volumen* ó *cuerpo* (256) todo lo que tiene las tres dimensiones longitud, latitud y profundidad. Nos toca considerar ahora las razones y la medida de los sólidos. Indagarémos quanto abrazan estos dos puntos respecto de los sólidos terminados por superficies planas; y por lo que mira á los que son terminados por superficies curvas, solo tratarémos del *cilindro*, del *cono* y de la *esfera*.

Los sólidos terminados por superficies planas se distinguen en general por el número y la figura de los planos que los terminan.

140. 141. 142. 143. 556 Un sólido cuyas dos caras opuestas son dos planos iguales y paralelos; y las demas caras son paralelogramos, se llama en general *prisma*.

Se puede, pues, considerar el prisma como engendrado por el movimiento de un plano BDF, que se mueva paralelo á sí mismo á lo largo de una linea recta AB. 140.

Los dos planos paralelos se llaman las *bases* del prisma, y la perpendicular LM tirada desde un punto de la una de las bases á la otra base, se llama *altura* del prisma.

El modo con que hemos considerado que se engendra el prisma, manifiesta que en qualquier parte que se corte un prisma con un plano paralelo á la base, la seccion será siem-

siempre un plano de todo punto igual á la base ; pues en Fig.
qualquier parte que se corte el prisma , se encontrará el plano *BDF* de cuyo movimiento resulta este sólido.

Las lineas como *BA* donde concurren dos paralelogramos consecutivos , se llaman *aristas* del prisma.

El prisma es *recto* quando las aristas son perpendicula- 141.
res á la base, en cuyo caso son todas iguales á la altura. El
prisma es *oblicuo* quando sus aristas están inclinadas á la base. 142.

Distínguense los prismas por el número de los lados de
su base; si la base es un triángulo, el prisma es un prisma 140.
triangular. Si la base es un quadrilátero, se llama prisma 141.
quadrangular ; y así de los demas.

Entre los prismas quadrangulares, los principales son el paralelipípedo, y el cubo.

557 El *paralelipípedo* es un prisma quadrangular, 141.
cuyas bases, y por consiguiente todas las caras son paralelogramos ; y quando el paralelogramo de la base es un rectángulo, y al mismo tiempo el prisma es recto, se le llama *paralelipípedo rectángulo*.

El paralelipípedo rectángulo se llama *cubo*, quando la 143.
base es un quadrado, y la arista *AB* es igual al lado de dicho quadrado. Es, pues, el *cubo* un sólido terminado por seis quadrados iguales. Este es el sólido que sirve para medir todos los demas, conforme declararémos muy en breve.

558 Llámase *cilindro* el sólido comprehendido entre 144.
dos circunferencias de círculos iguales y paralelos, y la su- 145.
perficie que trazaría una linea *AB* , que corriese paralela á

Fig. sí misma al rededor de dichas dos circunferencias. Llámasele *recto* al cilindro quando la linea CF, que junta los
144. centros de las dos bases opuestas, es perpendicular á dichos círculos; esta linea se llama el *exe* del cilindro. Y es *oblicuo*
145. el cilindro quando su exe CF está inclinado á la base.

Se puede considerar el cilindro recto como engendrado por el movimiento del paralelogramo rectángulo $FCDE$
144. dando la vuelta al rededor de un lado CF.

559 La *pirámide* es un sólido terminado por muchos planos, el uno de los quales, que se llama *base*, es un polygono qualquiera, y los otros, qne todos son triángulos, tie-
146. nen por bases los lados de dichos polygonos, y concurren
147. todos sus vértices en un mismo punto, llamado *vértice* de
148. la pirámide. Véanse las figuras.

La perpendicular AM tirada desde el vértice al plano que sirve de base, prolongado si fuese menester, se llama *altura* de la pirámide.

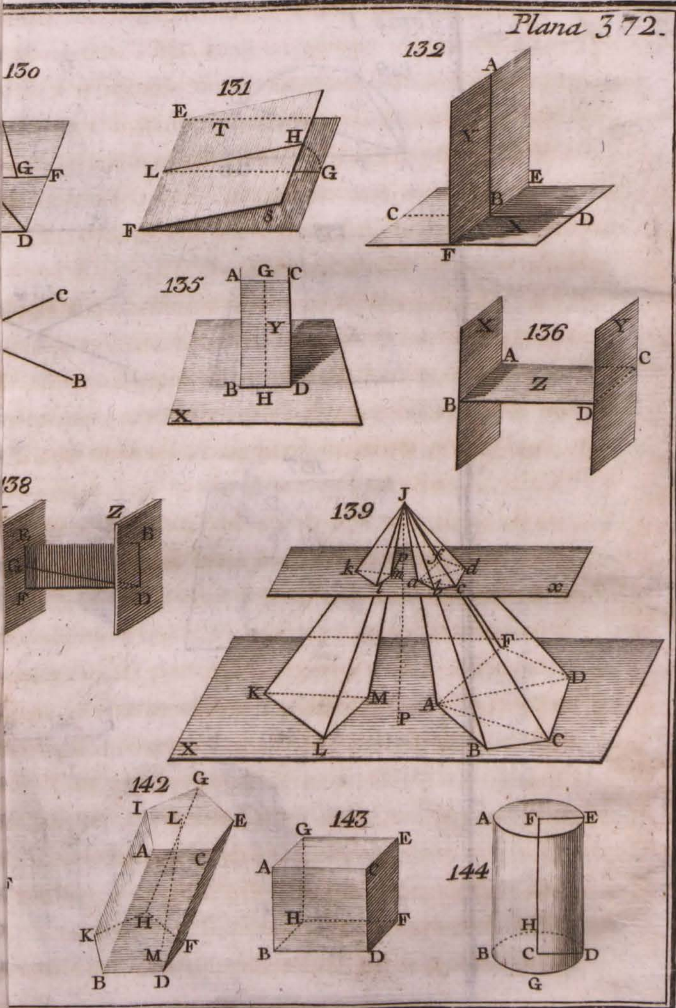
Distínguense las pirámides por el número de los lados de sus bases; de suerte que quando su base es un triángulo, se llama pirámide *triangular*; quando su base es un quadrilátero se llama pirámide *quadrangular*; y así prosiguiendo.

Se la llama *regular* á la pirámide quando su base es un polygono regular, y al mismo tiempo la perpendicu-
148. lar AM tirada desde el vértice, pasa por el centro de dicho polygono. La perpendicular AG tirada desde el vértice A al uno DE de los lados de la base, se llama *apotema*.

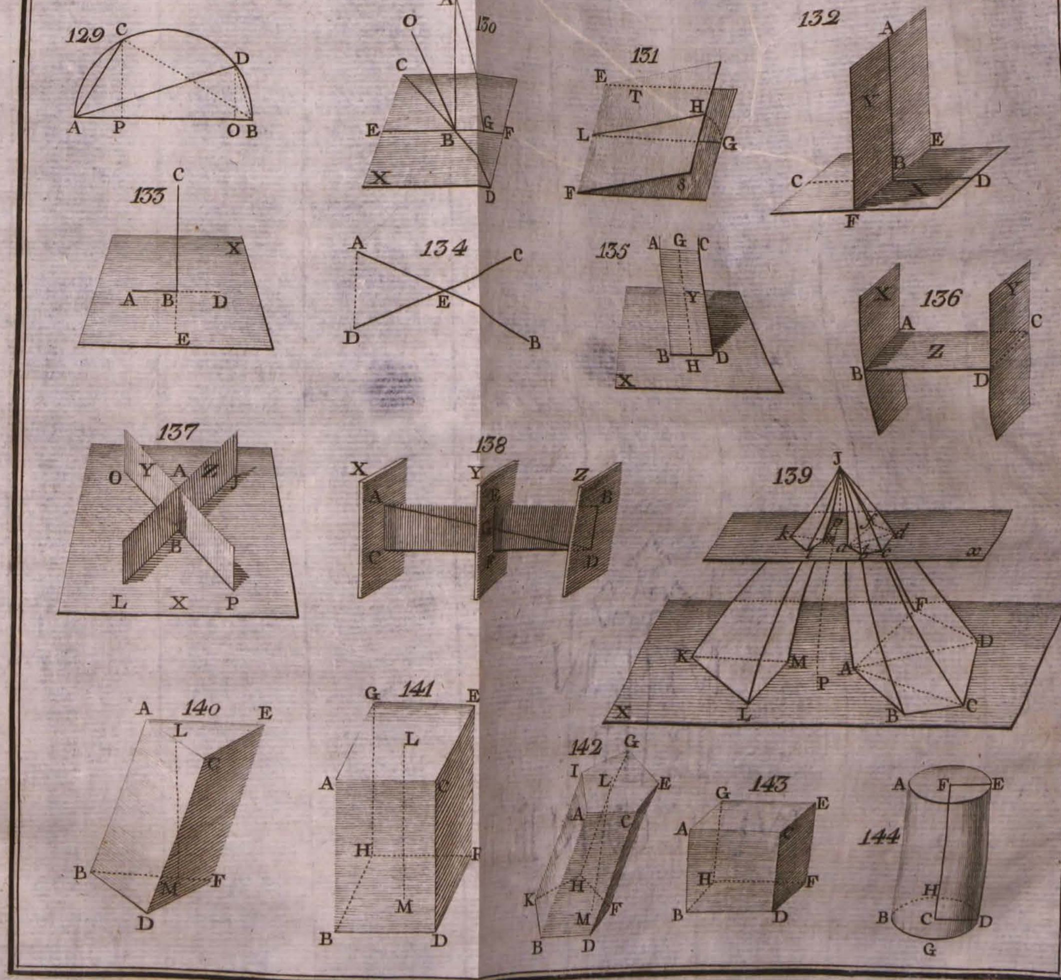
Es evidente que todos los triángulos que concurren en

el

Plana 372.



130
G F D
131
E T H L G F S
132
A Y E B C D X F
135
A G C Y B H D X
C B
136
X Y A C Z B D
138
Z E B G F D
139
J k p f d l m a b c x F D K M A P L B C X
142
G I L E A C K H F M B D
143
G E A C H F B D
144
A F E H B C D G


129
130
131
132
133
134
135
136
137
138
139
140
141
142
143
144

el punto *A*, son iguales é isósceles, porque todos tienen sus bases iguales, y las aristas *AB*, *AC*, *AD* &c. son todas iguales, pues son todas oblicuas igualmente distantes de la perpendicular *AM*. Tambien es evidente que son iguales todos los apotemas. Fig. 148.

560 Llámase *cono* el sólido terminado por el plano circular *BGDH*, llamado *base* del cono, y por la superficie que trazaría una linea *AB*, dando vueltas al rededor del punto fixo *A*, y enrasando siempre con la circunferencia *BGDH*. 149.

El punto *A* se llama *vértice* del cono.

Llamamos *exe* del cono una linea *AC* tirada desde el vértice *A* al centro *C* de la base. Quando el exe es perpendicular á la base, el cono se llama *recto*, y se llama *cono oblicuo* quando el exe está inclinado á la base. 149. 150.

Podemos figurarnos el cono recto como engendrado por el movimiento del triángulo rectángulo *ACD*, dando la vuelta al rededor del lado *AC*; en cuya generacion salta á la vista, que cada punto del lado *AD* traza un círculo, y que por consiguiente la seccion de un cono con un plano paralelo á su base será un círculo. 149.

561 La *esfera* es un sólido terminado por todas partes por una superficie cuyos puntos están á la misma distancia de un punto, llamado *centro* de la esfera.

Se puede considerar la esfera como engendrada por el movimiento del semicírculo *ADB*, dando la vuelta al rededor de su diámetro *AB*. El diámetro *AB* al rededor del qual se supone que el semicírculo dá la vuelta, se llama 151.

Fig. *exe*, y sus dos extremos se llaman *polos* de la esfera.

Es evidente que es uniforme la curvatura de la superficie de una esfera; quiero decir, que dicha curvatura es la misma en todos los puntos de la esfera, del mismo modo que la de la circunferencia de un círculo; de lo que resulta

562 1.° Que *todos los radios de la esfera, y lo propio digo de sus diámetros, son iguales unos con otros.*

563 2.° Que *se puede tomar por exe cada uno de los diámetros*, teniendo presente que los extremos del diámetro que se toma por exe, siempre se llaman *polos.*

564 3.° Que *si se corta una esfera con un plano, la seccion, esto es, la nueva superficie que se vé despues de cortada la esfera, es un círculo*; porque si el plano pasa por el centro de la esfera, es patente que la seccion es un círculo cuyo diámetro es igual al de la esfera.

Si el plano que corta la esfera no pasa por el centro,
152. considérese una linea *CF* tirada desde el centro de la esfera perpendicular á la seccion, y muchas oblicuas *Ce*, *Cd &c.* tiradas desde el mismo centro á todos los puntos extremos de dicha seccion. Como todos estos puntos están en la superficie de la esfera; las lineas oblicuas son radios, y son por lo mismo iguales unos con otros; luego las oblicuas están á igual distancia de la perpendicular (316); están, pues, en la circunferencia de un círculo en cuyo centro remata la perpendicular; luego la seccion de una esfera cortada con un plano es un círculo, pase ó no pase el plano por el centro de la esfera.

Los

565 Los círculos cuyos planos pasan por el centro Fig.
de la esfera se llaman *círculos máximos*, y llamamos *círculos menores* aquellos cuyos planos no pasan por el centro de la esfera. Quando se habla de círculos de la esfera, se entienden aquellos cuya circunferencia está en la superficie de la esfera.

566 Llámase *sector esférico* el sólido que engendra 153.
el sector circular *BCA* dando la vuelta al rededor del radio *AC*. La superficie que describe en virtud de este movimiento el arco *AB*, se llama *casquete esférico*.

567 El *segmento esférico* es el sólido engendrado por el semisegmento circular *AFB* dando la vuelta al rededor de la parte *AF* del radio.

De la Medida de las Superficies de los Sólidos.

568 Una vez que las superficies de los prismas, y de las pirámides se componen de paralelogramos, de triángulos, y de polygonos rectilineos, podriamos excusar declarar aquí lo que se debe practicar para medirlas, pues hemos enseñado (495, 497 y 501) los medios para conseguirlo. Pero de lo que hemos dicho en orden á esto se pueden sacar algunas consecuencias, que no solo contribuirán para simplificar las operaciones en que estas medidas empeñan, sino que tambien servirán para valuar las superficies de los cilindros, de los conos, y aun de la esfera.

569 *La superficie de todo prisma, no entrando las dos* 154.
bases, es igual al producto de una de las aristas por el pe-

Fig. *rímetro de una seccion* bdfh *hecha con un plano al qual di-*
154. *cha arista sea perpendicular.*

Porque, ya que la arista *AB* es perpendicular, por la suposicion, al plano *bdfh*, las demas aristas, todas paralelas á esta, serán tambien perpendiculares al plano *bdfh*; luego recíprocamente las rectas *bd*, *df*, *fh* &c. serán perpendiculares cada una á la arista que corta. Considerando, pues, las aristas como las bases de los paralelogramos que rodean el prisma, las lineas *bd*, *df*, *fh* &c. serán sus alturas; luego para sacar la superficie del prisma, será preciso multiplicar la arista *AB* por la perpendicular *bd*, la arista *CD* por la perpendicular *df*, y así prosiguiendo, y sumar todos estos productos; pero como son iguales todas las aristas, lo mismo se sacará multiplicando sola una *AB* por la suma de todas las alturas, esto es, por todo el perímetro *bdfh.*

570 Quando el prisma es recto, la seccion *bdfh* es lo mismo que la base *BDFH*, y la altura *AB* lo mismo que la altura del prisma; luego *la superficie de un prisma recto* (no contando las dos bases) *es igual al producto del perímetro de la base multiplicado por la altura.*

571 Hemos visto antes (444) que se puede considerar el círculo como un polygono regular de una infinidad de lados; luego podemos considerar el cilindro como un prisma cuya superficie consta de un número infinito de paralelogramos; luego

La superficie de un cilindro recto, no contando las ba-

ses,

ses, es igual al producto de la altura de dicho cilindro, por Fig.
la circunferencia de su base.

Ya declaramos antes (504) como se halla esta circunferencia.

572 Por lo que mira al cilindro oblicuo, se ha de multiplicar su altura *AB* por la circunferencia de la seccion *bgdb*, haciendo esta seccion conforme enseñamos (569). 155.
El método para determinar la longitud de esta seccion se funda en principios muy diversos de los que hasta ahora hemos sentado. En la práctica nos es preciso contentarnos con medirla mecánicamente, envolviendo el cilindro con un hilo ú otra cosa equivalente, que es menester sujetar en un plano, al qual la longitud *AB* del cilindro sea perpendicular.

573 Por lo que mira á la pirámide, si no fuere regular, *se deberá buscar separadamente la superficie de cada uno de los triángulos que la componen, y sumarlas todas.*

Pero *si fuese regular, se puede sacar por un método mas breve su superficie, multiplicando el perímetro de su base por la mitad del apotema* AG; porque, siendo una misma la al- 148.
tura de todos los triángulos, basta multiplicar la mitad de la altura comun por la suma de todas las bases.

574 Si consideramos la circunferencia de un círculo como un polygono regular de una infinidad de lados, se echa de ver que el cono no es mas que una pirámide regular, cuya superficie, no contando la de la base, se compone de una infinidad de triángulos, y que por consiguiente *la superficie convexa de un cono recto es igual al producto de* 149.
la

Fig. *la circunferencia de su base por la mitad del lado* AB *del mismo cono.*

575 Por lo que toca á la superficie del cono oblicuo, pende de otros principios su investigacion, por lo que, omitirémos declarar aquí método alguno para hallarla. Pero por lo que pueda ocurrir, dirémos que el modo con que hemos considerado el cono, subministra un medio para hallar el valor de su superficie, con poca diferencia, quando es oblicuo. Se ha de partir la circunferencia de la base en un número suficiente de arcos, para que se pueda considerar cada uno, sin error substancial, como una linea recta. Hecho esto, se calculará la superficie como la de una pirámide que conste de tantos triángulos quantos arcos hubiese.

576 Para *hallar la superficie de un trozo de cono recto, cuyas bases opuestas* BGDH, bgdh *son paralelas, se ha*
156. *de multiplicar el lado* Bb *del trozo por la mitad de la suma de las circunferencias de las dos bases opuestas.*

Con efecto, se puede considerar dicha superficie como el conjunto de una infinidad de trapecios como *EFfe*, cuyos lados *Ee*, *Ff* ván á rematar en el vértice *A*; pero la superficie de cada uno de estos trapecios es igual á la mitad de la suma de las dos bases opuestas *EF*, *ef*, multiplicada por la distancia que hay entre ellas (500), cuya distancia no se distingue de cada uno de los lados *Ee*, *Ff* ó *Bb*; luego para sacar la suma de todos estos trapecios, se ha de multiplicar la mitad de la suma de todas las bases opuestas, como *EF*,*ef*, esto es, la mitad de la suma de las dos circunfe-

ferencias por la linea Bb, altura comun de todos estos trapecios. Fig.

577 Si por el medio M del lado Bb se pasa un plano paralelo á la base, la seccion será (551) un círculo 156.
cuya circunferencia será la mitad de la suma de las circunferencias de las dos bases opuestas, porque su diámetro MN (500) es la mitad de la suma de los diámetros de las bases, y porque (487) las circunferencias son entre ellas como sus diámetros. Luego *la superficie de un cono recto truncado, de bases paralelas, es igual al producto del lado del tronco, por la circunferencia de la seccion hecha á iguales distancias de las dos bases opuestas.* Nos servirá esta proposicion para probar la que se sigue.

578 *La superficie de una esfera es igual al producto de la circunferencia de uno de sus círculos máximos multiplicada por el diámetro.*

Figurémonos la circunferencia AKD dividida en una 157.
infinidad de arcos, como KL; siendo este arco infinitamente pequeño, se confundirá con su cuerda.

Tírense por los extremos de KL las perpendiculares KE, LF al diámetro AD, y por el medio J de KL ó de su cuerda, tírese JH paralela á KE, y el radio JC; este radio será perpendicular á KL (350). Si suponemos que la semicircunferencia AKD dá la vuelta al rededor de AD, engendrará la superficie de la esfera, y cada uno de sus arcos KL engendrará la superficie de un cono truncado, que será un elemento de la superficie de la esfera. Representen-

Fig. senta $KLFL'K'EK$ el cono truncado que engendra el ar-
158. co KL, y cuyo vértice, si fuese entero, estaría en el punto A. Vamos á probar que la superficie de este cono trun-
157. cado es igual al producto de la KM ó EF multiplicada por la circunferencia cuyo radio es JC ó AC. El triángulo KML es semejante al triángulo JHC, pues los lados del uno son perpendiculares á los lados del otro, segun hemos dicho que se habian de tirar. Estos triángulos semejantes darán (463) esta proporcion $KL : KM :: JC : JH$; ó (ya que (487) las circunferencias son unas con otras como sus radios) $KL : KM ::$ cir.JC : cir.JH; luego (182) $KL \times$ cir.JH es igual á $KM \times$ cir.JC; ó, lo que viene á ser lo mismo, es igual á $EF \times$ cir.AC. Pero (557) el primero de estos productos expresa la superficie del cono truncado engendrado por KL; luego este cono truncado es igual á $EF \times$ cir.AC; esto es, al producto de su altura EF por la circunferencia de un círculo máxîmo de la esfera. Y como se demostraría lo mismo y del mismo modo respecto de otro arco distinto de KL, hemos de inferir que la suma de los pequeños conos truncados, que componen la superficie de la esfera, es igual á la circunferencia de uno de sus círculos máxîmos, multiplicada por la suma de las alturas de dichos conos truncados, cuya suma forma evidentemente el diámetro; luego la superficie de la esfera es igual á la circunferencia de uno de sus círculos máxîmos multiplicada por el diámetro.

159. 579 Si nos figuramos un cilindro, que ciña la esfera to-

tocándola, y cuya altura sea igual al diámetro de dicha Fig.
esfera; quiero decir, que si se supone un *cilindro circunscripto á la esfera*, se podrá inferir *que la superficie de la esfera es igual á la superficie convexâ del cilindro circunscripto*; porque (571), la superficie de dicho cilindro es igual al producto de la circunferencia de la base, multiplicada por la altura; pero la circunferencia de la base es la de un círculo máxîmo de la esfera, y la altura es igual al diámetro; luego &c.

580 Ya que para sacar la superficie de un círculo se ha de multiplicar (503) la circunferencia por la mitad del radio ó la quarta parte del diámetro, y para sacar la de la esfera se ha de multiplicar la circunferencia por el diámetro entero, se ha de inferir que la *superficie de la esfera es quádrupla de la superficie de uno de sus círculos máxîmos.*

581 La demostracion dada del método para medir la superficie de la esfera, prueba tambien que para *sacar la* 160.
superficie convexâ del segmento esférico, engendrado por el arco AL *dando la vuelta al rededor del diámetro* AD, *se ha de multiplicar la circunferencia de un círculo máxîmo de la esfera por la altura* AJ *de dicho segmento*; y que para *sacar la superficie de una porcion de esfera comprehendida entre dos planos paralelos*, *como* LKM, NRP, *se ha de multiplicar igualmente la circunferencia de un círculo máxîmo de la esfera por la altura* JO *de la misma porcion de esfera.*

Porque podemos considerar estas superficies, conforme lo hemos practicado respecto de toda la esfera, como compues-

Fig. puestas de una infinidad de conos truncados, cada uno de los quales es igual al producto de su altura por la circunferencia de un círculo máxîmo de la esfera.

582 Luego, *si se cortan el cilindro y la esfera ins-*
161. *cripta con dos planos* KH, ST *perpendiculares al exe* EF *del cilindro, las superficies convexâs del trozo esférico y del trozo cilíndrico, comprehendidas entre dichos dos planos paralelos, serán iguales.*

Porque, el trozo cilíndrico *HKST* se puede considerar como un cilindro cuya superficie convexâ será igual (571) al producto de la circunferencia de su base por su altura, esto es al producto de un círculo máxîmo de la esfera inscripta por la altura *JV* de dicho cilindro; pero la superficie convexâ del trozo esférico comprehendido entre los dos planos paralelos es tambien igual (577) al producto de la circunferencia de un círculo máxîmo de la esfera por su altura ó la distancia *JV*; luego &c.

583 Del mismo modo probaríamos que la superficie convexâ del casquete esférico *EMVGE* es igual á la superficie convexâ del cilindro *BH*, que tiene el mismo diámetro que la esfera, y la misma altura que el casquete. Y como la superficie convexâ del cilindro *BH* es igual (571) á cir.$KV \times BK$ ó á cir.$EC \times EV$, será tambien igual la superficie convexâ del casquete al producto cir.$EC \times EV$.

584 Pero si se tiran las cuerdas *ME*, *MF*, los triángulos *EVM*, *EMF*, por rectángulos el uno en *V*, el otro
162. en *M* (376), y tener comun el ángulo *E*, serán seme-

jan-

jantes (460), y darán $EV : EM :: EM : EF$. Divi- Fig. 162.
diendo por 2 los consecuentes de esta proporcion, saldrá $EV : \frac{EM}{2} :: EM : \frac{EF}{2} = EC$. Pero (487) $EM : EC$ :: cir.EM : cir.EC; luego $EV : \frac{EM}{2}$ :: cir.EM : cir.EC; y por lo mismo cir.$EC \times EV$ es igual á cir.$EM \times \frac{EM}{2}$. Pero (583) el producto de cir.EC por EV es la superficie convexâ del casquete $EMVGE$, y cir.EM multiplicado por $\frac{EM}{2}$ es la superficie de un círculo cuyo radio es EM; luego *la superficie convexâ de un casquete* EMVGE *es igual á la superficie de un círculo cuyo radio es la cuerda* EM *tirada desde el vértice del casquete al borde de su base.*

585 Por ser rectángulo en V el triángulo MVE, la superficie del círculo cuyo radio es EM, es igual á la suma de las superficies de los dos círculos cuyos radios son los lados MV, EV del ángulo recto. Luego *la superficie convexâ del casquete* EMVGE *vale la superficie del círculo cuyo radio es* MV, *y que sirve de base al casquete, añadida á la superficie del círculo cuyo radio es la altura* EV *del casquete.*

De la razon de las Superficies de los Sólidos.

586 Quando dos sólidos cuyas superficies queremos comparar una con otra están terminados por planos desemejantes é irregulares, no hay otro medio para averiguar la razon que hay entre sus superficies sino calcular separadamente la superficie de cada uno en medidas de la misma especie, y comparar el número de medidas que cabe en la una con el número de medidas que cabe en la otra, esto

es,

Fig. es, v. gr. el número de los pies quadrados de la una con los pies quadrados de la otra.

587 *Las superficies de los prismas (no contando las de las bases opuestas) son unas con otras como los productos de la longitud de dichos prismas por el contorno de la seccion hecha perpendicularmente á dicha longitud.*

Porque dichas superficies son iguales con dichos productos (569).

588 Luego *si las longitudes fueren iguales, las superficies de los prismas serán unas con otras como el contorno ó perímetro de la seccion hecha perpendicularmente á la longitud de cada uno.*

Porque la razon de los productos de la longitud por el perímetro de dicha seccion, no muda aunque se omita en cada uno de dichos productos la longitud, factor comun suyo.

589 Luego, *las superficies de los prismas rectos ó de los cilindros rectos de igual altura, son unas con otras como los contornos de las bases, sea la que fuere la figura de dichas bases.*

Y si al contrario fuesen los mismos los perímetros de las bases, y distintas las alturas, dichas superficies serán como las alturas.

590 *Las superficies de los conos rectos son unas con otras como los productos de los lados de dichos conos por las circunferencias de las bases, ó por los radios ó por los diámetros de dichas bases.*

Por-

Porque, ya que cada una de dichas superficies es igual Fig.
al producto de la circunferencia de la base por la mitad del lado del cono (574), han de ser unas con otras como dichos productos, y por consiguiente como el duplo de dichos productos. Fuera de esto, como las circunferencias tienen unas con otras la misma razon que sus radios ó diámetros, se puede substituir (487) en dichos productos la razon de los radios ó de los diámetros en lugar de la de las circunfereneias.

591 Llamamos *sólidos semejantes* aquellos que están terminados por un mismo número de superficies semejantes, y cuyos ángulos sólidos * son iguales unos con otros, cada uno al suyo; esto es, quando los ángulos planos, que forman cada ángulo sólido del primero, son iguales en número y cantidad á los que forman el ángulo sólido correspondiente del segundo. Y así para que dos cuerpos sean semejantes, no basta que sean las caras del uno semejantes á las del otro; es tambien preciso que haya tantas caras en el uno de los cuerpos como en el otro, y que los ángulos sólidos del uno sean iguales con los ángulos sólidos del otro, conforme acabamos de decir.

592 Síguese de esto, que *no pueden ser semejantes dos cuerpos, á menos que no sean de la misma especie*; y así un prisma y una pirámide, v. gr. no pueden ser semejantes; tampoco lo pueden ser un prisma recto y un prisma obli-

* *Muy en breve dirémos qué ángulo es el que llamamos ángulo sólido.*

Fig. cuo, ni un prisma oblicuo y otro prisma oblicuo mas ó menos inclinado, ni un prisma triangular y otro pentagonal &c. En una palabra, no pueden ser semejantes dos cuerpos á no ser que tengan la misma figura; diferenciándose únicamente en que el uno sea mas grueso que el otro.

593 *Quando dos cuerpos son semejantes, las lineas tiradas en el uno de dichos cuerpos son proporcionales á las lineas correspondientes ó tiradas del mismo modo en el otro*; de suerte que si en el primer cuerpo una de dichas lineas es dupla ó tripla de la que le corresponde en el segundo, las demas lineas del primero serán tambien duplas ó triplas de sus correspondientes en el segundo. Si son semejantes v. gr. dos cilindros, las alturas son proporcionales á las circunferencias de las bases ó á sus radios. Lo mismo se verifica en dos conos. Sentado esto

594 *Las superficies de los sólidos semejantes son unas con otras como los quadrados de sus lineas homólogas.*

Porque, se componen de planos semejantes, cuyas superficies son unas con otras como los quadrados de sus lados ó lineas homólogas, cuyas lineas son lineas homólogas de los sólidos, y proporcionales á todas las demas lineas homólogas.

595 *Las superficies de dos esferas son una con otra como los quadrados de sus radios ó de sus diámetros.*

Porque, ya que la superficie de una esfera es quádrupla de la de su círculo máximo (580); las superficies de dos esferas han de ser una con otra como el quádruplo

de

de sus círculos máxîmos, ó simplemente como sus círculos máxîmos; esto es (487), como los quadrados de los radios ó de los diámetros. Fig.

De la solidez de los Prismas.

596 El que quiera formar concepto cabal de lo que llamamos *solidez* de un cuerpo, debe figurarse una porcion de extension de la forma que quiera, de la forma de un cubo, v. gr. pero que tenga infinitamente poca longitud, latitud y profundidad, y suponer que la capacidad de un cuerpo está enteramente llena de cubos como el expresado, á los quales llamarémos *puntos sólidos*. *El total de estos puntos constituye lo que llamamos solidez de un cuerpo.*

597 *Dos prismas ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro de la misma base y altura, ó de bases y alturas iguales, son iguales en solidez, aunque sean diferentes las figuras de sus bases.*

Porque, si nos figuramos estos cuerpos cortados con planos paralelos á sus bases, en porciones infinitamente delgadas, y de un grueso igual al de los puntos sólidos de que nos podemos figurar que dichos cuerpos están compuestos; es evidente que en cada uno, siendo cada seccion igual á la base (556), el número de puntos sólidos de que se compondrá cada base, será en todas partes el mismo é igual al número de los puntos superficiales de la base; y como suponemos igual altura en ambos sólidos, tendrá cada uno el mismo número de rebanadas; contendrán, pues, en todo

 el

Fig. el mismo número de puntos sólidos ; luego serán iguales en solidez.

De la medida de la solidez de los Prismas y Cilindros.

598 La consideracion de los puntos sólidos de que hablamos poco ha, es muy util, particularmente quando para demostrar la igualdad de dos sólidos, es preciso considerarlos en sus mismos elementos, deshaciéndolos, digámoslo así, en rebanadas sumamente delgadas. Pero quando se quieren medir las solideces ó capacidades de dos sólidos para los usos ordinarios, no se consigue este fin con procurar valuar el número de sus puntos sólidos; porque se echa de ver que en qualquiera cuerpo hay una infinidad de estos puntos.

Por este motivo, quando se mide la solidez de los cuerpos, el fin es determinar quantas veces en el cuerpo de que se trata cabe otro cuerpo conocido. Quando se quiere
163. medir v. gr. el paralelipípedo rectángulo *ABCDEFGH*, el objeto es conocer quantos cubos caben en dicho paralelipípedo iguales al cubo conocido *x*. Por lo comun se valúa en medidas cúbicas la solidez de los cuerpos.

Para hallar la solidez del paralelipípedo rectángulo ABCDEFGH, *se ha de buscar quantas partes quadradas como* efgh *caben en la base* EFGH, *buscar quantas veces la altura* ah *cabe en la altura* AH, *y multiplicar el número de las partes quadradas de* EFGH *por el número de las partes de* AH; *el producto expresará quantos cubos como* x *caben en el paralelipípedo propuesto*; *quiero decir*, *quantos pies cúbicos ó* pul-

pulgadas cúbicas tiene, segun sea de un pie ó de una pulgada el lado ah *del cubo* x. Fig. 163.

Con efecto, es evidente que se pueden colocar en la superficie *EFGH* tantos cubos *x*, quantos quadrados *efgh* hay en la base *EFGH*. Todos estos cubos juntos formarán un paralelipípedo, cuya altura *HL* será igual á *ab*; pero es evidente que se podrán colocar en el sólido *ABCDEFGH* tantos paralelipípedos como aquel, quantas veces la altura *HL* cupiese en *AH*: luego se ha de repetir dicho paralelipípedo, ó el número de los cubos que se pueden colocar en *EFGH* tantas veces quantas partes hay en *AH*; ó como el número de dichos cubos es el mismo que el número de los quadrados que caben en la base, se ha de multiplicar el número de los quadrados que caben en la base por el número de las partes de la altura, y el producto expresará el número de cubos que cupieren en el paralelipípedo propuesto.

599 Como hemos demostrado (597) que los prismas de bases y alturas iguales son iguales en solidez, se sigue de esta proposicion y de lo que acabamos de decir, que para sacar el número de medidas cúbicas que caben en un paralelipípedo qualquiera *ACEGHBDF* se ha de valuar 154. su base *BDFH* en medidas quadradas, y su altura *LM* en partes iguales al lado del cubo que sirve de medida, y multiplicar el número de medidas que se hubiesen hallado en la base por el número de las medidas lineares de la altura; esto suele expresarse comunmente diciendo: *La solidez de un prisma qualquiera es igual al producto de la superficie de*

Fig. *la base por la altura de dicho prisma.*

Pero aquí es preciso prevenir lo mismo que prevenimos (495) respecto de las superficies. Así como no se puede decir, hablando con propiedad, que se multiplica una linea por una linea, tampoco se puede decir que se multiplica una superficie por una linea. Esto es lo mismo, conforme lo acabamos de ver, que tomar un sólido (que consta de tantos cubos quantos quadrados hay en su base) tantas veces quantas su altura cabe en la del sólido total; quiero decir, tantas veces quantas cabe en el sólido que se quiere medir.

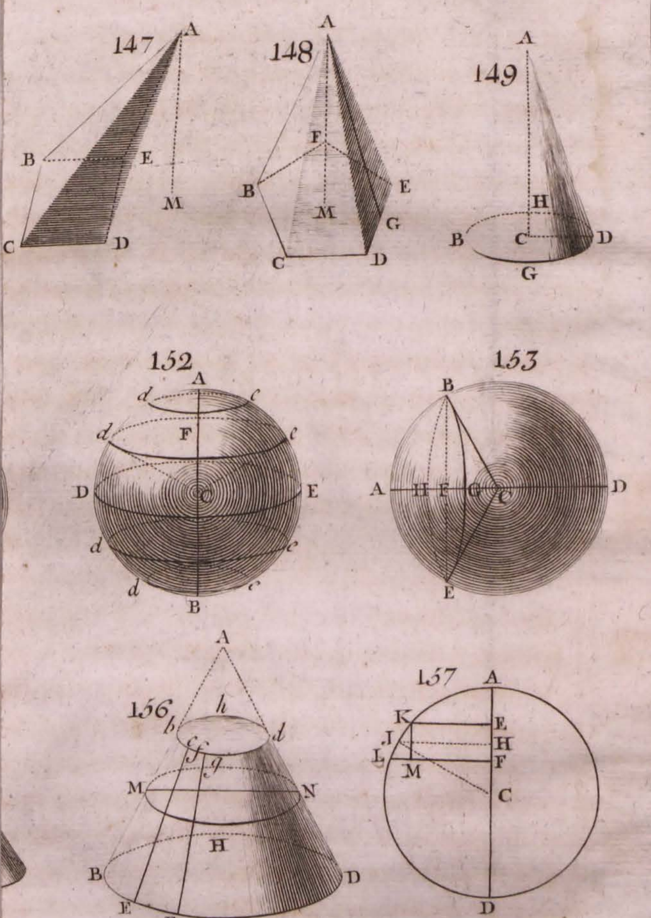
600 Inferamos, pues, de lo que precede, que para *sacar la solidez de un cilindro recto ú oblicuo, se ha de multiplicar igualmente la superficie de su base por la altura de dicho cilindro*, pues un cilindro es igual á un prisma de igual base y altura que él (597).

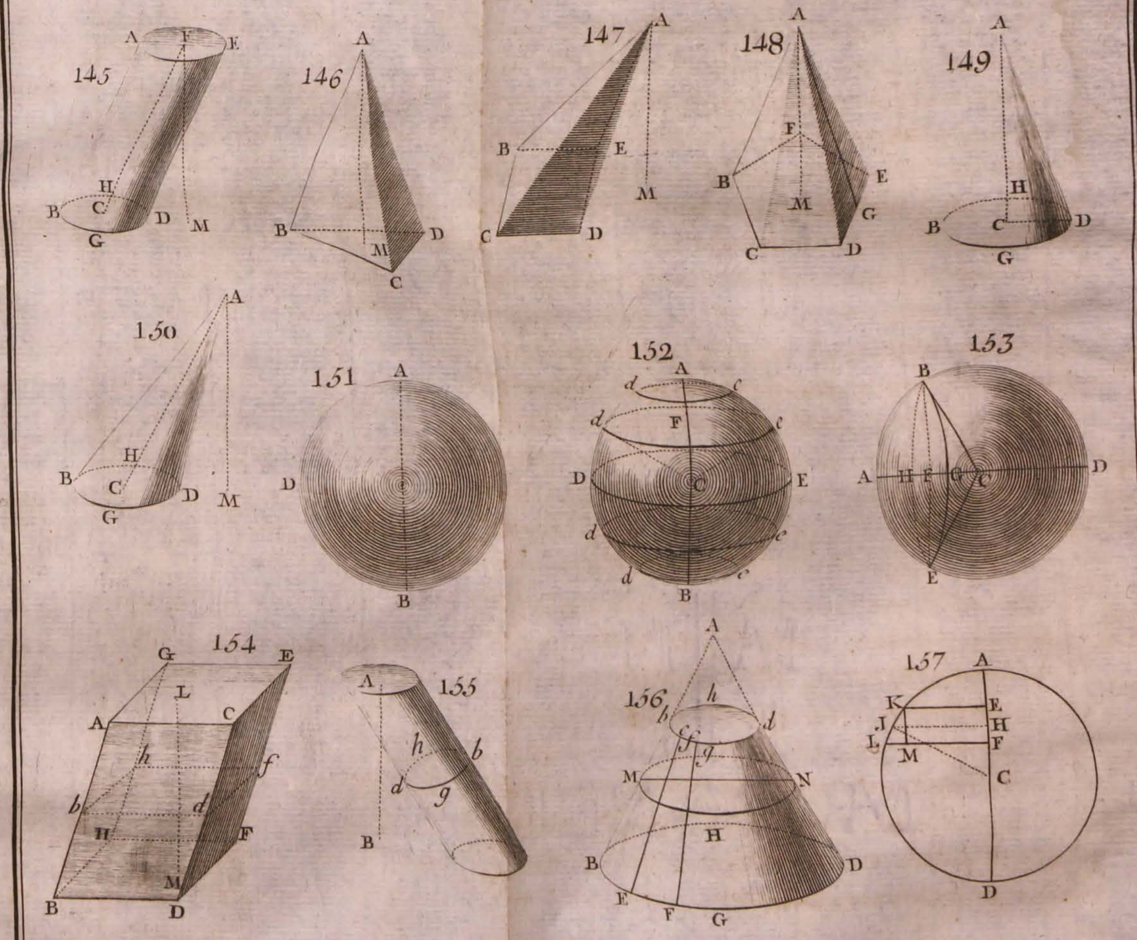
De la solidez de las Pirámides.

601 El que tuviere presente lo dicho (553), y lo aplicáre á las pirámides, podrá inferir que *si se cortan* dos pirámides *JABCDF*, *JKLM* de igual altura con un
164. mismo plano *ge* paralelo al plano de su base, las secciones *abcdf*, *klm* serán una con otra en la razon de las bases *ABCDF*, *KLM*, y serán por consiguiente iguales unas con otras, si estas bases fuesen iguales. Si nos figuramos á mas de esto estas pirámides cortadas con un plano paralelo al plano *ge*, é infinitamente inmediato á este, se vé que las

dos

Plana 390.


147
A B E M C D
148
A F B E M G C D
149
A H B C D G
152
A d c F d e D C E d e d c B
153
B A H F G C D E
156
A h b d c f g M N H B D E F G
157
A K E J H L F M C D


145
146
147
148
149
150
151
152
153
154
155
156
157

dos rebanadas sólidas comprehendidas entre estos dos planos infinitamente inmediatos, han de tener tambien una con otra la razon de las bases, pues el número de puntos sólidos necesarios para llenar estas dos rebanadas de igual grueso, solo puede pender de la magnitud de las secciones correspondientes. Sentado esto, como las dos pirámides son de igual altura, no se pueden suponer mas rebanadas en la una que en la otra; y así, como todas las rebanadas correspondientes guardan la razon de las bases, el total de dichas rebanadas, y por consiguiente las solideces de las pirámides, serán una con otra como las bases. Luego *las solideces de dos pirámides de igual altura, son una con otra como las bases de dichas pirámides, y por consiguiente las pirámides de bases iguales y de alturas iguales, son iguales en solidez, aunque sean diferentes las figuras de las bases.* Fig.

Medida de la solidez de las Pirámides.

602 Ya que medir un cuerpo no es mas que buscar quantas veces cabe en él otro cuerpo conocido, ó en general buscar que razon tiene con otro cuerpo conocido; para medir las pirámides bastará buscar que razon tienen con los prismas, conforme lo declararémos en la proposicion siguiente.

603 *Toda pirámide es el tercio de un prisma de la misma base y altura que ella.*

Redúcese la demostracion de esta proposicion á probar que una pirámide triangular es el tercio de un prisma

Fig. triangular de la misma base y altura que ella ; porque siempre nos podemos figurar un prisma como compuesto de otros tantos prismas triangulares , y una pirámide como el conjunto de otras tantas pirámides triangulares quantos triángulos nos podemos figurar en el polygono que sirve de base al uno y al otro.

Pero la verdad de esta proposicion en *orden á la* pirámide triangular se puede manifestar del modo siguiente.
165. Sea *ABCDEF* un prisma triangular ; figurémonos tiradas en las caras *AE* , *CE* de dicho prisma las dos diagonales *BD* , *BF* , y que por estas diagonales pase un plano *BDF*; este plano separará del prisma una pirámide de la misma base y altura que el prisma , pues tiene su vértice en el punto *B* de la base superior , y tiene por base la misma
166. base inferior *DEF* del prisma. *BDEF* representa esta pirá-
167. mide separada , y *BAÇFD* representa lo que queda del prisma.

Podemos figurarnos esta resta como trastornada , y puesta sobre la cara *ADFC* ; con lo qual se vé que es una pirámide quadrangular , cuya base es el paralelogramo *ADFC* , y el vértice el punto *B* ; luego si imaginamos tirada en la base *ADFC* la diagonal *CD* , podremos imaginar la pirámide total *ADFCB* compuesta de dos pirámides triangulares *ADCB* , *CFDB* , que tendrán por bases los dos triángulos iguales *ACD*, *CDF*, y por vértice comun el punto *B* , y que por consiguiente serán iguales (601). Pero de estas dos pirámides la una , es á saber , la pirámi-

de

de *ADCB* se puede suponer que tiene por base el triángu- Fig.
lo *ABC*, esto es, la base superior del prisma, y por vértice el punto *D*, que ha sido de la base inferior. Es, pues, igual esta pirámide con la pirámide *DEFB*, pues tiene una misma base y altura que ella; luego las tres pirámides 166.
DEFB, *ADCB*, *CFDB* son iguales unas con otras; y yá 167.
que juntas componen el prisma, hemos de inferir que cada una es el tercio del prisma *ABCDEF* de igual base 165.
y altura que él.

604 Como un cono puede considerarse como una pirámide cuya base tiene una infinidad de lados, y el cilindro como un prisma cuya base tiene tambien una infinidad de lados, hemos de inferir que *un cono recto ú oblicuo es el tercio de un cilindro de igual base é igual altura que él.*

605 Luego, *para sacar la solidez de una pirámide ó de un cono qualquiera, se ha de multiplicar la superficie de la base por el tercio de la altura.*

606 Si se corta la pirámide recta quadrangular
AEDBC con un plano que pase por el exe, y sea paralelo 168.
al uno de los lados de la base, representará la seccion un triángulo isósceles *FCG*, cuyos elementos, ó las lineas que le forman, componen todos una progresion arisméti-ca (449). Pero como estos elementos son otras tantas lineas iguales á los lados de los quadrados que componen la pirámide, se deduce que se compone la pirámide de un número infinito de quadrados, cuyos lados están en progresion arismética. Pero ya que para hallar la suma de to-

dos

Fig, dos estos quadrados, esto es, la solidez de la pirámide, se ha de multiplicar el quadrado AD por el tercio de la perpendicular CH, se podrá inferir de aquí que *si ocurriese una progresion arismética infinita formada por lineas de las quales la menor es cero, se sacará la suma de los quadrados de todas estas lineas con multiplicar el quadrado de la linea mayor por el tercio de la cantidad que expresa el número de las lineas ó de los quadrados.*

607 Por lo que mira al *trozo de pirámide ó de cono*, quando son paralelas las dos bases opuestas, lo que hay que hacer *para sacar su solidez, consiste en hallar la altura de la pirámide quitada, y entonces es facil calcular la solidez de la pirámide entera y de la pirámide quitada, y por consiguiente la del trozo.*

164. Si quiero v. gr. sacar la solidez del trozo $KLMklm$, veo que se ha de multiplicar (605) la superficie KLM por el tercio de la altura JP; multiplicar igualmente la superficie klm por el tercio de la altura Jp, y restar este último producto del primero; pero como no conocemos, ni la altura de la pirámide total, ni la de la pirámide quitada, se determinarán una y otra del modo siguiente. Hemos visto antes (551) que las lineas JL, JM, JP &c. están cortadas proporcionalmente por el plano ge, y que son respecto de sus partes Jl, Jm, Jp, lo que LM á Lm; luego tendremos

$$LM : lm :: JP : Jp;$$

Luego (188) $LM - lm : LM :: JP - Jp : JP$;

es-

esto es, $LM - lm : LM :: Pp : JP$. Fig.

Pero quando es conocido el trozo, es facil medir los lados LM, lm, y la altura Pp; se podrá, pues, calcular por esta proporcion el quarto término JP, ó la altura de la pirámide total, y restando la del trozo, se hallará la altura de la pirámide quitada.

De la solidez de la Esfera, de sus Sectores y de sus Segmentos.

608 *Para sacar la solidez de una esfera se ha de multiplicar su superficie por el tercio del radio.*

Porque, podemos considerar la superficie de la esfera como el conjunto de una infinidad de planos infinitamente pequeños, cada uno de los quales sirve de base á una pequeña pirámide cuyo vértice está en el centro de la esfera, y cuya altura es por consiguiente el radio. Una vez que cada una de estas pequeñas pirámides es igual (605) al producto de su base por el tercio de su altura, esto es por el tercio del radio, serán todas juntas iguales al producto de la suma de todas sus bases por el tercio del radio; esto es, iguales al producto de la superficie de la esfera por el tercio del radio.

609 Ya que la superficie de la esfera es quádrupla (580) de la superficie de uno de sus círculos máxímos, *se puede*, pues, *para sacar la solidez de una esfera, multiplicar el tercio del radio por quatro veces la superficie de un círculo máxímo, ó quatro veces el tercio del radio por la superficie de uno de los círculos máxímos, ó finalmente los $\frac{2}{3}$*

del

Fig. *del diámetro por la superficie de un círculo máxîmo.*

610 Hemos visto que para sacar la solidez de un cilindro, se ha de multiplicar la superficie de la base por la altura. Si se trata, pues, del cilindro circunscripto á la esfera, se puede decir que *su solidez es igual al producto de la superficie de uno de los círculos máxîmos de la esfera por el diámetro*; pero la de la esfera (609) es igual al producto de un círculo máxîmo por los $\frac{2}{3}$ del *diámetro*; luego la solidez de la esfera no es sino los $\frac{2}{3}$ de la del cilindro circunscripto.

611 Así como la semicircunferencia *ADFCA*, dando la vuelta al rededor del diámetro *AF*, engendraria la
169. esfera entera, y el rectángulo *ABDEFCA*, dando la vuelta al rededor del mismo diámetro *AF*, engendraria el cilindro entero (558); el quadrante de círculo *ADCA* dando la vuelta al rededor del radio *CA*, engendraria una media esfera, y el rectángulo *ABDCA*, dando la vuelta al rededor del mismo radio *AC*, engendraria un semicilindro. Como las mitades tienen unas con otras la misma razon que sus todos, sería tambien la semiesfera engendrada del quadrante *ACDA*, los $\frac{2}{3}$ del semicilindro engendrado por el quadrado *AD*; y como el cono engendrado por el triángulo *BAC* sería $\frac{1}{3}$ del mismo cilindro (604), hemos de inferir que la *semiesfera es dupla del cono cuya base tiene un mismo diámetro que la esfera, y cuya altura es igual al radio de la misma esfera.* Luego *la esfera entera es quádrupla de un cono que tiene por base un círculo del mismo radio que el*

el de la esfera, y por altura el radio de la misma esfera. Fig.

612 Luego *la esfera es igual á un cono cuya base es quádrupla de un círculo máxîmo de la esfera, y cuya altura es igual al radio de la misma esfera.*

Porque, este cono vale por quatro que tuviesen por radio de sus bases el radio de la misma esfera, siendo su altura tambien igual al mismo radio. Y como un círculo cuyo radio es igual al diámetro de la esfera, es quádruplo de un círculo máxîmo de la esfera del mismo radio que ella, por ser estos círculos (512) como los quadrados de los números 2 y 1, expresion de sus radios por el supuesto que hacemos, cuyos quadrados se han como 4 : 1; es evidente que toda la esfera es igual á un cono cuya base tiene por radio el diámetro de dicha esfera, y la altura es igual al radio de la misma esfera.

613 De lo que diximos antes para sacar la solidez de una esfera, podemos inferir que *un cono esférico ó sector* 170.
CABD *de esfera es igual á un cono, ó á una pirámide, cuya altura sea igual al radio de la esfera, y la base igual á la superficie esférica del casquete* BAD.

Porque, se compone este sector de una infinidad de pequeñas pirámides que tienen todas su vértice en el centro de la esfera, y cuyas bases componen la superficie esférica del casquete.

614 Como la superficie esférica del casquete *BAD* (584) es igual á la area del círculo cuyo radio es la recta *BA* tirada desde el vértice del casquete á la orilla

de

Fig. de su base; el *sector esférico* CABD *es igual á un cono cuya*
170. *altura fuese el radio de la esfera, y cuya base tuviera por radio la recta* BA *tirada desde el vértice del casquete á la orilla del mismo casquete.*

615 Pero por razon del triángulo rectángulo *ALB*, el círculo cuyo radio sea la hypotenusa, valdrá la suma de los dos círculos, cuyos radios fuesen los dos lados *AL*,*BL*.

Luego, *el sector esférico* CABD *vale la suma de dos conos que tuviesen ambos por altura el radio* BC *de la esfera, y cuyas bases fuesen los dos círculos, cuyos radios son* AL *y* BL.

616 Por lo que mira al segmento, como vale el sector *CABD* menos el cono *CAD*, una vez que hemos declarado (605 y 613) el método para sacar la *solidez* de cada uno de estos cuerpos, nada tenemos que decir sobre este punto.

De la medida de los demas Sólidos.

617 Por lo que mira á los demas sólidos terminados por superficies planas, el método que naturalmente se ofrece para medirlos consiste en considerarlos como formados de pirámides cuyas bases sean dichas superficies planas, y que tengan por vértice comun el uno de los ángulos del sólido de que se trata; pero este método, sobre ser pocas veces el mas acomodado, es menos breve y menos del caso en la práctica que el que vamos á proponer.

171. 618 Llamarémos *prisma truncado* el sólido *ABCDEF* que

que queda despues de separar una parte de un prisma con Fig.
un plano *ABC* inclinado á la base.

619 *Un prisma triangular truncado se compone de tres pirámides, cada una de las quales tiene por base la base* DEF *del prisma, y la primera tiene su vértice en* B, *la segunda en* A, *y la tercera en* C.

Si se considera el prisma truncado con alguna atencion se echará de ver que se compone de dos pirámides, la una triangular cuyo vértice estará en el punto *B*, y tendrá por base el triángulo *DEF*; la otra tendrá por base el quadrilátero *ADFC*, y tendrá tambien su vértice en el punto *B*.

Si se tira la diagonal *AF*, podemos figurarnos la pirámide quadrangular *BADFC* como compuesta de dos pirámides triangulares *BADF*, *BACF*; pero la pirámide *BADF* es igual en solidez á una pirámide *EADF*, que teniendo una misma base *ADF*, tuviese su vértice en el punto *E*; porque siendo la linea *BE* paralela al plano *ADF*, estas dos pirámides tendrán una misma altura; pero la pirámide *EADF* puede considerarse como que tiene por base *EDF*, y su vértice en el punto *A*. Tenemos, pues, ya dos de las pirámides de que hemos dicho que se compone el prisma truncado; solo resta probar que la pirámide *BACF* equivale á una pirámide cuya base fuese tambien *EDF*, y tuviese su vértice en *C*; pero es muy facil probarlo con tirar la diagonal *CD*, y considerar que la pirámide *BACF* ha de ser igual á la pirámide *EDCF*; porque estas dos pirámides tienen sus vértices *B* y *E* en la misma

li-

Fig. linea *BE* paralela al plano *ACDF* de sus bases; y estas bases *ACF* y *CFD* son iguales, pues son triángulos que tienen una misma base *CF*, y están comprehendidos entre las dos paralelas *AD* y *CF*. Así la pirámide *BACF* es igual con la pirámide *EDCF*; pero esta se puede considerar como que tiene por base *DEF*, y su vértice en *C*; luego el prisma truncado se compone con efecto de tres pirámides cuya base comun es el triángulo *DEF*, y de las quales la primera tiene su vértice en *B*, la segunda en *A*, y la tercera en *C*.

620 Luego, *para sacar la solidez de un prisma triangular truncado, se han de baxar desde cada uno de los ángulos de la base superior perpendiculares á la base inferior, y multiplicar la base inferior por el tercio de la suma de dichas tres perpendiculares.*

621 Se pueden sacar de esta proposicion muchas consecuencias para la medicion de los prismas truncados distintos de los triangulares, y aun de otros sólidos. Si nos figuramos v. gr. que desde todos los ángulos de un sólido terminado por superficies planas, se tiran á un mismo plano, tomándole como se quisiere, perpendiculares, resultarán tantos prismas truncados quantas caras tuviere el sólido. Como es facil medir qualquiera prisma truncado en virtud de lo que acabamos de decir, se medirá, pues, con igual facilidad por los mismos principios todo sólido terminado por superficies planas.

De

Fig.

De las razones de los Sólidos en general.

622 Comparar dos sólidos es buscar quántas veces el número de medidas de cierta especie que tiene el uno de dichos sólidos, cabe en el número de medidas de la misma especie que caben en el otro.

623 *Dos prismas, ó dos cilindros, ó un prisma y un cilindro, son uno con otro como los productos de su base por su altura.* Esto es evidente, porque cada uno de dichos sólidos es igual al producto de su base por su altura, sea la que fuere la figura de la base.

Luego *los prismas, ó los cilindros, ó los prismas y los cilindros de igual altura, son entre sí como sus bases; y los prismas y los cilindros de igual base son entre sí como sus alturas.*

Porque la razon de los productos de las bases por las alturas no muda aunque se suprima en ellos el factor comun que contienen quando la base ó la altura es una misma en ambos sólidos.

Luego *dos pirámides qualesquiera, ó dos conos, ó una pirámide y un cono, son entre sí como las alturas, quando son iguales las bases*, porque estos sólidos son cada uno el tercio de un prisma de igual base é igual altura (603).

624 *Las solideces de las pirámides semejantes son entre sí como los cubos de las alturas de dichas pirámides, ó en general como los cubos de dos lineas homólogas de dichas pirámides.*

Fig, 164. Porque podemos representar dos pirámides semejantes por dos pirámides como *JABCDF*, *Jabcdf*, pues se componen estas dos pirámides de un mismo número de caras semejantes cada una á la suya, y puestas del mismo modo. Ya que dos pirámides son en general como los productos de sus bases por sus alturas, las bases que son en este caso figuras semejantes, siendo entre sí como los quadrados de las alturas *JP*, *Jp* (554), las dos pirámides serán entre sí como los productos de los quadrados de las alturas por las alturas mismas; porque podremos (200) substituir en lugar de la razon de las bases, la de los quadrados de las alturas. Y como las alturas (593) son proporcionales á todas las demas dimensiones homólogas, sus cubos serán tambien proporcionales á los cubos de estas dimensiones homólogas (198); luego en general dos pirámides semejantes son entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas.

625 Luego *en general las solideces de dos cuerpos semejantes son entre sí como los cubos de las lineas homólogas de dichos sólidos.*

Porque los sólidos semejantes se pueden dividir en un mismo número de pirámides semejantes cada una á la suya; y como dos qualesquiera de estas pirámides serán entre sí en la misma razon, pues son entre sí como los cubos de sus dimensiones homólogas, que guardan la misma razon que otras dos dimensiones homólogas, se infiere que la suma de las pirámides del primer sólido será á la suma de las pirámi-

mides del segundo, tambien en razon de los cubos de las Fig.
dimensiones homólogas.

Luego *las solideces de las esferas son entre sí como los cubos de sus radios ó de sus diámetros.*

Luego de todo lo dicho hasta aquí, se sigue 1.° *que los contornos de las figuras semejantes guardan la razon simple de las lineas homólogas.* 2.° *que las superficies de las figuras semejantes son entre sí como los quadrados de los lados ó de las lineas homólogas.* 3.° *que las solideces de los cuerpos semejantes son entre sí como los cubos de las lineas homólogas.*

Así, si dos cuerpos semejantes, pongo por caso, dos esferas tuviesen sus diámetros en la razon de 1 á 3, las circunferencias de sus círculos máxîmos serian tambien en razon de 1 á 3; las superficies de dichas esferas serian como 1 á 9, y las solideces como 1 á 27; quiero decir, que la circunferencia de uno de los círculos máxîmos de la segunda valdría tres veces la de un círculo máxîmo de la primera, la superficie de la segunda valdria 9 veces la de la primera; y finalmente la segunda esfera valdria 27 esferas como la primera.

Luego, para hacer un sólido semejante á otro, y cuya solidez sea á la de este en una razon dada, pongo por caso como 2 : 3; se le han de dar dimensiones tales, que el cubo de una qualquiera de dichas dimensiones sea el cubo de una dimension homóloga del sólido, al qual ha de ser semejante, como 2 á 3. V. gr. si hay una esfera de 8 pul-

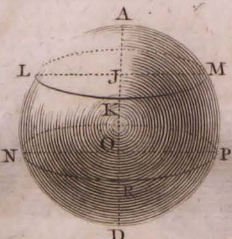
Fig. gadas de diámetro, y se pregunta qual ha de ser el diámetro de una esfera que sea los $\frac{2}{3}$ de la primera, se habrá de buscar el quarto término de esta proporcion $1 : \frac{2}{3}$ ó $3 : 2$ :: el cubo de 8, esto es, 512 es á un quarto término, el qual es $341\frac{1}{3}$ que será el cubo del diámetro que se busca; por lo que, sacando la raiz cúbica (164) saldrá $6^p, 99$ para el diámetro; esto es, 7^p, con muy poca diferencia, como es facil verificarlo de este modo. Busquemos quales son las solideces de dos esferas, la una de 8, y la otra de 7 pulgadas de diámetro. La circunferencia de sus círculos máximos se hallará por medio de estas dos proporciones (504);

$$7 : 22 :: 8 :$$

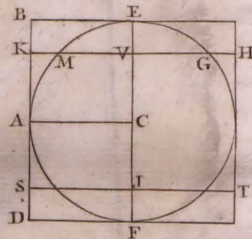
$$7 : 22 :: 7 :$$

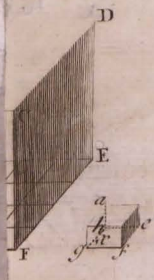
Los quartos términos son $25\frac{1}{7}$ y 22; multiplicando estas circunferencias cada una por su diámetro, saldrán las superficies de dichas esferas (578), las quales por consiguiente serán $201\frac{1}{7}$ y 154; finalmente multiplicando estas superficies por el $\frac{1}{3}$ de su radio, esto es respectivamente por el $\frac{1}{6}$ de 8 y de 7, saldrán las solideces $268\frac{4}{21}$ y $179\frac{2}{3}$, cuya razon es la misma que la de $\frac{5632}{21}$ á $\frac{539}{3}$; reduciendo estos quebrados, ó (multiplicando los dos términos del último por 7, y omitiendo el denominador comun) la misma que la de 5632 á 3773; pero (171) la razon de estas dos cantidades es $1\frac{1859}{3773}$; esto es, reduciéndolo á decimales 1,49; y la razon de 3 á 2 es 1,5 ó 1,50 (120); la diferencia no es pues mas que de $\frac{1}{100}$; es-

160

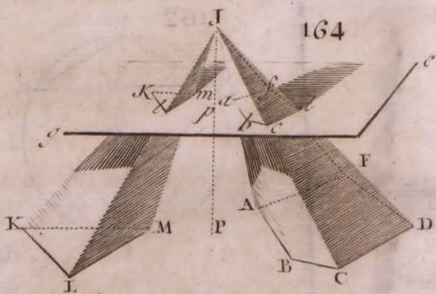


161



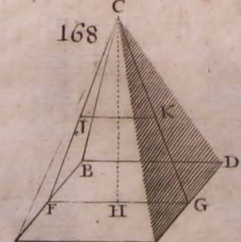


164

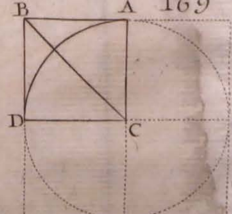


167

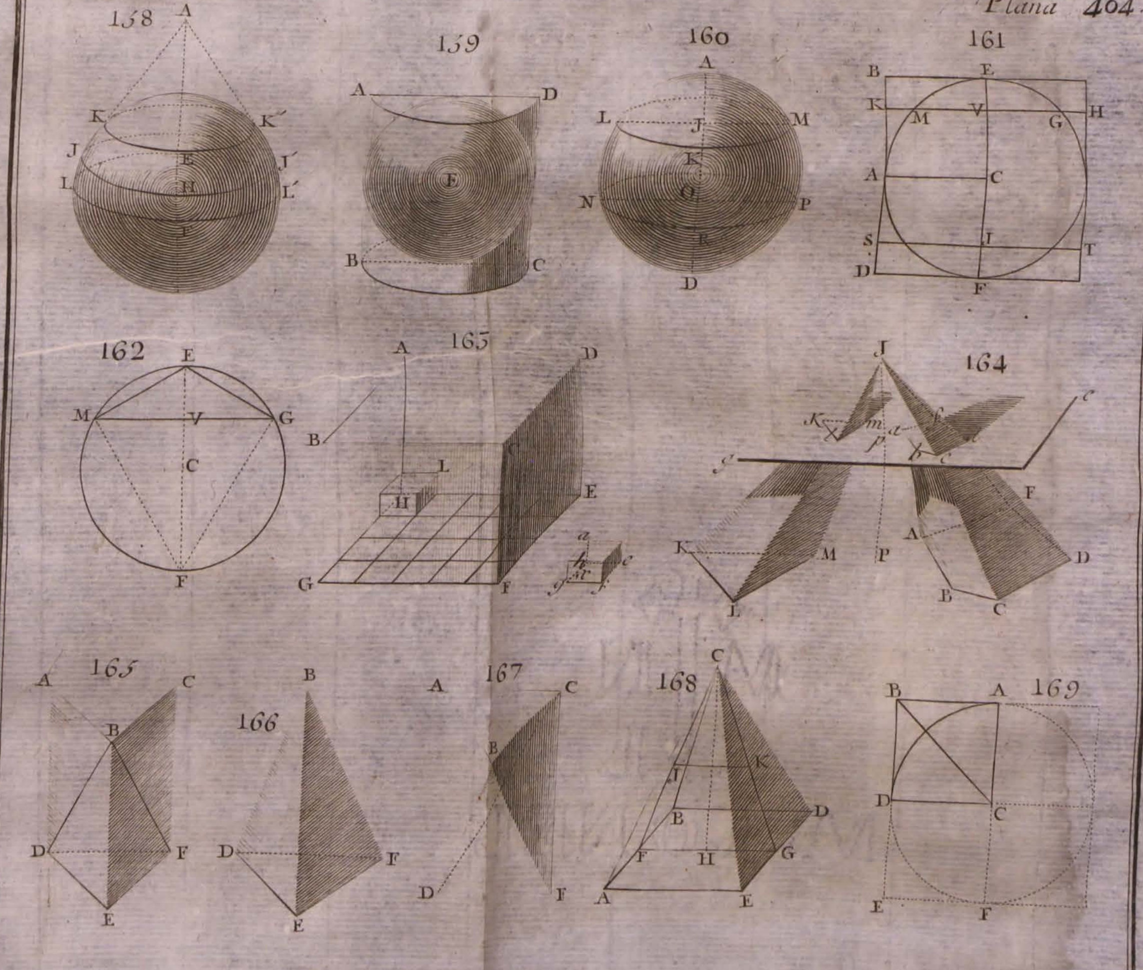
168



169



Tomo I. Plana 404.



esta diferencia proviene de que el diámetro está sacado Fig.
solo por aproximacion; por otra parte la razon de 7 á 22 no es cabal la del diámetro á la circunferencia.

De los Cuerpos regulares.

626 En los sólidos terminados por planos, quales son los prismas y las pirámides, se reparan ángulos sólidos. Llámase *ángulo sólido* un espacio sólido terminado en punta por muchos ángulos planos que concurren en un punto comun. La punta de una pirámide es un ángulo sólido, y lo es tambien la esquina de un dado.

627 Se necesitan por lo menos tres ángulos planos para formar un ángulo sólido, y *quando un ángulo sólido* A *resulta del concurso de tres ángulos planos, dos ángulos planos* BAD, DAC *los que se quisiere, son mayores que el tercero* CAB. 172.

Tírese á arbitrio la linea *BC*, y hágase el ángulo *BAE* igual á *BAD*, y la linea *AD* igual á *AE*; tírese *BD*, que será igual á *BE*, por ser iguales los triángulos *BAD*, *BAE* (410); tírese tambien *CD*. En virtud de esto, los triángulos *DAC*, *CAE* tienen los lados *DA* y *AE* iguales uno con otro, y el lado *AC* comun, la base *DC* del primero es mayor que *CE* base del segundo, porque las lineas *BD*, *DC* juntas son mayores que la *BC*; luego si de la suma de aquellas se quita la linea *BD*, y de la linea *BC* se quita *BE*, que es igual con *BD*, resultará por una parte *DC* mayor que la *CE* que resulta por la otra; luego el

Fig. ángulo CAE será menor que DAC, y el total BAC será menor que la suma de los dos ángulos BAD y DAC.

628 *Todos los ángulos planos juntos que forman un ángulo sólido, valen menos que quatro ángulos rectos.*

173. Valgámonos para probar esta proposicion de una pirámide pentagonal $ABCDEF$, cuya base está dividida en cinco triángulos, cuyo vértice es el punto G, el qual está á la parte interior del pentágono. Hemos de probar, que los cinco ángulos planos que forman el ángulo sólido A, valen menos que quatro rectos.

Ya que es pentagonal la pirámide, tiene cinco caras que son otros tantos triángulos, cuyo vértice está en A; el pentágono de la base se compone tambien de cinco triángulos; luego la suma de los cinco primeros triángulos es igual con la suma de los otros cinco. Sentado esto, considérese que los ángulos de los cinco primeros triángulos son los que están en la base, como ACB y ACD, mas los que están en el vértice de la pirámide; y los ángulos de los otros cinco triángulos son los del pentágono, como BCD, mas los que están en el punto G. Por consiguiente si los ángulos que están en la base son mayores que los del pentágono, es preciso que los ángulos que están en el vértice de la pirámide valgan menos que los que están en el punto G. Pero los ángulos que están en la base de la pirámide son mayores que los del pentágono; v. gr. los dos ángulos ACB y ACD son mayores que el tercero BCD, porque como estos tres ángulos planos forman el ángulo só-

sólido C, la suma de dos de ellos es mayor que el otro (627); Fig.
luego los ángulos del vértice de la pirámide valen menos que los que están en el punto G. Pero los ángulos cuyo vértice está en G, valen juntos (299) quatro ángulos rectos; luego los del vértice de la pirámide valen menos que quatro ángulos rectos.

629 Fundados en esta proposicion probarémos que no puede haber sino cinco cuerpos regulares. Llámanse *cuerpos regulares* aquellos cuyas caras son todas polygonos regulares, iguales y semejantes, y cuyos ángulos sólidos están formados por igual número de ángulos planos.

630 1.° Quando el ángulo sólido resulta del concurso de tres ángulos planos de triángulos equiláteros, el sólido se llama *tetraedro*. No hay duda en que *tres ángulos planos de triángulos equiláteros pueden formar un ángulo sólido*; pues valiendo 60° cada ángulo de un triángulo equilátero, la suma de tres valdrá 180°, y por consiguiente valdrá menos que quatro ángulos rectos.

La figura representa un *tetraedro*, y los quatro trián- 174.
gulos equiláteros, que componen todo el sólido.

631 2.° *Quatro ángulos de triángulos equiláteros pueden formar tambien un ángulo sólido*; porque como estos quatro ángulos juntos no valen sino 240° valen menos que quatro ángulos rectos. El sólido en quien concurre esta circunstancia, se llama *octaedro*, y le representa la figura con los ocho triángulos equiláteros, que componen todo el sólido. 175.

632 3.º *Cinco ángulos de triángulos equiláteros pueden tambien formar un ángulo sólido*; porque la suma de estos cinco ángulos no llega á valer quatro ángulos rec-
176. tos. En el *icosaedro* cada ángulo sólido resulta del concurso de cinco ángulos de triángulos equiláteros; la figura representa este sólido con los veinte triángulos equiláteros que le componen.

Pero como seis ángulos de triángulos equiláteros valen juntos quatro ángulos rectos, no pueden formar un ángulo sólido; luego no puede haber mas de tres especies de cuerpos regulares formados por triángulos.

633 4.º *Tres ángulos de quadrado pueden tambien formar un ángulo sólido*; y esta circunstancia concurre en
177. el *cubo ó exaedro*, que se vé en la figura con los seis quadrados que le componen.

Es evidente que quatro ángulos de quadrado no pueden formar un ángulo sólido, por valer todos juntos quatro ángulos rectos; por consiguiente no hay sino una especie de cuerpo regular formado por quadrados.

634 5.º *Un ángulo sólido puede resultar del concurso de tres ángulos de pentágono regular*; porque cada uno de dichos ángulos no vale sino 108°. El *dodecaedro* es un cuerpo cuyos ángulos sólidos resultan del concurso de tres
178. ángulos de pentágono regular, y le representa la figura con los doce pentágonos regulares de que se compone.

Como quatro ángulos de pentágonos regulares valen mas de 360°, no pueden formar un ángulo sólido; luego

no

no puede haber mas de un cuerpo regular formado por pentágonos. Fig.

635 *No se puede formar cuerpo alguno regular con exágonos*; porque el ángulo del exágono regular vale 120°, y tres juntos han de valer 360°; luego no pueden formar un ángulo sólido. Y como tres ángulos de los demas polygonos de mayor número de lados que el exágono, han de valer mas de 360°, se infiere que con ningun polygono regular que tenga mas de cinco lados se puede formar cuerpo regular alguno. Luego no hay mas que cinco cuerpos regulares.

De la medida de la superficie y solidez de los cinco Cuerpos regulares.

636 Para hallar la superficie de cada uno de los cinco cuerpos regulares, se buscará la area de uno de los planos que le terminan, cuya area se multiplicará por el número de caras que tuviere cada cuerpo.

Una vez que el tetraedro no se distingue de una pirámide triangular equilátera, hallarémos su solidez por lo dicho (573).

Tambien se hallará la solidez del cubo ó hexaedro por lo dicho (599).

Para hallar la del octaedro, investigarémos la solidez de cada una de las dos pirámides iguales y semejantes en que se divide dicho sólido.

Del mismo modo hallarémos la solidez del dodecaedro.

Por-

Fig. Porque tirando lineas rectas desde el centro del dodecaedro á todos sus ángulos, resultarán doce pirámides pentágonas iguales; multiplicando despues la solidez de una de dichas pirámides por 12, sacarémos la solidez total del dodecaedro.

Buscando la solidez de una de las veinte pirámides en que podemos figurarnos dividido tambien el icosaedro, y multiplicándola por 20, resultará la solidez total del icosaedro.

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRÍA PLANA.

Fig.

637 Esta voz *Trigonometría* significa medida de los triángulos, porque enseña la Trigonometría el arte de aplicar el cálculo arismético á la Geometría, arte de todo punto necesaria para pasar de la teórica á la práctica; porque, segun se vió ya en la Geometría, para medir las figuras es preciso reducirlas primero á triángulos.

638 En todo triángulo hay seis cosas que considerar; es á saber, tres ángulos y tres lados. Segun estas seis cosas están todas en un mismo plano, ó en planos diferentes, la *Trigonometría* es ó *plana* ó *esférica*. La última no nos importa por ahora; y así nos ceñirémos á la Trigonometría plana, que tambien se llama *rectilinea*, cuyo objeto es enseñar como se responde en todos los casos posibles esta pregunta: *En conociendo tres de las seis cosas que en un triángulo rectilineo se consideran (ángulos y lados), hallar el valor de las otras tres.*

He dicho en todos los casos posibles, porque si no conociésemos sino los tres ángulos, v. gr. no se podria determinar el valor de los lados. Con efecto, si por un punto D, tomado á arbitrio en el lado AB del triángulo ABC, 179.
cuyos tres ángulos supongo conocidos, se tira DE paralela á BC, resultará otro triángulo ADE, que tendrá los mismos ángulos que el triángulo ABC (329); y se

echa

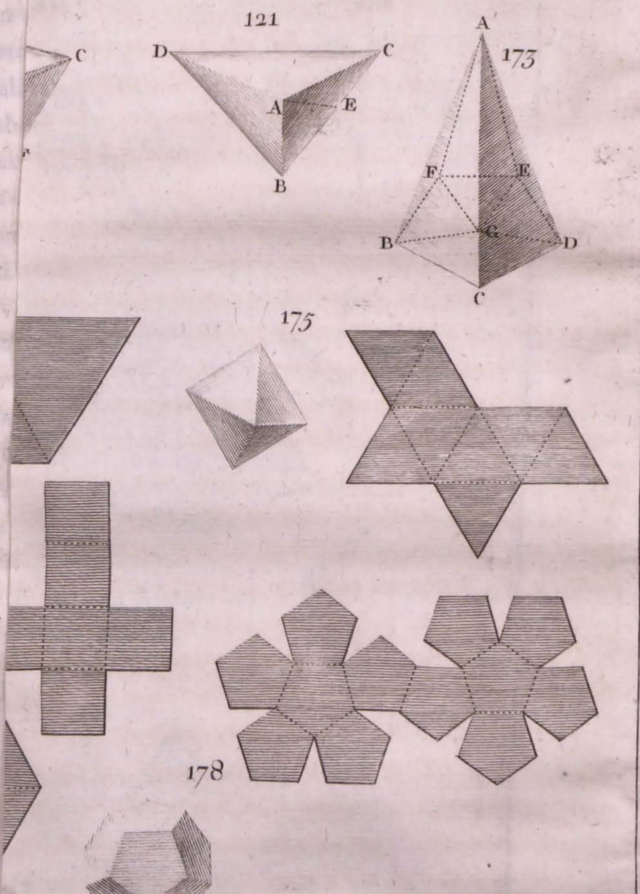
Fig. echa de ver que del mismo modo se podrian formar infinitos que tendrian los mismos ángulos. Sería, pues, preciso que el cálculo hecho por los tres ángulos conocidos, diese el valor de una infinidad de lados diferentes.

En este caso el problema es de todo punto indeterminado; quiero decir que admite un número infinito de resoluciones. No obstante, declararémos en adelante el modo con que se puede determinar entonces la razon que hay entre los tres lados, aunque no se pueda señalar su valor.

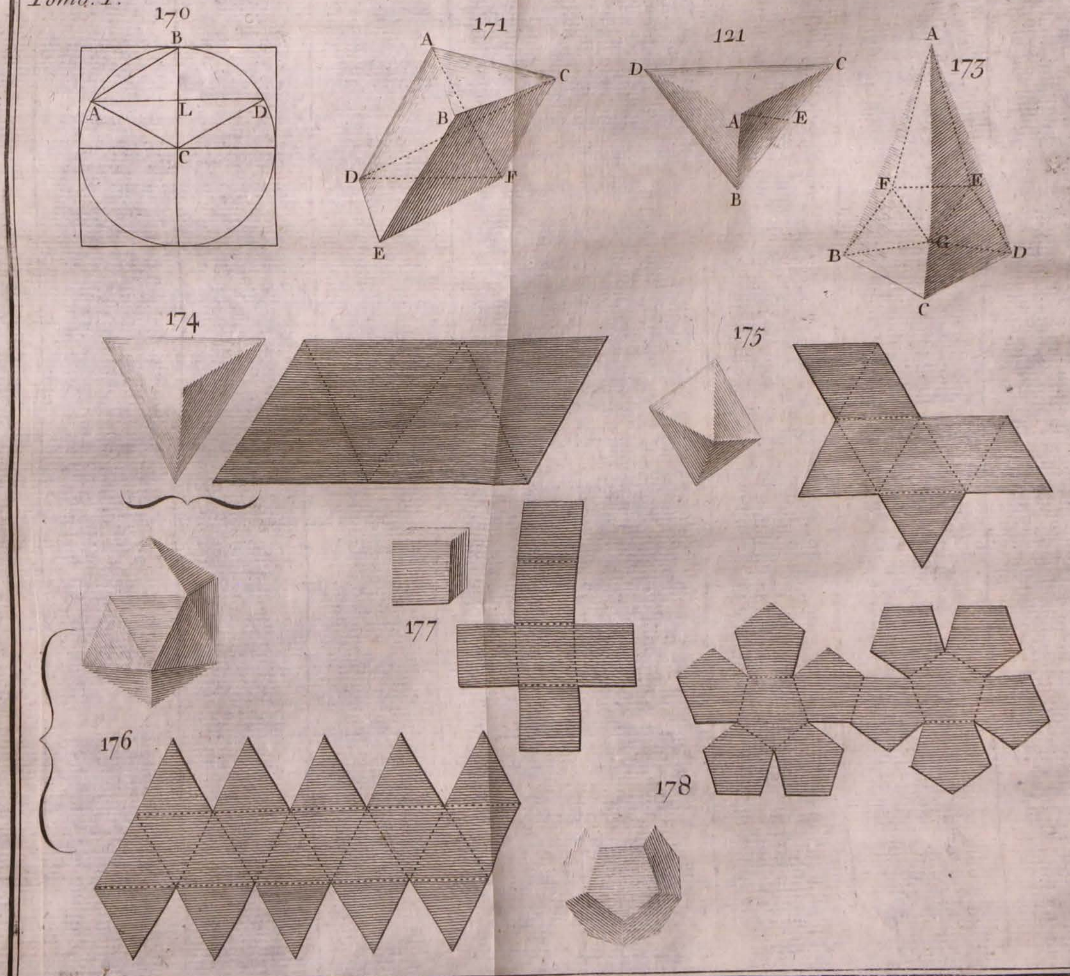
Pero siempre que de las tres cosas conocidas fuese la una un lado, se podrán determinar todas las demas, menos en un caso donde ha de quedar una cosa por determinar, y es el siguiente. Supongamos que en el triángulo *ABC* sean
180. conocidos los dos lados *AB* y *BC*, y el ángulo *C* opuesto al uno de ellos; no se puede determinar el valor del ángulo *A*, ni el del lado *AC*, sino en quanto se sepa si el ángulo *A* es obtuso ó agudo; porque si nos figuramos desde el centro *B*, y con un radio igual al lado *BA*, trazado un arco *DA*, y que por el punto *D* donde este arco encuentra *AC*, se tira *BD*, resultará otro triángulo *CBD*, en el qual se conocerán las mismas cosas que son conocidas en el triángulo *ABC*; es á saber, el ángulo *C*, el lado *CB*, y el lado *BD* igual á *BA*. Hay, pues, en este caso los mismos datos para determinar el ángulo *BDC* que habia en el triángulo *ABC*, para determinar el ángulo *A*.

Hay sin embargo entre este caso y el antecedente la diferencia de que se puede determinar aquí el valor del ángu-

Plana. 412.



Tomo. 1. Plana 412.



gulo *A*, y el del ángulo *BDC*, conforme lo manifestarémos en adelante. No hay mas dificultad que la de saber qual de estos dos valores se deba escoger, y por consiguiente qual deba ser la figura del triángulo. Es, pues, indispensable saber, ademas de las tres cosas conocidas, si el ángulo que se busca ha de ser agudo ú obtuso. Se ha de reparar de paso que los dos ángulos *A* y *BDC* de que se trata, son suplemento el uno del otro; porque *BDC* es suplemento de *BDA*, igual al ángulo *A*, por ser isósceles el triángulo *ABD*. Fig. 1

639 No se hace uso para calcular los triángulos de los ángulos mismos. En lugar de los ángulos ó de los arcos que los miden, se substituyen varias lineas rectas llamadas *senos*, *tangentes*, *cosenos*, &c. que representan los arcos, las quales sin ser proporcionales con ellos los pueden representar, y son fuera de esto mas acomodadas para los cálculos; porque, conforme se verá bien presto, son proporcionales estas lineas á los lados de los triángulos. Conduce, pues, antes de pasar adelante, declarar quales son estas lineas, y como pueden suplir por los ángulos.

De los Senos, Cosenos, Tangentes, Cotangentes, Secantes, y Cosecantes.

640 La perpendicular *AP* tirada desde el extremo de un arco *AB* al radio *BC*, que pasa por el otro extremo *B* de dicho arco, se llama el *seno recto* ó simplemente el seno del arco *AB* ó del ángulo *ACB*. 181.

La porcion *PB* del radio, comprehendida entre el seno

Fig. no y el extremo del arco, se llama el *seno verso.*

181\. La parte BD de la perpendicular al extremo del radio, interceptada entre este radio BC y el radio CA prolongado, se llama la *tangente* del arco AB ó del ángulo ACB.

La linea CD que no se distingue del radio CA prolongado hasta la tangente, se llama secante del arco AB, ó del ángulo ACB.

Si se tira el radio CF perpendicular á CB, y á su extremo F la perpendicular FE, que encuentra en E el radio CA prolongado, y si finalmente se tira AQ perpendicular á CF, se inferirá de las definiciones antecedentes que AQ será el seno, FQ el seno verso, FE la tangente, y CE la secante del arco AF, ó del ángulo ACF.

Pero como el ángulo ACF es complemento de ACB, pues estos dos ángulos juntos componen un ángulo recto, se puede decir que AQ es el seno del complemento, FQ el seno verso del complemento, FE la tangente del complemento, y CE la secante del complemento del arco AB ó del ángulo ACB.

Para ahorrar palabras se han convenido *los* Matemáticos en decir *coseno*, en lugar de seno del complemento del arco; *coseno verso*, en lugar de seno verso del complemento; *cotangente* en lugar de tangente del complemento; y *cosecante*, en lugar de secante del complemento. De manera que las lineas AQ, FQ, FE, CE se llamarán el coseno, el coseno verso, la cotangente y la cosecante del arco AB, ó del ángulo ACB. Igualmente las lineas AP, BP,

BD

BD y *CD* se podrán llamar el coseno, el coseno verso, Fig.
la cotangente y la cosecante del arco *AF*, ó del ángulo 181.
ACF; porque *AB* es complemento de *AF*, del mismo modo que *AF* lo es de *AB*.

Quando respecto de un ángulo ó de un arco determinado queramos nombrar estas lineas, pondremos antes de las letras que sirven para nombrar el ángulo ó el arco, las expresiones abreviadas *sen*, *cos*, *tang*, *cot*, así sen *AB* significará el seno del arco *AB*: sen *ACB* significará el seno del ángulo *ACB*. Asimismo cos *AB*, cos *ACB* significarán el coseno del arco *AB*, el coseno del ángulo *ACB*; y el radio le pintaremos con la letra *R*.

641 Es evidente 1.° *que el coseno* AQ *de todo arco, v. gr.* AB, *es igual á la parte* CP *del radio, comprehendida entre el centro y el seno.*

2.° *Que el seno verso* BP *es igual á la diferencia entre el radio y el coseno.*

3.° *Que el seno de todo arco v. gr.* AB *es la mitad de la cuerda* AG *de un arco doble* ABG. Porque como el radio *CB* es perpendicular á la cuerda *AG*, divide esta cuerda y su arco en dos partes iguales (349 y 352).

642 De esta última proposicion resulta que *el seno de* 30° *vale la mitad del radio*; porque ha de ser la mitad de la cuerda de 60°, ó del lado del exágono, el qual segun demostramos (446) es igual al radio.

643 *La tangente de* 45° *es igual al radio.* Porque si el ángulo *ACB* es de 45°, como el ángulo *CBD* es

rec-

Fig. recto, el ángulo CDB valdrá tambien 45°, pues todos
1.81. los tres ángulos juntos de un triángulo valen dos rectos (393); luego el triángulo CBD será isósceles, y por consiguiente será BD igual á CB.

644 Al paso que el arco AB ó el ángulo ACB crece, crece tambien su seno AP; pero mengua su coseno AQ ó CP; y en llegando el valor del arco AB á 90°, se confunde el seno AP con el radio FC, y el coseno es cero; porque en llegando el punto A á confundirse con el punto F, la perpendicular AQ es cero.

Por lo que mira á la tangente BD, y á la cotangente FE, es patente que la tangente BD vá creciendo de contino, y que la cotangente vá menguando; de modo que quando llega el arco AB á 90°, es infinita su tangente, y su cotangente es cero. Con efecto, quanto mas crece el arco AB, tanto mas se levanta el punto D respecto de BC; y quando el punto A está infinitamente cerca de F, las dos lineas CD y BD son quasi paralelas, y no se encuentran sino á una distancia infinita; luego BD es entonces infinita; luego lo es quando el punto A se confunde con el punto F.

645 De donde resulta, que *quando el arco vale* 90°, *su seno es igual al radio, su coseno es cero, su tangente es infinita, y su cotangente es cero.*

Por ser el seno de 90° el mayor de todos los senos, se llama *seno total*; de suerte que el seno de 90°, el radio, y el seno total, son una misma cosa.

646 Quando el arco AB coge mas de 90°, su seno

no *AP* mengua, y su coseno *AQ* ó *CP*, que entonces cae al otro lado del centro respecto del punto *B*, crece hasta que el arco *AB* llega á ser de 180°, en cuyo caso el seno es cero, y el coseno es igual al radio *CH*. Tambien se echa de ver que el seno *AP* y el coseno *CP* del arco *AB*, ó del ángulo *ACB*, que vale mas de 90°, son igualmente el seno y el coseno del arco *AH*, ó del ángulo *ACH*, que no llega á 90°, y es suplemento del primero; de suerte que *el seno y el coseno de un ángulo obtuso no se distinguen del seno y coseno de su suplemento*; pero es de advertir que el coseno cae á la parte opuesta donde caeria si el arco *AB* ó el ángulo *ACB* no llegára á los 90°. Fig. 182.

En quanto á la tangente, como la determina el concurso de la perpendicular *BD* con el radio *CA* prolongado, se echa de ver que quando el arco *AB* pasa de 90°, la tangente es *BD*; pero si se levanta la perpendicular *HI*, se percibe desde luego que el triángulo *CBD* es igual al triángulo *CHI*, y que por consiguiente *BD* es igual á *HI*.

647 Luego *la tangente de un arco que pasa de 90°, no se distingue de la tangente de su suplemento*; no hay mas diferencia sino que está debaxo del radio *BC*. En quanto á la cotangente *EF*, es tambien la misma que la cotangente del suplemento, y cae á la parte opuesta donde caería si el arco *AB* ó el ángulo *ACB* no llegára á los 90°. Con mucha facilidad probaríamos tambien que la tangente de 180° es cero, y la cotangente es infinita.

648 Sentado esto, supongamos dividido el quadran-

Fig. te de circunferencia BF todo él en arcos de $1'$, esto es, en 5400 partes iguales, y desde cada punto de division baxadas perpendiculares ó senos, como AP, al radio BC. Figuremonos tambien el radio BC dividido en un número muy crecido de partes iguales, v. gr. en 100000 cabrán en cada perpendicular un número determinado de partes del radio; y si por algun medio pudiéramos determinar el número de partes que caben en cada una de estas perpendiculares, no hay duda en que podrian servir para señalar el valor de los ángulos; por manera que si despues de poner por órden en una columna todos los arcos de minuto en minuto desde cero hasta 90°, pusiéramos en otra columna al lado de la primera, y en frente de cada arco las partes que cupieren de la perpendicular correspondiente, se podria señalar por esta tabla qual es el número de grados de un ángulo respecto del qual se conociese el número de partes del seno, ó de la perpendicular correspondiente, y recíprocamente conociendo el número de grados y partes de grado del ángulo, se podria determinar el número de las partes de su seno. Resultaría esta utilidad de dicha tabla, no solo respecto de los arcos ó ángulos cuyo radio tuviese el mismo número de partes que se hubiesen supuesto en el radio, en virtud del qual se hubiese construido dicha tabla; sino tambien respecto de otro qualquiera cuyo radio fuese conocido.

183. Supongamos v. gr. un ángulo DCG, cuyo lado ó radio CD tenga 8 pies, y la perpendicular DE 3 pies; y figuremonos

nos que sea *CA* el radio por el qual se ha construido la tabla; si suponemos trazado el arco *AB* y tirada la perpendicular *AP*, esta será el seno de las tablas; y podré facilmente ver quantas partes caben en esta perpendicular, porque como los triángulos *CDE*, *CAP* son semejantes (por causa de las paralelas *DE* y *AP*), tendré (459) *CD* : *DE* :: *CA* : *AP*; esto es, 8 P : 3 P :: 100000 : *AP*. Sacaré, pues, (183) que *AP* vale 37500; y buscaremos este número en las tablas entre los senos, y á su lado hallaré el número de grados y minutos del ángulo *DCG* ó *DCE*. Fig.

Recíprocamente, en sabiendo de quantos grados y minutos es el ángulo *DCG*, y de quantas partes su radio *CD*, se determinará tambien el valor de la perpendicular *DE*; porque al lado de los grados y minutos que coge este ángulo, se hallará en la tabla el número de partes que coge la perpendicular *AP*, ó el seno *AP* correspondiente; por medio de los triángulos semejantes *CAP*, *CDE*, se hará esta proporcion *CA* : *AP* :: *CD* : *DE*, con lo que sería facil calcular *DE*, pues los tres primeros términos *CA*, *AP* y *CD* son conocidos; es á saber *CA* y *AP* por las tablas, y *CD* por saberse de quantos pies consta.

Con esto se ve quales son las lineas que arriba diximos (639) poderse substituir en lugar de los ángulos en el cálculo de los triángulos; cuyas lineas son los senos.

649 Pero no sirven solos los senos; sirven igualmente las tangentes, y tambien las secantes. Es facil calcular

Fig. estas lineas, una vez calculados todos los senos; porque
181. como el triángulo CPA, y el triángulo CBD son semejantes, se pueden inferir de ellos estas dos proporciones.

$$CP : PA :: CB : BD$$

$$\text{y } CP : CA :: CB : CD.$$

Esto es (considerando que $CP = AQ$)

$$\cos AB : \text{sen } AB :: R : \text{tang } AB$$

$$\text{y } \cos AB : R :: R : \sec AB.$$

Pero ya se vé que en cada una de estas dos proporciones los tres primeros términos son conocidos quando son conocidos todos los senos; pues el coseno de un arco no es otra cosa que el seno de su complemento. Será, pues, facil inferir (183) el valor del quarto término de cada una; y por consiguiente el de las tangentes y de las secantes, como tambien el de las cotangentes y cosecantes, que no son mas que tangentes y secantes del complemento.

650 No solo sirven las dos últimas proporciones para el cálculo de las tangentes y de las secantes, son tambien de mnchísimo uso para otros asuntos, conforme se verá en varias ocasiones. La segunda proporcion v. gr. nos proporciona inferir una propiedad muy socorrida, y es la siguiente. Así como hemos demostrado que $\cos AB : R :: R : \sec AB$, se demostrará respecto de otro arco qualquiera BO, que $\cos BO : R :: R : \sec BO$; pero ya que los términos de estas dos proporciones son unos mismos, tendrán iguales los productos de sus extremos (182); luego se puede (184) formar con los extremos de ambas

bas otra proporcion, que tendrá por extremos los extremos Fig.
de la una, y por medios los extremos de la otra; de suerte 181.
que tendremos cos AB : cos BO :: sec BO : sec AB; de lo que se infiere que *los cosenos de dos arcos son unos con otros en razon recíproca ó inversa de sus secantes.*

651 Declararé aquí otra proporcion util en muchos casos, de la qual se inferirá del mismo modo que *las tangentes de dos arcos son unas con otras en razon inversa de sus cotangentes*; los triángulos CBD, CFE son semejantes, porque ademas de los ángulos rectos en B y F, es el ángulo DCB igual á CEF por razon de las paralelas CB, EF; tendremos, pues, $BD : CB :: CF : FE$, esto es, tang $AB : R :: R :$ cot AB; del mismo modo probaríamos que tang $BO : R :: R :$ cot BO, y por consiguiente tang AB : tang BO :: cot BO : cot AB.

Los libros donde se hallan los valores de todas las lineas de que acabamos de hablar, se llaman *tablas de senos*; contienen no solo los valores numéricos de todas las expresadas lineas, mas tambien sus logaritmos, de los quales se hace uso lo mas que se puede en lugar de los valores numéricos. Las mismas tablas contienen tambien los logaritmos de los números naturales.

Antes que pasemos á declarar los usos de estas tablas para la resolucion de los triángulos, nos toca tratar de su formacion, esto es, del método por el qual se han calculado ó podido calcular los senos &c.

Nos detendrémos tanto mas gustosos en esto, quanto

Fig. nos servirán en otras partes las proposiciones que con este motivo vamos á demostrar.

652 *Para hallar el coseno de un arco, cuyo seno es conocido*, se ha de restar el quadrado del seno del quadrado del radio, y sacar la raiz quadrada de la resta.
181. Porque el coseno *AQ* es igual á *PC*, lado del ángulo recto en el triángulo rectángulo *APC*, cuya hypotenusa *AC*, y el lado *AP* son entonces conocidos.

Así, si se pidiese el coseno de 30°, ya que (642) este seno es la mitad del radio, el qual aquí suponemos de 100000 partes, este seno sería 50000; restando su quadrado 2500000000 del quadrado 10000000000 del radio, sale 7500000000, cuya raiz quadrada 86603 es el coseno de 30°, ó el seno de 60°.

653 *En conociendo el seno de un arco* AB, *para hallar el de su mitad*, se calculará primero el coseno *PC* de este primer arco; calculado este coseno, se restará del radio, de lo que resultará el seno verso *BP*; se quadrará el valor de *BP*, se sumará este quadrado con el quadrado del seno *AP*, la suma será (517) el quadrado de la cuerda *AB*; sacando la raiz quadrada de esta suma, saldrá *AB*, cuya mitad es el seno *BI* del arco *BD* mitad de *AB* (641).

654 *En conociendo el seno* BI *de un arco* BD, *para hallar el seno* AP *del duplo* AB *de dicho arco*, se calculará el
184. coseno *CJ* de *BD*, y se formará esta proporcion *R* : cos *BD* :: 2 sen *BD* : sen *ADB*, cuyos tres primeros términos serán entonces conocidos, y será facil calcular el quarto.

Fún-

Fúndase esta proporcion en que los dos triángulos CBI y BAP son semejantes; porque ademas de los ángulos rectos en P é I, tienen el ángulo B comun; tenemos, pues, $CB : CJ :: AB : AP$. Pero (641) CI es el coseno de BD, y AB, duplo de BI, seno de BD; AP es el seno de ADB, y CB es el radio; luego $R : \cos BD :: 2 \operatorname{sen} BD : \operatorname{sen} ADB$. Fig.

655 En conociendo los senos BQ, DP de dos arcos AB, AD, 1.° *para hallar el seno de su suma*, despues de calculados los cosenos (652) de ambos arcos, se multiplicará el seno del primero por el coseno del segundo, y el seno del segundo por el coseno del primero. La suma de estos dos productos dividida por el radio será el seno de la suma de dichos dos arcos. 185.

2.° La diferencia de los mismos productos dividida por el radio, será el seno de la diferencia de los mismos arcos.

Para probarlo, prolónguese el seno DP del arco AD, hasta que encuentre en el punto R el radio CB que pasa por el extremo B del arco AB: tírese la recta DL perpendicular al mismo radio CB, cuya perpendicular será el seno (640) de la suma de los dos arcos DA, AB, ó del arco BAD, y su coseno será CL.

Por ser BQ y RP ambas perpendiculares á AC, serán paralelas entre sí, y serán semejantes los triángulos CBQ, CRP, de los quales sacarémos $CQ : QB :: CP : PR$; ó $\cos AB : \operatorname{sen} AB :: \cos AD : PR = \frac{\cos AD \times \operatorname{sen} AB}{\cos AB}$. Los triángulos BQC, RDL, cuyos lados son todos perpendiculares,

Fig. cada uno al suyo, serán semejantes (462 y 465), y darán $BC : QC :: DR : DL$; ó $R : \cos AB :: \text{sen } AD + \frac{\cos AD \times \text{sen } AB}{\cos AB} : \text{sen}(AB + AD) = \frac{\text{sen } AB \times \cos AD + \text{sen } AD \times \cos AB}{R}$.

2.° Para probar la segunda parte de la proposicion, considerarémos BD como el arco mayor, y el arco AB como el menor. De los triángulos CQB, CLO, cuyos lados son perpendiculares cada uno al suyo, sacarémos $CQ : QB :: CL : LO$; ó $\cos AB : \text{sen } AB :: \cos BD : LO = \frac{\text{sen } AB \times \cos BD}{\cos AB}$. Luego $DO = \text{sen } BD - \frac{\cos BD \times \text{sen } AB}{\cos AB}$. Ademas de esto los dos triángulos semejantes DPO, CQB dan $CB : CQ :: DO : DP$; ó $R : \cos AB :: \text{sen } BD - \frac{\cos BD \times \text{sen } AB}{\cos AB} : \text{sen }(BD - AB) = \frac{\text{sen } BD \times \cos AB - \text{sen } AB \times \cos BD}{R}$.

656 *Para hallar el coseno de la suma ó de la diferencia de dos arcos cuyos senos son conocidos*; despues de calculados los cosenos de cada arco (652), se multiplicarán estos dos cosenos uno por otro, y multiplicarán igualmente ambos senos. Hecho esto, se restará el segundo producto del primero, y dividiendo la resta por el radio, saldrá el coseno de la suma de los dos arcos. Al contrario, para hallar el coseno de la diferencia, se juntarán los dos productos expresados, y se partirá la suma por el radio.

1.° Porque los triángulos semejantes CQB, DPO dán $CQ : QB :: DP : PO$; ó $\cos AB : \text{sen } AB :: \text{sen } AD : PO = \frac{\text{sen } AB \times \text{sen } AD}{\cos AB}$; luego $CO = \cos AD - \frac{\text{sen } AB \times \text{sen } AD}{\cos AB}$; pero de los triángulos semejantes CQB, CLO sacamos tambien $CB : CQ :: CO : CL$; ó $R : \cos AB :: \cos AD - \frac{\text{sen } AB \times \text{sen } AD}{\cos AB} : \cos (AD + AB) = \frac{\cos AD \times \cos AB - \text{sen } AB \times \text{sen } AD}{R}$.

Si

2.° Si consideramos el arco BD como el mayor y el arco AB como el menor, será evidentemente CP el coseno de la diferencia de dichos arcos. Los triángulos CQB, DLR cuyos lados son perpendiculares, cada uno al suyo, serán semejantes y darán $CQ : QB :: DL : LR$; ó $\cos AB : \text{sen}\, AB :: \text{sen}\, BD : LR = \frac{\text{sen}\, BD \times \text{sen}\, AB}{\cos AB}$; luego CR ó $CL + LR = \cos BD + \frac{\text{sen}\, BD \times \text{sen}\, AB}{\cos AB}$, y por causa de los triángulos semejantes CQB, CPR tendrémos $CB : CQ :: CR : CP$; ó $R : \cos AB :: \cos BD + \frac{\text{sen}\, BD \times \text{sen}\, AB}{\cos AB} : \cos(BD - AB) = \frac{\cos BD \times \cos AB + \text{sen}\, BD \times \text{sen}\, AB}{R}$.

657 *La suma de los senos de dos arcos* AB, AC *es á la diferencia de los mismos senos, como la tangente de la semisuma de dichos dos arcos es á la tangente de la mitad de su diferencia*; esto es, $\text{sen}\, AB + \text{sen}\, AC : \text{sen}\, AB - \text{sen}\, AC :: \text{tang}\, \frac{AB + AC}{2} : \text{tang}\, \frac{AB - AC}{2}$. Fig. 186.

Despues de tirado el diámetro AM, llévese el arco AB desde A á D; tírese la cuerda BD, la qual será perpendicular á AM (350). Por el punto C tírese CP perpendicular, y CF paralela á AM. Desde el punto F tírense las cuerdas FB y FD, y con un radio FG igual al del círculo BAD descríbase el arco IGK que encuentra CF en G, y en el punto G levántese HL perpendicular á CF; las lineas GH y GL son las tangentes de los ángulos GFH y GFL, ó CFB y CFD, los quales por tener sus vértices en la circunferencia, tienen por medida la mitad de los arcos CB y CD, que cogen (372); esto es, la mitad de la diferencia BC, y la mitad de la suma CD de los

dos

Fig. dos arcos AB, AC. Así GL y GH son las tangentes de la mitad de la suma y de la mitad de la diferencia de estos mismos arcos.

Sentado esto, es evidente que por ser DS igual á BS, la linea DE vale $BS+SE$, ó $BS+CP$; esto es, la suma de los senos de los arcos AB, AC; tambien BE es igual á $BS-SE$, ó $BS-CP$; esto es, á la diferencia de los senos de estos mismos arcos.

Pero por razon de las paralelas BD, HL tenemos (466) $DE : BE :: LG : GH$; luego sen $AB+$sen AC: sen $AB-$ sen AC :: tang $\frac{AB+AC}{2}$: tang $\frac{AB-AC}{2}$.

658 Los tres principios sentados (642, 653 y 655) bastan para enterarse del método que podria seguirse para formar una tabla de los senos. Con efecto, ya hemos declarado (642) lo que se debe practicar para hallar el seno de 30°; y por lo dicho (653) se puede hallar el seno de 15°, y succesivamente los senos de $7^\circ\,30'$, $3^\circ\,45'$, $1^\circ\,52'\,30''$, $0^\circ\,56'\,15''$, $0^\circ\,28'\,7''\,30'''$, $0^\circ\,14'\,3''\,45'''$, $0^\circ\,7'\,1''\,52'''\,30^{IV}$.

Sentado esto, considérese que quando los arcos son muy pequeños, nó discrepan sensiblemente de sus senos, y son por consiguiente proporcionales á dichos senos. Así para hallar el seno de $1'$, se hará esta proporcion; el arco de $0^\circ\,7'\,1''\,52'''\,30^{IV}$ es al arco de $0^\circ\,1'$, como el seno del primer arco es al seno de $1'$.

Si en este cálculo se supone el radio de solas 100000 partes, se deberán calcular los senos de los arcos que hemos

mos referido, con tres decimales, para poder inferir los siguientes con diferencia de menos de una unidad; despues se sacarán los mayores por el método siguiente. Fig.

Desde $1'$ hasta $3^\circ\ 0'$ bastará multiplicar succesivamente el seno de $1'$ por 2, 3, 4, 5 &c. para hallar el seno de $2'$, $3'$ &c. hasta 3°, con diferencia de menos de una unidad.

Para calcular los senos de los arcos mayores que $3^\circ\ 0'$, se apelará á lo dicho (655); pero se escusará muchísimo trabajo si se calcularen estos senos por este principio solo de grado en grado. Por lo que mira á los senos de los arcos de grados y minutos, se hallarán con tomar la diferencia de los senos de dos grados consecutivos, y formar esta proporcion; 60 minutos son al número de minutos de que se trata, como la diferencia de los senos de dos grados inmediatos es á un quarto término, el qual expresará lo que se le deberá añadir al menor de los dos senos para hallar el seno del número de grados y minutos propuesto.

V. gr. si despues de saber que los senos de 8° y de 9° son 13917 y 15643, quisiera formar el seno de $8^\circ\ 17'$; tomaré la diferencia 1726 de dichos dos senos, y calcularé el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros son $60' : 17' :: 1726 :$

Este quarto término, el qual es 489 con muy poca diferencia, sumado con 13917, dá 14406 para el seno de $8^\circ\ 17'$, qual se halla en las tablas, con diferencia de menos de una unidad.

Fún-

Fig. 187. Fúndase este método en que quando el arco KL es pequeño, de 1°, v. gr. las lineas LM, Iu, diferencias entre los senos LF, IH, y el seno KE, son, con poca diferencia, proporcionales á los arcos KL, IK, diferencias entre los arcos AL, AI, y el arco AK; porque pudiéndose considerar como rectilineos los triángulos KML, KuI, serán semejantes, y podremos decir KL, diferencia entre los arcos AL y AK, es á KI, diferencia entre los arcos AI y AK, como LM, diferencia entre el seno del arco AL y del arco AK, es á Iu, diferencia entre el seno del arco AI y del arco AK; esto es, $KL : KI :: LM : Iu$, ó, en el caso propuesto, $60' : 17' :: 1726 : 489$.

659 Pero acerca de este método hay que hacer una prevencion muy importante, de la gual resulta que no puede ser general su aplicacion; porque ya no se puede aplicar
188. en llegando el arco AB á valer 87°, y sirve tanto menos quanto mas se acerca este arco al valor de 90°. Porque quando consideramos como rectilineo el triángulo BED, consideramos como confundida con su arco BD la cuerda BuD; y mirando entonces iu como la verdadera diferencia entre los senos PB y Qx, omitimos la porcion ux del seno Qx. Quanto mas el arco AB se acerca á 90°, tanto mas los senos PB y Qx se acercan á la razon de igualdad con el seno total (644), y están muy cerca de ser iguales entre sí; en cuyo caso será muy corta la diferencia iu entre los senos BP y Qx; y quanto menor fuere esta diferencia, mas considerable será respecto de ella la porcion ux omi-

omitida, y se deberá por lo mismo contar con ella para sacar con toda la puntualidad que cabe el valor que se busca del seno Qx. En este caso es preciso tener presente que (523) las lineas DE, Dt, diferencias entre el radio y los senos PB, Qx, son proporcionales á los quadrados de las cuerdas DB y Dx, ó (por ser muy pequeños los arcos DB y Dx) á los quadrados de los arcos DB y Dx; por lo que, despues de calculado el seno de 87°, se tomará la diferencia que hubiere entre él y el radio 100000; y para hallar el seno de otro arco entre 87° y 90°, se hará esta proporcion: El quadrado de 3° ó de $180'$ es al quadrado del número de minutos del complemento del arco propuesto, como la diferencia entre el radio y el seno de 87° es á un quarto término, que será Dt, el qual restado del radio, dará Ct ó Qx, ó el valor del seno que se busca. V. gr. si despues de saber que el seno de 87° es 99863, quiero hallar el seno de $88^\circ\ 24'$, cuyo complemento es $1^\circ\ 36'$ ó $96'$, haré esta proporcion $(180')^2 : (96')^2 :: 137 : Dt$, de lo qual infiero que Dt vale 39 con muy poca diferencia; restando 39 del radio 100000, sale 99961, seno de $88^\circ\ 24'$, qual se halla, con efecto, en las tablas. Fig. 188.

660 Calculados por este método los senos, se sacarán facilmente las tangentes y las secantes por lo dicho (649).

661 Despues de calculados los senos se calculan sus logaritmos del mismo modo que se calculan los de los nú-

me-

Fig. meros. Es de observar, no obstante, que si se tomase en
188. las tablas el valor numérico de uno de los senos á fin de calcular su logaritmo, por lo dicho (241), no se sacaría este logaritmo de todo punto el mismo que está en la columna de los logaritmos de los senos; la razon es, que los senos de las tablas se calcularon al principio en el supuesto de ser el radio de 10000000000 partes; pero como en los cálculos que ocurren comunmente no se necesita tanta puntualidad, se han suprimido en las tablas actuales los cinco últimos guarismos de los valores numéricos de los senos, tangentes &c.

De suerte que estos valores, quales están actualmente en las tablas, no están aproxîmados sino con diferencia de una unidad sobre 100000. No se ha hecho *lo propio* con los logaritmos de los senos, tangentes &c. que se han quedado quales se habian calculado en el supuesto de estar el radio dividido en 10000000000 partes; siendo esta la razon por qué tienen una característica mucho mayor de lo que parece requeria el valor numérico del seno ó de la tangente correspondiente; de suerte que quando sirven los logaritmos de los senos, tangentes &c. se calcula en el supuesto tácito de ser el radio de 10000000000 partes; y quando sirven los valores numéricos de los senos, tangentes &c. se calcula en el supuesto de ser de 100000 no mas las partes del radio.

Por lo que mira á los logaritmos de las tangentes y secantes, se sacan con sola una simple adicion, y una sustrac-

traccion, una vez que se conocen los de los senos. Esto Fig.
es evidente por lo dicho (649 y 240).

662 Aunque en las tablas que hemos publicado solo se hallan los senos de los grados y minutos, pueden no obstante servir tambien para hallar los senos de los grados, minutos y segundos, practicando al pie de la letra lo que acabamos de declarar respecto de los grados y minutos; pero como se hace mas uso de los logaritmos de los senos que de los senos mismos, pararémos un poco la consideracion en este punto.

Quando se quiera hallar el logaritmo del seno de un número determinado de grados, minutos y segundos, se tomará en las tablas el logaritmo del seno del número de grados y minutos; se tomará tambien la diferencia de los dos logaritmos inmediatos, puesta al lado, y se hará esta proporcion; $60''$ son al número de segundos propuesto, como la diferencia de los logaritmos qual la dán las tablas, es á un quarto término que se añadirá al logaritmo del seno de los grados y minutos.

Si por el contrario, dado un logaritmo de seno que no corresponda á un número cabal de grados y minutos, quisiésemos hallar los segundos, se haria esta proporcion; la diferencia de los dos logaritmos entre los quales está el logaritmo dado, es á la diferencia que vá del mismo logaritmo al menor de los dos logaritmos de las tablas, entre los quales está, como $60''$ son á un quarto término, el qual expresará el número de segundos que se le deberán

aña-

Fig. añadir al arco correspondiente al logaritmo de las tablas inmediatamente menor que el propuesto. Si se ofreciese averiguar de quantos grados, minutos y segundos es el arco correspondiente al logaritmo 9203277 I de un seno, se buscaría primero entre que logaritmos está en las tablas de los senos; y viendo que está entre el logaritmo del seno de $9^\circ\ 11'$ y el logaritmo del seno de $9^\circ\ 12'$, de cuyos logaritmos la diferencia es 7807, siendo 2604 la que hay entre el logaritmo propuesto y el logaritmo de $9^\circ\ 11'$, serian 7807, 2604, y $60''$ los tres primeros términos de la proporcion que convendria formar; y como sería 20 el quarto término, sería señal que el logaritmo propuesto corresponde al seno de un arco de $9^\circ\ 11'\ 20.''$

Pero no se podrá practicar esta regla si no llegare el arco á 3°, en cuyo caso se hará lo que en el exemplo siguiente. Si se pidiese el seno de $1^\circ\ 55'\ 48''$, se haria esta proporcion; $1^\circ\ 55' : 1^\circ\ 55'\ 48''$ :: el seno $1^\circ\ 55'$ es á un quarto término que (por ser los arcos pequeños proporcionales á sus senos) será sin diferencia reparable el seno de $1^\circ\ 55'\ 48''$. Pero sería menos trabajoso el cálculo si se reduciesen los dos primeros términos á segundos, y se tomara en las tablas el logaritmo del seno de $1^\circ\ 55'$, que es el tercer término; se le añadiria el logaritmo del número que expresare quantos segundos hay en $1^\circ\ 55'\ 48''$, y restando de la suma el logaritmo del número que expresare quantos segundos hay en $1^\circ\ 55'$, sería la resta (240) el logaritmo del quarto término, esto es, el que se busca.

Re-

Recíprocamente, *para hallar el número de grados, minutos y segundos de un arco que no llegue á 3°, y cuyo seno es conocido*, se buscará desde luego en las tablas qual es el número de grados y minutos; despues se hará esta proporcion; el seno del número de grados y minutos hallados es al seno propuesto, como el mismo número de grados y minutos, reducidos á segundos, es al número total de segundos del arco que se busca; y haciendo la operacion por logaritmos, se reducirá á tomar la diferencia que va del logaritmo del seno propuesto al logaritmo del seno del número de grados y minutos inmediatamente menor, y añadir dicho logaritmo al logaritmo del expresado número de grados y minutos transformados en segundos; será la suma el logaritmo del número de segundos que vale el arco que se busca. Si se me propone v. gr. como logaritmo del seno de un arco el número 8,6233427; hallo en las tablas que el número de grados y minutos que mas se le acerca, es 2° 24′, y que la diferencia entre el logaritmo del seno propuesto y el logaritmo del seno del último arco, es 0013811; sumo esta diferencia con 3936 5137 logaritmo de 2° 24′ transformados en segundos; la suma 3,9378948 corresponde en las tablas de logaritmos á 8667, cuyo número expresa el número de segundos del arco que se busca, el qual por consiguiente es de 2° 24′ 27.″ Esta regla es la inversa de la antecedente.

Por lo que mira á los logaritmos de las tangentes, se practicarán las mismas reglas mudando el nombre de seno

Fig.

Fig. en el de tangente ; no hay mas excepcion sino respecto de los arcos que están entre 87° y 90°. Se practicará respecto de estos lo siguiente. Calcúlese el logaritmo de la tangente del complemento por la regla que acabamos de dar para las tangentes , y réstese este logaritmo del duplo del logaritmo del radio. Con efecto , por lo dicho (651), la tangente es el quarto término de una proporcion, cuyos tres primeros son la cotangente , el radio y el radio ; y si al contrario se tuviese el logaritmo de la tangente de un arco, el qual estuviese entre 87° y 90°, y hubiera de llevar segundos , se restaría dicho logaritmo del duplo del logaritmo del radio , y saldria la tangente del complemento, la qual por hallarse precisamente entre 0° y 3°, se determinaría facilmente por lo que precede ; y tomando el complemento del arco hallado por este medio , se hallaría el arco que se busca.

De la resolucion de los Triángulos Rectángulos.

663 Diximos arriba (638) que para que se pueda resolver un triángulo , es indispensable conocer tres de las seis cosas de que consta; y que entre las tres cosas conocidas ha de haber por lo menos un lado. Como el ángulo recto es conocido , basta conocer en los triángulos rectángulos dos cosas distintas del ángulo recto ; pero es preciso que de estas dos sea á lo menos la una un lado. Conviene tambien tener presente que como los dos ángulos de un triángulo rectángulo valen juntos un ángulo recto, una vez que se conoce el uno , es tambien conocido el otro.

Re-

Redúcese á quatro casos la resolucion de los triángulos rectángulos; porque las dos cosas conocidas son 1.º el uno de los dos ángulos agudos, y un lado del ángulo recto; ó 2.º un ángulo agudo y la hypotenusa; ó 3.º un lado del ángulo recto y la hypotenusa; ó 4.º finalmente los dos lados del ángulo recto. Estos quatro casos siempre se resolverán por una de las dos proporciones ó analogías siguientes. Fig.

664 1.º *El radio de las tablas es al seno del uno de los ángulos agudos, como la hypotenusa es al lado opuesto á dicho ángulo agudo.*

665 2.º *El radio de las tablas es á la tangente del uno de los ángulos agudos, como el lado del ángulo recto adyacente á dicho ángulo es al lado opuesto al mismo ángulo.*

Para demostrar la primera de estas dos analogías basta suponer que en el triángulo rectángulo *CDE* la parte *AC* de la hypotenusa es el radio de las tablas; entonces suponiendo tirado el arco *AB*, la perpendicular *AP* será el seno del ángulo *ACB* ó *DCE*; pero por causa de las paralelas *AP* y *DE* los triángulos semejantes *CAP*, *CDE*, darán $CA : AP :: CD : DE$; esto es, $R :$ sen $DCE :: CD : DE$, lo que es cabalmente la primera analogía. 183.

Del mismo modo se probará que $R :$ sen $CDE :: CD : CE$.

Por lo que toca á la segunda analogía, conviene figurarse que en el triángulo rectángulo *CEF* la parte *CA* del lado *CE* sea el radio de las tablas; suponiendo tirado el 189.

Fig. arco AB, la perpendicular AD levantada en el punto A de la AC, será la tangente del ángulo C ó FCE; entonces por los triángulos semejantes CAD, CEF, tendremos $CA : AD :: CE : CF$; esto es, R : tang $FCE :: CE : EF$, y esta es la segunda de las dos analogías propuestas.

Del mismo modo se probará que R : tang $CFE :: EF : CE$.

Las dos analogias que acabamos de probar, son lo mismo que las dos proposiciones siguientes.

666 1.° *Si en un triángulo rectángulo se hace radio*
190. *la hypotenusa, cada lado será el seno del ángulo opuesto.* Si en el triángulo rectángulo CED se hace radio ó seno total la hypotenusa CD, y centro el punto C, será DE el seno del arco DB, ó del ángulo DCE. Si hiciéramos centro en el punto D, con igual facilidad se haría patente que sería CE el seno del ángulo CDE.

667 2.° *Si se hace radio el uno de los dos lados del*
189. *ángulo recto, será el otro la tangente del ángulo opuesto.* Si en el triángulo CAD se hace radio el lado CA, y centro en el punto C, se echa de ver que será AD la tangente del ángulo opuesto C. Si se hiciera centro en el punto D y radio DA, sería CA la tangente del ángulo opuesto D.

668 En las aplicaciones que nos proponemos hacer de estas dos analogías á la resolucion de todos los casos de los triángulos rectángulos, nos valdremos siempre de los logaritmos de los senos, tangentes &c. en lugar de los senos, tangentes &c.; y para que se acostumbren los prin-

ci-

cipiantes á valerse del complemento arismético, le introducirémos en todos los cálculos, exceptuando los casos en que el logaritmo que se hubiere de restar fuese el del radio; porque siendo 1 0 su característica, es muy facil la sustraccion. Fig.

669 Caso I. *Supongamos que siendo conocidos en el triángulo rectángulo* ABC *el ángulo* A *y el lado* AB, *queramos conocer el otro lado* BC. Sea v. gr. el lado *AB* de 132 P. y el ángulo *A* de 48° 64′. Claro está que las tres cosas conocidas y la quarta que se busca son los términos de la analogía del número 665; luego para hallar *BC* haremos esta proporcion *R* : tang *CAB* :: *BA* : *BC*, ó *R* : tang 48° 54′ :: 132 P : *BC*; de suerte que tomando en las tablas el valor de la tangente de 48° 54′, multiplicándole por 132, y dividiendo el producto por el valor del radio qual le dán las tablas, saldrá el número de pies de *BC*. 191.

Pero se puede abreviar muchísimo el cálculo, haciéndole no por los expresados números, sino por sus logaritmos; porque con esto se reduce la operacion á sumar (240) los logaritmos del segundo y tercer término, y restar de la suma el logaritmo del primero; por lo que, se hará el cálculo como sigue.

Log. tang 48° 54′.......	10,0593064
Log. 132............	2,1205739
Suma...............	12,1798803
Log. del radio.........	10,0000000
Resta ó log. *BC*.......	2,1798803

Fig. cuyo logaritmo en las tablas corresponde á 151, 32 con diferencia de menos de una centésima. Es, pues, *BC* de 151 P, 32, ó 151 P 3 p 10 l (128).

Prevengo de paso, que por ser 10 la característica del logaritmo del radio, y ceros todas sus demas figuras, se podrá, quando se trate de sumarle ó restarle, excusar escribirle, y bastará añadir ó quitar una unidad á las decenas de la característica del logaritmo, con el qual se le hubiese de sumar, ó del qual se le hubiese de restar.

Caso II. *Dada la hypotenusa y uno de los ángulos agudos, hallar el valor de los lados.*

192. Supongamos en el triángulo rectángulo *ACB*, la hypotenusa *AB* de 32 P. y el ángulo *A* de $22^\circ\ 30'$, y que por estos datos queramos sacar el valor del lado *BC* y del lado *CA*.

Para hallar el lado *BC* harémos esta analogía (664) $R : \text{sen}\ 22^\circ\ 30' :: 32\ \text{P} : BC$.

Y para hallar *AC* se tendrá presente que el ángulo *B* es complemento del ángulo *A*, por lo que, se hará esta analogía (664) $R : \text{sen}\ 67^\circ\ 30' :: 32\ \text{P} : AC$.

Ambas operaciones se harán por logaritmos del modo siguiente.

Log. sen $22^\circ\ 30'$.......	9,5828397
Log. 32	1,5051500
Suma	11,0879897
Log. del radio..........	10 . . .
Resta ó log. *BC*	~~1~~1,0879897

cu-

cuyo logarítmo corresponde á 12,25, con diferencia de Fig.
menos de una centésima.

Log. sen 67° 30′.	9,9656153
Log. 32	1,5051500
Suma.	11,4707653
Log. del radio	10 . . .
Resta ó log. *AC* . . , ...	1,4707653

cuyo logaritmo corresponde á 29,56 con diferencia de menos de una centésima.

Caso III. *Dado un lado y la hypotenusa, hallar los ángulos.*

Supongamos en el triángulo rectángulo *ACB* conoci- 192.
do el lado *AC* del ángulo recto; y que siendo la hypotenusa de 42 P, y el lado *AC* de 35 P, queramos conocer el ángulo *CAB*. Ya que los dos ángulos *A* y *B* valen juntos un ángulo recto, conoceremos el ángulo *A*, como determinemos el ángulo *B*. Para determinarle nos basta (664) esta analogía; *R* : sen *B* :: *AB* : *AC*, ó *R* : sen *B* :: 42 : 35; ó escribiendo la segunda razon en lugar de la primera 42 : 35 :: *R* : sen *B*.

Haciendo la operacion por logaritmos, saldrá

Log. 35	1,5440680
Log. del radio	10 . . .
Comp.arism. del log. de 42.	8,3767507
Suma ó log. sen *B*	19,9208187

 cu-

Fig. cuyo logaritmo en las tablas corresponde á $56^\circ\ 27'$; luego el ángulo A es de $33^\circ\ 33'$.

Caso IV. *Dados en el triángulo rectángulo* ACB *los dos lados del ángulo recto, hallar los ángulos y la hypotenusa.*

192. Para hallar el ángulo A se hará esta analogía (665) $AC : BC :: R : \text{tang}\ A$; esto es (suponiendo que AC sea de 35 P y BC de 15), $35 : 15 :: R : \text{tang}\ A$.

Haciendo la operacion por logaritmos,

Log. 15	1,1760913
Log. del radio . . . . , . . .	10 . . . .
Compl. arism. log. 35.	8,4559320
Suma ó log. tang A.	19,6320233

cuyo logaritmo en las tablas corresponde á $23^\circ\ 12'$.

Para hallar AB se puede, despues de determinado el ángulo A, practicar lo propio que en el caso 3.º Pero no es necesario calcular el ángulo A; la proposicion demostrada (517) basta. Tomando, pues, el quadrado de 15, que es 225, y el quadrado de 35 que es 1225, la suma, pues, de estos dos quadrados 1450, será el quadrado de AB; y sacando la raiz quadrada, saldrá 38,08 cuyo número será con diferencia de menos de una centésima el valor de AB.

Por la misma razon, si dada la hypotenusa AB, y el uno de los lados del ángulo recto, se hubiese de sacar el otro lado BC, no sería menester calcular el ángulo A; se restaría (518) el quadrado del lado conocido AC del

qua-

quadrado de la hypotenusa *AB*; la raiz quadrada de la resta sería el valor del lado *BC*. Fig.

Resolucion de los Triángulos obliquángulos.

670 Llamamos *triángulos obliquángulos*, en general, los que no tienen ningun ángulo recto.

671 *En todo triángulo rectilineo los senos de los ángulos son unos con otros como los lados opuestos á dichos ángulos.*

Porque si inscribimos un triángulo en un círculo, cada lado será la cuerda de un arco duplo del que mide el ángulo opuesto (372); luego la mitad de cada lado es (641) el seno del ángulo opuesto; luego ya que las mitades tienen unas con otras la misma razon que los todos, son unos con otros los lados como los senos de los ángulos opuestos.

672 Sirve esta proposicion siempre que ocurre resolver un triángulo; 1.° *Quando son conocidos dos ángulos y un lado.* 2.° *Quando son conocidos dos lados y un ángulo opuesto á uno de dichos lados.*

Caso I. Si conociéramos el ángulo *B*, el ángulo *C*, 193.
y el lado *BC*, se hallaría el ángulo *A*, sumando uno con otro los dos ángulos *B* y *C*, y restando su suma de 180°, y para hallar los dos lados *AC* y *AB* se harian las dos proporciones siguientes:

sen *A* : *BC* :: sen *B* : *AC*

sen *A* : *BC* :: sen *C* : *AB*.

Supongamos v. gr. que sea el ángulo *B* de 78° 57′, el ángu-

Fig. gulo C de $47^\circ\ 34'$, y el lado BC de 184 P, será el ángulo A de $53^\circ\ 29'$, y se hallarán los otros dos lados por estas dos proporciones.

$$\text{sen } 53^\circ\ 29' : 184 :: \text{sen } 78^\circ\ 57' : AC$$
$$\text{sen } 53^\circ\ 29' : 184 :: \text{sen } 47^\circ\ 34' : AB$$

Si se hacen estas operaciones por logaritmos como sigue.

Log. 184	2,2648178
Log. sen $78^\circ\ 57'$.	9,9918727
Comp.aris.log.sen $53^\circ\ 29'$.	0,0949148
Suma ó log. AC.	~~1~~2,3516053

Log. 184	2,2648178
Log. sen $47^\circ\ 34'$	9,8680934
Comp.aris.log.sen $53^\circ\ 29'$.	0,0949148
Suma ó log. AB	~~1~~2,2278260

se hallará que AC es de 224 P, 7, y AB de 169 P.

180. Caso II. Si se conoce el lado AB, el lado BC y el ángulo C, se determinará el ángulo A calculando su seno por esta proporcion.

$$BA : \text{sen } C :: BC : \text{sen } A.$$

Pero es de reparar, segun diximos arriba (638), que el ángulo A no será determinado sino en quanto se sepa si ha de ser agudo ú obtuso.

Sea v. gr. AB de 37 P, BC de 68 P, y el ángulo C de $32^\circ\ 28'$, la proporcion será

$$37 : \text{sen } 32^\circ\ 28' :: 68 : \text{sen } A.$$

Se

Se hallará practicando lo que arriba, que este seno corresponde en las tablas á $80^\circ\ 36'$; pero como el seno de un ángulo es el mismo que el de su suplemento, no sabemos si ha de ser de $80^\circ\ 36'$, ó su suplemento $99^\circ\ 24'$; pero como se sepa que el ángulo cuyo valor se busca ha de ser agudo, se sabe entonces de fixo que en el caso actual ha de ser de $80^\circ\ 36'$, y la figura del triángulo es entonces *ABC*. Si al contrario hubiese de ser obtuso, será de $99^\circ\ 24'$, y la figura del triángulo será *CBD*. Fig.

673 Para inteligencia de lo que vamos á declarar acerca de los triángulos obliquángulos rectilineos, conviene saber que *la mayor de dos cantidades cuya suma es conocida, igualmente que su diferencia, es igual á la mitad de la suma mas la mitad de la diferencia; y la menor es igual á lo que queda despues de restar la mitad de la diferencia de la mitad de la suma.*

Si me consta, v. gr. que la suma de dos cantidades es 57, y su diferencia 17, inferiré que las dos cantidades son 37 y 20; añadiendo por un lado la mitad de 17 á la mitad de 57, y restando por otro lado la mitad de 17 de la mitad de 57.

Con efecto, una vez que la suma contiene la mayor y la menor de las dos cantidades, si á la suma se le agregara la diferencia, se transformará en el duplo de la cantidad mayor; luego la mayor de las dos cantidades vale la mitad del total, esto es, la mitad de la suma de las dos cantidades, mas la mitad de su diferencia.

Si

Fig. Si al contrario se restare de dicho total la diferencia, quedará el duplo de la cantidad menor, la qual por consiguiente valdrá la mitad de la resta; esto es, la mitad de la suma menos la mitad de la diferencia.

194. 674 En todo triángulo rectilineo *ABC* si desde el
195. uno de los ángulos se baxa una perpendicular al lado opuesto, siempre se verificará la siguiente proporcion.

El lado AC *sobre el qual ó sobre cuya prolongacion cae la perpendicular, es á la suma* AB+BC *de los otros dos lados, como la diferencia* AB—BC *de dichos dos lados es á la diferencia de los segmentos* AD *y* DC, *ó á su suma*, segun caiga la perpendicular dentro ó fuera del triángulo.

Desde el centro *B*, y con un radio igual al lado *BC*, trácese la circunferencia *CEGF*, y prolónguese el lado *AB* hasta que la encuentre en *E*. Entonces *AE* y *AC* son dos secantes tiradas desde un mismo punto fuera del círculo; luego por lo dicho (476), tendremos *AC* : *AE* :: *AG* : *AF*.

194. Pero *AE* es igual á *BA+BE*, ó *AB+BC*; *AG* es igual á *AB—BG*, ó *AB—BC*, y *AF* es igual á *AD—DF*, ó (349) á *AD—DC*; luego *AC* : *AB+BC* :: *AB—BC* : *AD—DC*. En la fig. 195 *AF* es igual á *AD+DF*, ó *AD+DC*. Tenemos, pues, en este caso *AC* : *AB+BC* :: *AB—BC* : *AD+DC*.

Luego si fueren conocidos los tres lados de un triángulo, se podrá sacar por esta proposicion el valor de los segmentos formados por la perpendicular tirada desde uno

de

de los ángulos al lado opuesto; porque entonces es conocida la suma *AC* de dichos segmentos, y la proporcion que acabamos de demostrar manifiesta su diferencia; porque en este caso los tres primeros términos de esta proporcion son conocidos; se conocerá, pues, cada uno de dichos segmentos por lo dicho (673). En la figura 195 es conocida la diferencia de los segmentos *AD* y *DC*, que es el lado mismo *AC*, y la proporcion determina el valor de su suma. Fig. 194.

675 Sentado esto, es facil resolver esta cuestion; *dados los tres lados de un triángulo, determinar los ángulos.*

Se supondrá tirada una perpendicular desde uno de dichos ángulos, de lo que resultarán dos triángulos rectángulos *ADB*, *CDB*. 194.

Por la proposicion antecedente se calculará uno de los segmentos, *CD* v. gr. y entonces en el triángulo rectángulo *CDB* serán conocidos dos lados *CD* y *BC* ademas del ángulo recto, y se sacará facilmente el ángulo *C*, por lo dicho (664).

Supongamos v. gr. que siendo el lado *AB* de 142 P, el lado *BC* de 64, y el lado *AC* de 184; se pide el ángulo *C*.

Se calculará la diferencia de los dos segmentos por esta proporcion; 184 : 142+64 :: 142−64 : *AD*−*DC*, ó 184 : 206 :: 78 : *AD*−*DC*, que vale 87,32; luego (673) el segmento menor *CD* vale la mitad de 184 menos la mitad de 87,32, quiero decir que vale 48,34.

Es-

Fig. Esto supuesto, en el triángulo rectángulo *CDB* se buscará el ángulo *CBD*, el qual, una vez conocido, dará á conocer el ángulo *C*; y para hallar dicho ángulo *CBD*, se hará esta proporcion (664), $BC : CD :: R : \text{sen}CBD$; esto es, $64 : 48,34 :: R : \text{sen}\,CBD$.

Por logaritmos

Log. 48,34	1,6843066
Log. del radio	10 . . .
Compl. arism. log. 64 . . .	8,1938200
Suma ó log. sen*CBD*	19,8781266

cuyo logaritmo en las tablas corresponde á $49° 3'$; luego el ángulo *C* es de $40° 57'$.

El caso de resolver un triángulo, conocidos que sean sus tres lados, puede ocurrir á menudo, quando se han de calcular muchos triángulos enlazados unos con otros.

676 *En todo triángulo rectilineo la suma de dos lados es á su diferencia, como la tangente de la mitad de la suma de los dos ángulos opuestos á dichos lados, es á la tangente de la mitad de su diferencia.*

196. Porque por lo dicho (671) tenemos $AB : \text{sen}\,C :: AC : \text{sen}\,B$; luego (192) $AB+AC : AB-AC :: \text{sen}\,C+\text{sen}\,B : \text{sen}\,C-\text{sen}\,B$; pero (657) $\text{sen}\,C+\text{sen}\,B : \text{sen}\,C-\text{sen}\,B :: \text{tang}\frac{C+B}{2} : \text{tang}\frac{C-B}{2}$; luego $AB+AC : AB-AC :: \text{tang}\frac{C+B}{2} : \text{tang}\frac{C-B}{2}$.

677 Sirve esta proposicion para resolver un triángulo quando se conocen dos lados, y el ángulo que causan.

Por-

Porque si conocemos v. gr. el ángulo *A*, tambien se conocerá la suma de los dos ángulos *B* y *C*, con restar el ángulo *A* de 180°. Luego tomando la mitad de la resta que de esta sustraccion resultare, y buscando su tangente en las tablas, tendremos con los dos lados *AB* y *AC*, supuestos conocidos, tres términos conocidos en la proporcion que acabamos de demostrar. Se podrá, pues, calcular el quarto término, el qual manifestará la mitad de la diferencia de los dos ángulos *B* y *C*. Siendo entonces conocida la semisuma y la semidiferencia de estos ángulos, se hallará el mayor (673), añadiendo la semidiferencia á la semisuma, y el menor restando la semidiferencia de la semisuma. Finalmente, siendo conocidos estos dos ángulos, se hallará facilmente el tercer lado por la proporcion demostrada (671). Fig.

Exemplo. Supongamos de 142 P el lado *AC*, *AB* de 120, y el ángulo *A* de 48°; se piden los dos ángulos *C* y *B*, y el lado *BC*.

Resto 48° de 180°, y restan 132° para la suma de los dos ángulos *C* y *B*, y por consiguiente su semisuma es 66°.

Hago esta proporcion; $142+120 : 142-120 :: \text{tang } 66° : \text{tang } \frac{C-B}{2}$, ó $262 : 22 :: \text{tang } 66° : \text{tang } \frac{C-B}{2}$.

Por

Fig.

Por logaritmos,

Log. tang 66°	10,3514169
Log. 22	1,3424227
Compl. arism. log. 262 . .	7,5816987
Suma ó log. tang. semidif. .	19,2755383

cuyo logaritmo en las tablas corresponde á 10° 41.′

Añadiendo esta semidiferencia á la semisuma 66°, y restándola despues de esta misma semisuma, tendremos lo que aquí sale

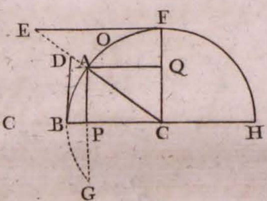
	66°	0′		66°	0′
	10	41		10	41
Ang. C	76°	41′	Ang. B	55°	19′

Finalmente, para hallar el lado BC se hará esta proporcion; sen C : AB :: sen A : BC; esto es, sen 76° 41 : 120 P :: sen 48° : BC.

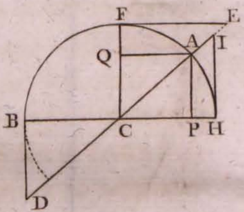
Practicando lo que en los exemplos propuestos, saldrá que BC vale 92 P 7.

GEO·

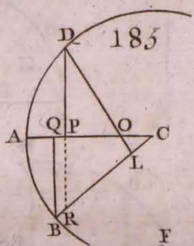
181



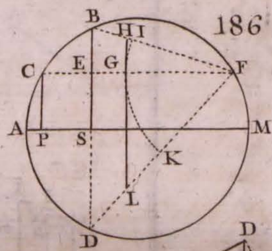
182



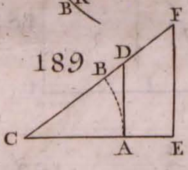
185



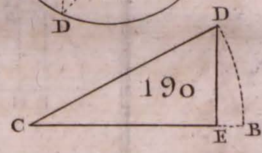
186



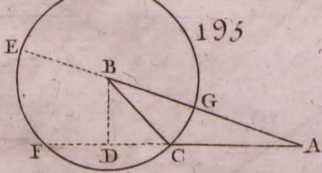
189



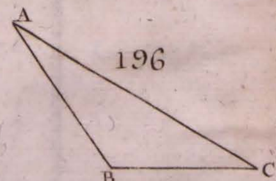
190

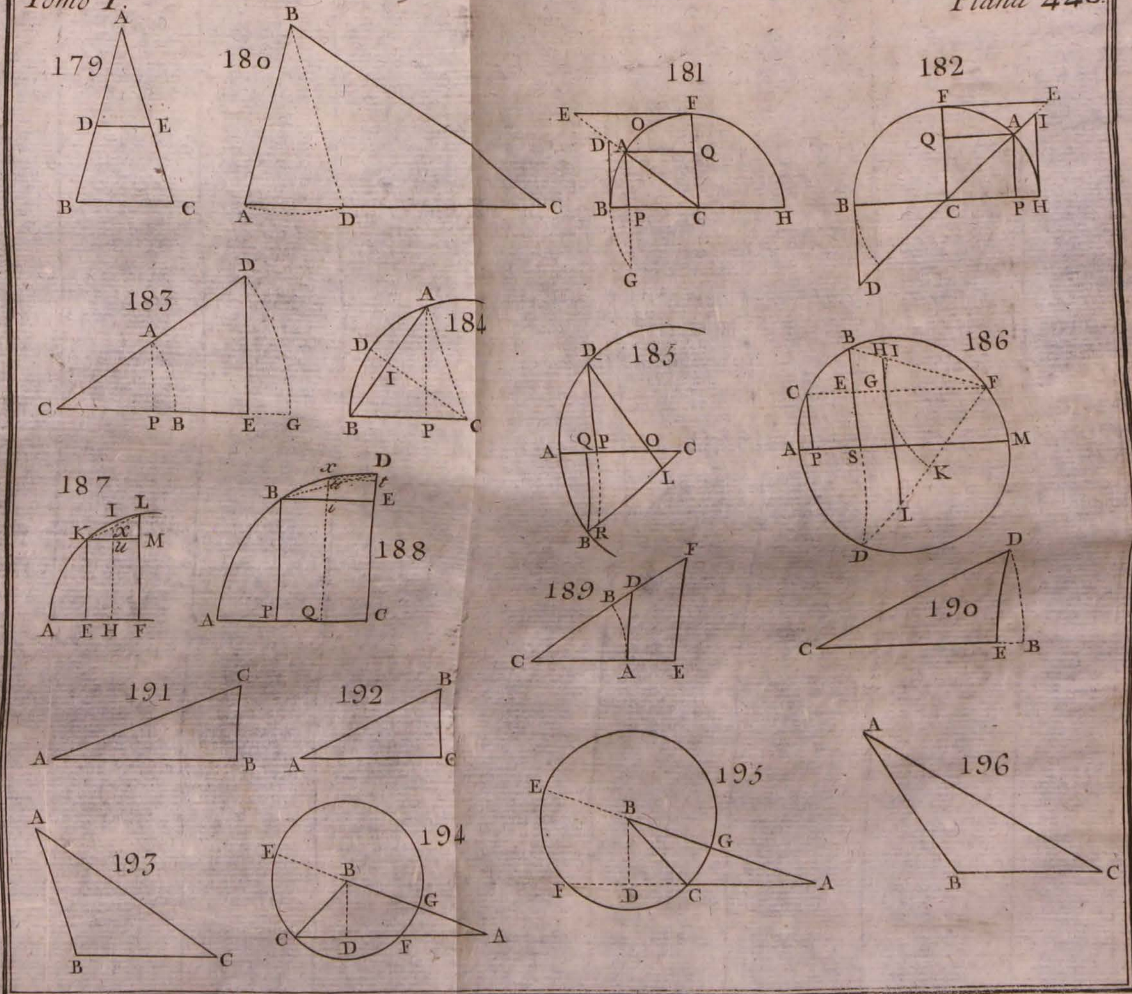


195



196




179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
194
195
196

GEOMETRÍA PRÁCTICA.

De las Medidas.

677 Aunque hemos declarado en los Elementos de Geometría quanto pertenece á la medida de la extension, nos toca ahora volver al asunto, no con la mira de gastar el tiempo en repeticiones inútiles, sino para contraer á casos prácticos lo que allí diximos, explicando de un modo abstracto las principales operaciones que pueden ofrecerse. Muy pocas dificultades encontraría en esta aplicacion el que tuviere presentes los principios especulativos en que se funda, si fuese posible saliesen tan cabales las operaciones que penden del exercicio de nuestros sentidos groseros, como las especulaciones geométricas en que se exercita nuestro entendimiento. Nos es forzoso en la práctica hacer uso de instrumentos que pocas veces y quasi nunca dán resultados tan rigurosos como los que saca la teórica; y á estos inconvenientes, que dimanan de la naturaleza de las cosas, se agrega otro, que bien que solo pende del capricho de los hombres, no dexa de ser de muchísima consideracion.

Consiste este inconveniente en la gran variedad de medidas que usan, no solo las diferentes naciones, sino tambien los varios pueblos de una misma nacion; siendo tan perjudicial al comercio esta variedad de medidas, como contraria á la puntualidad matemática. Para quitar

este inconveniente sería muy del caso una medida invariable, que por razon de esta circunstancia mereciera hacerse universal, cuya medida han buscado con mucho empeño varios matemáticos. Escusaremos por ahora dar noticia de las investigaciones en que se han empeñado con esta mira, por fundarse todas ellas en principios que no hemos tenido todavía lugar de declarar; pero entretanto manifestaremos algunas de las razones que hacen patente la necesidad de reducir á sola una todas las medidas conocidas, y la posibilidad de conseguirlo.

678 Si comerciar es trocar lo superfluo por lo necesario, todos los medios que facilitaren este cambio serán muy ventajosos para el comercio. En los trueques hemos de atender á ciertas razones, y particularmente á la razon que tienen las cantidades unas con otras, cuya razon se averigua con las medidas que á este fin se han inventado: quanto mas facil fuere conocerla, tanto menos embarazoso será el trueque, y por consiguiente tanto mas prontas, frecuentes y provechosas las operaciones del comercio. Para averiguar la razon de las cantidades que se han de cambiar, no hay medio mas sencillo y seguro que una medida fixa y universal.

679 En vano se nos opondrá, para eludir la fuerza de este argumento, que reducidas á la uniformidad todas las medidas, perderian muchos mercaderes la ganancia que se les sigue de la poca uniformidad que entre ellas se repara.

1.° Porque es imaginaria esta ganancia, ora se haga

el

el trato entre dos mercaderes, ora se haga entre un mercader y un particular. En el primer caso, como es para los que exercitan el trato un punto capital la reduccion de las medidas, y los mueve con igual estímulo el deseo de ganar, no cabe el que ignore ninguno de los dos lo que tanta cuenta le tiene saber, y serán ambos por lo menos igualmente diestros. Si se hiciere el trato entre un mercader y un particular, este compró el género por el peso y la medida que conoce; tan adelantado se halla como el mercader, y en su mano está no concluir un ajuste en que pueda quedar perjudicado. No resulta, pues, en ninguno de estos dos casos beneficio alguno de la variedad de las medidas.

2.° Pero concedamos, y puede suceder alguna vez, que alguno de los dos, el vendedor ó el comprador halle alguna ventaja en el trato, porque tenga un conocimiento mas puntual de las medidas ¿podrá ser legítimo este beneficio? Para que gane en un ajuste el que está mejor enterado de la razon de las medidas, es preciso que pierda el que no está igualmente impuesto en su correspondencia. En este caso el primero vende menos ó compra mas géneros por el precio ajustado, de lo que entiende comprar ó vender el otro con quien trata; es, pues, doloso é ilícito el trato. Finalmente, no puede ganar en la medida el uno de los dos, á no ser que haya mala fé, ó que el otro padezca en sus cálculos alguna equivocacion contraria á sus intereses.

Aun quando diéramos por lícita esta ganancia, y confesáramos que es para muchos un recurso, no podria el interes de este corto número preponderar respecto de la comodidad y ventaja que se les seguiría á todos los demas habitantes de un Reyno de la igualdad de las medidas, la qual escusaría una infinidad de reducciones siempre penosas, y en cuyos cálculos es muy facil padecer muchas equivocaciones. Sería sin duda alguna muy provechoso para los cambistas el que hubiese distinta moneda en cada ciudad y en cada calle; pero no por eso dexa de ser mas ventajoso para el público el que no haya en cada reyno mas que una moneda. Pensar lo contrario sería lo mismo que tener por útil al género humano la multiplicidad de lenguas, por la razon que si hablasen una misma todos los hombres, no necesitaríamos de intérpretes.

680 No basta, dicen algunos, que sea ventajoso reducir todas las medidas á la uniformidad; nada adelantamos si no se allanan las dificultades que forzosamente ha de encontrar esta reduccion. Nadie se persuadirá á que oficiales, labradores, jornaleros se convengan en desechar la medida á que están hechos desde su niñez por otra que se substituya en su lugar. El que esperare hallarlos con la docilidad en que debería afianzarse el beneficio de esta providencia, ignoraría á buen seguro quan rendido y obstinado obedece el vulgo al imperio de la costumbre. Fuera de que, la mayor parte de los derechos se pagan en frutos, y estos se miden con medida distinta en cada

pro-

provincia, y aun en cada partido. Si se admitiese una medida general, sería preciso alterar todos los títulos antiguos, cuya operacion encontraría muchas oposiciones, y no sería la menor la de las partes interesadas.

Pero si está patente el beneficio que se seguiría de usar sola una medida, no deben usarse muchas sino en el caso de haber una imposibilidad real en la reduccion: si esta no es mas que dificil, conviene procurar vencer los obstáculos que la estorban, y bastará quizá para conseguirlo considerarlas con algun cuidado. No sé yo que sea mas dificil introducir en un reyno una medida nueva, que dar curso á una nueva moneda, ó mudar el valor de la antigua; cuya operacion se ha executado varias veces.

681 Convengo sin embargo en que podria seguirse algun inconveniente de abrogar por una ley absoluta todas las medidas antiguas, mandando se hiciese uso de sola la nueva, antes que se les hubiese hecho, digámoslo así, familiar á los pueblos. Pero esta ley rigorosa no sería necesaria: se podrian dexar subsistir en cada provincia por un tiempo limitado las medidas antiguas, mandando que todas las ventas, arrendamientos, y todos los recibos, en que hubiese de intervenir el ministerio público de los Escribanos ó de los Tribunales, se hiciesen con arreglo á la medida antigua y á la nueva. A este fin deberian calcularse é imprimir tablas de reduccion, del mismo modo que hay aranceles para la reduccion de las monedas; y con el socorro de estas tablas, que al principio podrian darse de

valde, las reducciones, que hoy dia se executan entre los mercaderes de diferentes naciones y provincias, con imperfeccion y por medio de una operacion las mas veces dificultosa, se executarian en lo succesivo con igual facilidad que precision.

682 Podria tambien guardarse en las casas de Ayuntamiento, en las Aduanas, y en poder de los diferentes gremios de mercaderes y oficios un padron de las dos medidas, haciendo mencion de ambas en todos *los testimonios*, recibos é instrumentos públicos; con esto se irian enterando así los particulares como los mercaderes de la correspondencia entre la medida nueva y la antigua; y al cabo de algun tiempo, que la experiencia determinaría, podria mandarse, si se tuviese por conveniente, que no se hiciera mas memoria de la antigua; cuyo uso se perdería insensiblemente, sin que se le siguiese el menor perjuicio al comercio. Si al mismo tiempo se multiplicasen los modelos de la nueva medida, é hiciesen mas comunes y baratos que los de la antigua, se acostumbrarian poco á poco los particulares á usarla con preferencia en sus usos privados, vendria á ser en poco tiempo la nueva medida mas familiar que la otra, y por todos estos medios juntos se conseguiria quizá, sin intervencion de la autoridad Real, excluir de todo punto la medida antigua. Los vecinos de Ginebra han usado con tanta frecuencia de la vara de Francia, que sin providencia alguna han venido á abandonar insensiblemente la propia.

Pe-

683 Pero una vez que no exîste la medida universal, nos es preciso conocer las que están recibidas, las principales por lo menos, para la medida de la extension. Esto nos empeña en dar noticia de algunas de ellas, y señalar en lo que cabe la correspondencia que hay entre las unas y las otras.

Para excusar mucha parte de la confusion que podria ocasionar su multiplicidad, han escogido los matemáticos una medida á la qual suelen referir todas las demas. Esta, que en algun modo hace papel de medida universal, es el *pie de Rey* de París, sexta parte de la medida que los Franceses usan con nombre de *toesa*. Se divide, pues, la toesa en 6 pies, cada pie en 12 pulgadas, cada pulgada en 12 lineas, y en la linea se consideran 10 puntos.

683 Para facilitar el cotejo y reduccion que aquí nos ocupa, se supone que el pie frances tiene 1000 partes, de las quales en cada una de las medidas que expresa la tabla siguiente, caben las que están señaladas á su lado.

TABLA

De algunas de las principales medidas de extension de las Naciones de Europa.

Pie frances	1,000
Amsterdam, Olanda. Palmo, tercio del pie. . .	0,2875
Berlin, Prusia. Pie.	0,9535
Burgos, Castilla. Pie.	0,8571
Constantinopla, Turquía. Pic.	2,060

Copenhague, Dinamarca. Foot, pie.	0,966
Cracovia, Polonia. Pie.	1,0972
Estocolmo, Suecia. Pie.	0,9146
Lisboa, Portugal. Craveiro ó palmo.	0,6729
Londres, Inglaterra. Foot, pie.	0,9386
Moscou, Moscovia ó Rusia. Pie.	1,0299
Napoles, Italia. Palmo.	0,8090
Palermo, Sicilia. Pie.	0,7451
Petersburgo, Rusia. Pie.	1,0903
Rinlándico (Pie).	0,9667
Roma, Italia. Pie.	0,9170
Viena, Austria. Pie.	0,9732

Usos de la Tabla.

684 El valor del pie de Castilla es por la tabla 0,8571, lo que significa que siendo uno el pie frances, el pie castellano es $\frac{8571}{10000}$; ó, lo que es lo mismo, que un pie castellano vale 0,8571 partes del frances. Luego, si multiplico 1 y 0,8571 por 10, los productos 10 y 8,571 han de ser iguales; de donde se sigue que 10 pies castellanos valen 8,571 pies franceses. Por consiguiente, si adelanto la coma dos lugares ácia la derecha, y multiplico 1 por 100, sacaré 85,71 y 100, lo que significa que 100 pies castellanos valen 85,71 pies franceses; que si adelanto la coma tres lugares á mano derecha, saldrá 857,1 y 1000, lo que significa que 1000 pies castellanos valen 857,1 pies franceses; y finalmen-

mente, que si adelanto la coma quatro lugares á la derecha, los números 10000 y 8571 significarán que 10000 pies castellanos valen 8571 pies franceses.

Propongámonos averiguar quantos pies franceses hay en 24 pies castellanos.

Ya que un pie castellano vale por la tabla 0,8571 partes del pie frances, los 24 pies castellanos será el producto de 0,8571 por 24; hecha la multiplicacion, sale que en 24 pies castellanos hay 20,5704 pies franceses.

Busquemos ahora quantos pies castellanos hay en 35 pies franceses.

Como 0,8571 de pie frances componen 1 pie castellano, diré: si 0,8571 componen 1 ¿35 quantos compondrán?

$$0,8571 : 1 :: 35 : R = 40,830,$$

hallo que los 35 pies franceses valen 40,838 pies castellanos.

Quiero saber en 34 pies castellanos quantos pies ingleses hay.

Busco primero quantos pies franceses hay en los 34 castellanos, multiplicando 0,8571 por 34, sale el producto 29,1414; esto es, que los 34 pies castellanos son 29,1414 pies franceses. Todo está ahora en sacar quantos pies ingleses hay en los 29,1414 pies franceses; se dirá pues,

$$0,9386 : 1 :: 29,1414 : R = 31,04$$

y

y sale que los 34 pies castellanos no son sino 31,04 pies ingleses.

Lo mismo se puede practicar de otro modo que al cabo es lo mismo que acabamos de executar. Ya que 0,8571, pie castellano, es menor que 0,9386, pie ingles, en los 34 pies castellanos habrá menos pies ingleses. Luego al sentar los dos primeros términos de la proporcion que son 0,9386 y 0,8571, este ha de ser el segundo, será, pues,

$$9386 : 8571 :: 34 : R = 31,04.$$

Esto mismo está diciendo lo que se habria de hacer si se ofreciera averiguar quantos pies castellanos hay en 34 pies ingleses, la proporcion sería

$$8571 : 9386 :: 34 : R = 31,232.$$

De las Lineas.

685 Para executar las operaciones que acerca de las lineas y demas especies de extension pueden ocurrir, así en el papel como en el terreno, se han inventado varios instrumentos, cuya construccion nos toca declarar, para que se haga mas patente su utilidad, y se pueda comprobar su exâctitud. Pero como los usos para que sirven muchos de estos instrumentos, no se distinguen de las operaciones mismas para que se han inventado, dexarémos, para quando declarémos estas, manifestar como se han de manejar los instrumentos. Solo tratarémos separadamente del instrumento llamado *Compas de Proporcion ó Pantómetra*, por ha-

hacerle acreedor á esta especie de distincion la multitud de Fig.
operaciones, á qual mas importante, que con él se executan con suma facilidad.

De la Pantómetra.

686 La *Pantómetra* ó *Compas de Proporcion* es un instrumento que se compone de dos reglas *AB*, *CD* unidas 1.
por medio de una charnela ó gozne *E*, al rededor de cuyo centro se mueven desahogadas. En las reglas, que llamamos las piernas de la Pantómetra, van señaladas varias lineas, es á saber, las *lineas de las partes iguales*, *de las cuerdas*, *de los planos*, *de los polygonos*, *de los sólidos*, *y de los metales.*

687 Todos los usos del compas de proporcion se fundan en la proposicion siguiente.

Si en dos lineas AB, AC *que forman un ángulo qual-* 2.
quiera BAC, *se toman las lineas* AB, AC *iguales, y las lineas* Ad, Ae *tambien iguales, y se tiran las lineas* BC, de; *estas lineas transversales tendrán unas con otras la misma razon que los lados* AB, AC.

Porque, los triángulos *Ade*, *ABC* son ambos isósceles por construccion. Si de cada uno se resta el ángulo comun *A*, la suma de los dos ángulos *Ade*, *Aed* del primero será igual á la suma de los ángulos *ABC*, *ACB* del segundo (393). Pero cada una de las dos sumas consta de dos partes iguales (403); luego cada parte de la primera suma es igual á cada parte de la segunda; luego se-

Fig. será el ángulo *Ade* igual al ángulo *ABC*, y el ángulo *Aed* igual al ángulo *ACB*. Luego las lineas *de* y *BC* (334) son paralelas, y por consiguiente (451) *AB* : *BC* :: *Ad* : *de*, ó *BC* : *de* :: *AB* : *Ad*.

688 De aquí se infiere que si se toman las lineas *AB*, *Ad* en la razon que se quiera, habrá la misma razon entre las lineas *BC*, *de*. Por manera que si *Ad* es v. gr. los $\frac{2}{3}$ de *AB*, será tambien *de* los $\frac{2}{3}$ de *BC*. Si fuere *AB* el radio de un círculo, cuya cuerda de 40° sea *Ad*, será tambien *BC* el radio de un círculo, cuya cuerda de 40° será *de*. Si fuese *AB* el diámetro de un círculo duplo del círculo cuyo diámetro es *Ad*, será tambien *BC* el diámetro de un círculo duplo de otro círculo cuyo diámetro fuere *de* &c.

689 Como se puede abrir el compas de proporcion mas ó menos, segun se quiera, se le puede dar por medio de un compas comun, aplicando la una de sus puntas en *B* y la otra en *C*, á la distancia *BC* una longitud determinada; y estando así abierta la pantómetra, se hallará la distancia *de* que tendrá con *BC* la razon que se buscare.

De las Lineas de las partes iguales.

690 Las lineas de las partes iguales suelen estar divididas en 100 ó 200 partes iguales, siendo arbitrario dividirlas en el número de partes que se quiera, con tal que estén bien señaladas; quanto mayor fuere su número, tanto mas exâctas saldrán las operaciones que con ellas se executaren. Estas partes están divididas en el instrumento

con

con puntos, señaladas de 5 en 5 con un rasguillo, y de Fig.
10 en 10 con números.

Es lícito tomar, siempre que acomode, muchas de estas partes por una, ó una por muchas. Puedo tomar 10 por 1, en cuyo supuesto 20 será 2; puedo tomar 10 por 100, en cuyo caso 20 valdrá 200. Quando se hagan estos supuestos deberá darse á las partes que entre las divisiones hubiese el valor correspondiente al supuesto hecho.

Tomar una linea significa abrir el compas comun, de suerte que sus dos puntas caigan en los extremos de la linea que se ha de tomar. *Tomar un número* en la Pantómetra, es abrir el compas comun desde el centro del de proporcion hasta el tal número; y *llevar una linea* á dos números de la Pantómetra, como á 100 y 100, v. gr. es abrir la Pantómetra de manera que tomando con el compas comun una linea, y aplicando la una de sus puntas en el número 100 de la una pierna de la Pantómetra, la otra punta del compas comun caiga puntualmente en el número 100 de la otra pierna de la Pantómetra.

La figura 3 representa v. gr. que con el compas co- 3.
mun se toma la linea *AB*. En la figura 4 con el compas 4.
A se toma en la Pantómetra el número 70, y en la misma figura se vé tambien que descansando las puntas del compas *B* en los números 90 y 90 de la Pantómetra, se ha llevado á 90 y 90 una linea igual á la distancia que coge el compas comun abierto como está.

Sir-

Fig. 691 Sirven las lineas de las partes iguales 1.° para *dividir una linea dada en un número de partes iguales, el*
5. *que se quiera.* Si queremos dividir v. gr. la linea *AB* en siete partes iguales, llevarémos la linea propuesta á dos números que se puedan partir cabalmente por 7, v. gr. á 70 y 70; manteniendo la Pantómetra abierta como para esto se requiere, tomarémos el intervalo entre 10 y 10, cuyo intervalo será la séptima parte de la linea *AB*.

Porque la distancia desde el centro de la Pantómetra al número 10 es, por lo dicho (694), á la distancia desde el mismo centro al número 70, como el intervalo entre 10 y 10 es al intervalo entre 70 y 70; pero la primera de las dos distancias es, por la construccion del instrumento, la séptima parte de la segunda; luego será tambien el primer intervalo la séptima parte del segundo que se tomó igual á la linea *AB*. Luego dicho primer intervalo será la séptima parte de la linea *AB*.

692 Si la linea propuesta fuese tan larga que no pudiera caber entre las piernas de la Pantómetra, antes de todo se partiria la linea en muchas partes iguales á arbitrio; se tomaría despues la séptima parte de cada una, y sumando últimamente unas con otras estas séptimas partes, saldria la séptima parte de toda la linea.

693 Tambien se puede ofrecer *partir una linea en un número muy crecido de partes, v. gr. en* 100 *partes.*

En este caso se partirá la linea propuesta en un número de partes aliquotas de 100, esto es que quepan un

nú-

número cabal de veces en 100, v. gr. en 5, cada una Fig.
de las quales valdrá 20 respecto de 100, pues 20 veces 5 valen 100. Despues se dividirá cada una de las cinco partes en 2, y estará dividida la linea propuesta en 10 partes, pues la mitad de 20 es 10. Se dividirá cada una de estas partes, primero en 5, y despues en 2; y concluido esto, estará dividida la linea propuesta en 100 partes. Cada una de las partes que salieren de esta subdivision será, como se echa de ver, la décima parte de la décima parte de toda la linea, lo propio que su centésima parte.

694 2.° Se ofrece muy á menudo *determinar en un plan ó en un dibuxo quantas veces una medida determinada cabe en cada una de sus diferentes partes, en sabiendo quantas cabe en alguna de ellas.* Tambien se executa esta determinacion por las lineas de las partes iguales, conforme voy á declarar. Supongamos v. gr. que siendo la linea *AB* de 25 varas, se me pregunte quantas varas coge la linea *CD*. 6.

Llevo *AB* á 25 y 25; tomo despues la linea *CD*, y la llevo sobre la Pantómetra al traves, de modo que sus dos extremos descansen en un mismo número, v. gr. en 42 y 42; cuyo número determina el valor de la linea *CD*. Se demuestra la operacion como antes (697).

Si fuese la linea *AB* tan grande que no cupiese entre 25 y 25, se la llevaria á 50 y 50, en cuyo caso las divisiones del compas de proporcion representarian medias

Fig. dias varas; porque para representar con 12 unidades una cantidad que no tiene sino 6, es preciso que las tales unidades mengüen en la misma razon que crece el número con el qual las quiero expresar.

695 Para *hallar una quarta proporcional* DE *á tres*
7. *lineas dadas* AB, BC, AD, se coge con el compas comun la linea *AB*, se ponen sus dos puntas en la linea de las partes iguales, estando la una en el centro de la Pantómetra; se abre esta hasta que quepa en el intervalo de sus dos piernas la linea *BC*. Hecho esto, se lleva á la linea de las partes iguales la tercera linea *AD*; y el intervalo *DE* es la quarta proporcional que se busca.

696 Si *se buscara una tercera proporcional á las dos lineas* AB, BC, estará hecha la operacion con tomar *AD'* igual á *BC*, y será *D'E'* la tercera proporcional pedida. Qualquiera hallará despues de lo dicho (693) la razon de la operacion.

De la Linea de las cuerdas.

697 Señala la linea de las cuerdas las de un círculo cuyo diámetro coge de largo tanto como la Pantómetra, y el radio tanto como su mitad igual á la distancia que hay desde el centro del instrumento al número 60.

8. 698 Para *dividir la linea de las cuerdas*, se traza en un plano aparte un semicírculo cuyo diámetro *AB* coge de largo lo mismo que la Pantómetra. Se divide la semicircunferencia en grados; se toma succesivamente la distan-

tancia que hay entre el punto *A* y cada grado, y se lleva Fig.
con el compas comun esta distancia al compas de proporcion, poniendo siempre la una punta de aquel en el centro de este; resultan de aquí las divisiones de la linea de las cuerdas, en la qual la distancia desde el centro á 60, cuerda de un arco de 60°, es igual al radio del círculo (446).

699 Por medio de las lineas de las cuerdas se puede 9.

I. *Formar en el punto* A *de una recta dada* AB *un ángulo de un número determinado de grados, de* 30° *v. gr.*

Desde el centro *A*, y con un intervalo arbitrario se trazará el arco *EF*. Se abrirá la Pantómetra hasta que el intervalo *AE* quepa entre 60 y 60. Estando así abierto el instrumento, se tomará con el compas comun la distancia entre 30 y 30, se la llevará al arco *EF* desde *E* hasta G, por cuyo punto se tirará la *AG*, y serán la cuerda *EG*, el arco *EOG* y el ángulo *EAG* de 30°.

Supongamos, para dar la razon que sea *BAC* la Pantómetra abierta conforme hemos encargado, y que en *B* y *C* 2.
están los números 60 y 60, y en *d* y *e* los números 30 y 30. Los dos triángulos *ABC*, *Ade* son semejantes (459); luego *Ad* : *AB* :: *de* : *BC*; y por consiguiente si fuese *AB* el radio del círculo ó la cuerda de 60°, será *Ad* la cuerda de 30°; y si fuese *BC* el radio, será *de* la cuerda de 30°.

700 II. *Formar con las lineas de las cuerdas, abrien-*

Fig. *do la Pantómetra, un ángulo de un número determinado de grados, v. gr. de 30°.*

Se tomará con el compas comun en la Pantómetra la cuerda de 30°, se la llevará desde 60 á 60, y formarán las lineas de las cuerdas un ángulo de 30°.

Porque la cuerda de 60° es igual al radio del círculo (446), cuyas son las cuerdas señaladas en el instrumento. Luego los dos radios que en dicho círculo pasaren por los extremos de la cuerda de 30° formarán un ángulo del mismo número de grados; pero con llevar desde 60 á 60 la cuerda de 30°, se hace que pasen por sus extremos dos radios del círculo, cuyas son las cuerdas de la Pantómetra; luego &c.

701 Lo mismo se practicará para *abrir la Pantómetra de manera que las lineas de las partes iguales formen un ángulo qualquiera, v. gr. de 30°.*

No hay mas diferencia sino que haciendo la operacion con estas lineas se ha de llevar la cuerda de 30° desde 100 á 100; porque siendo el largo de la Pantómetra el diámetro del círculo, cuyas son las cuerdas en ella señaladas, la mitad será su radio, cuya mitad en la linea de las partes iguales está en 100.

702 III. *Estando abierta la Pantómetra, determinar que ángulo forman las lineas de las cuerdas ó de las partes iguales.*

Para averiguar el ángulo que forman las lineas de las cuerdas, se tomará con el compas comun el intervalo entre

60

60 y 60, se lleva la linea de las cuerdas, poniendo una punta del compas comun en el centro de la Pantómetra; el número de la linea de las cuerdas que encuentra la otra punta, determina lo que se busca. Fig.

Si se busca el ángulo que forman las lineas de las partes iguales, se toma la distancia entre 100 y 100, y se practica lo propio que con la distancia entre 60 y 60 de la linea de las cuerdas.

703 IV. *Hallar el valor de un arco* AB.

Se lleva el radio *CA* á 60 y 60, y dexando la Pantómetra abierta como para esto se requiere, se toma el intervalo *AB*; se le lleva á la linea de las cuerdas al través, de forma que sus dos extremos caigan sobre un mismo número en cada pierna de la Pantómetra, v. gr. sobre 40 y 40; será el arco *AB* de 40°. 10.

704 V. *Hallar el radio de un círculo dada la cuerda* AB *de un arco suyo de un número determinado de grados, como de* 50°.

Se llevará la cuerda *AB* á 50 y 50, y se tomará el intervalo entre 60 y 60; este será el radio del círculo. En virtud de esto, desde los centros *A* y *B*, y con el expresado intervalo, se trazarán dos arcos, los quales se cortarán en C, donde estará el centro del círculo. 11.

705 VI. *Trazar sobre la linea* AB *un polygono regular, v. gr. un pentágono.*

Se dividirán 360° por 5, saldrá el cociente 72; se buscará, practicando lo que acabamos de declarar (704), 12.

 el

Fig. el centro del círculo cuya cuerda de 72° sea la linea *AB*; con llevar esta linea sobre la circunferencia del círculo, la partirá en 5 partes iguales.

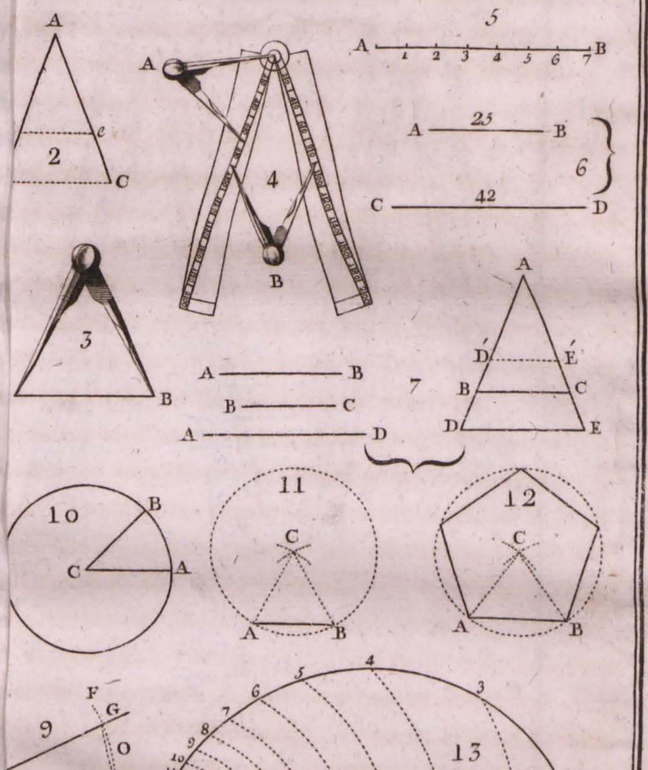
De la Linea de los polygonos.

706 En la linea de los polygonos están señalados los lados de los polygonos regulares, hasta el dodecágono, inscriptos en un círculo, cuyo diámetro es igual á lo que coge de largo la Pantómetra, y el radio á la distancia desde el centro del instrumento al punto de la linea de los polygonos donde está el número 6.

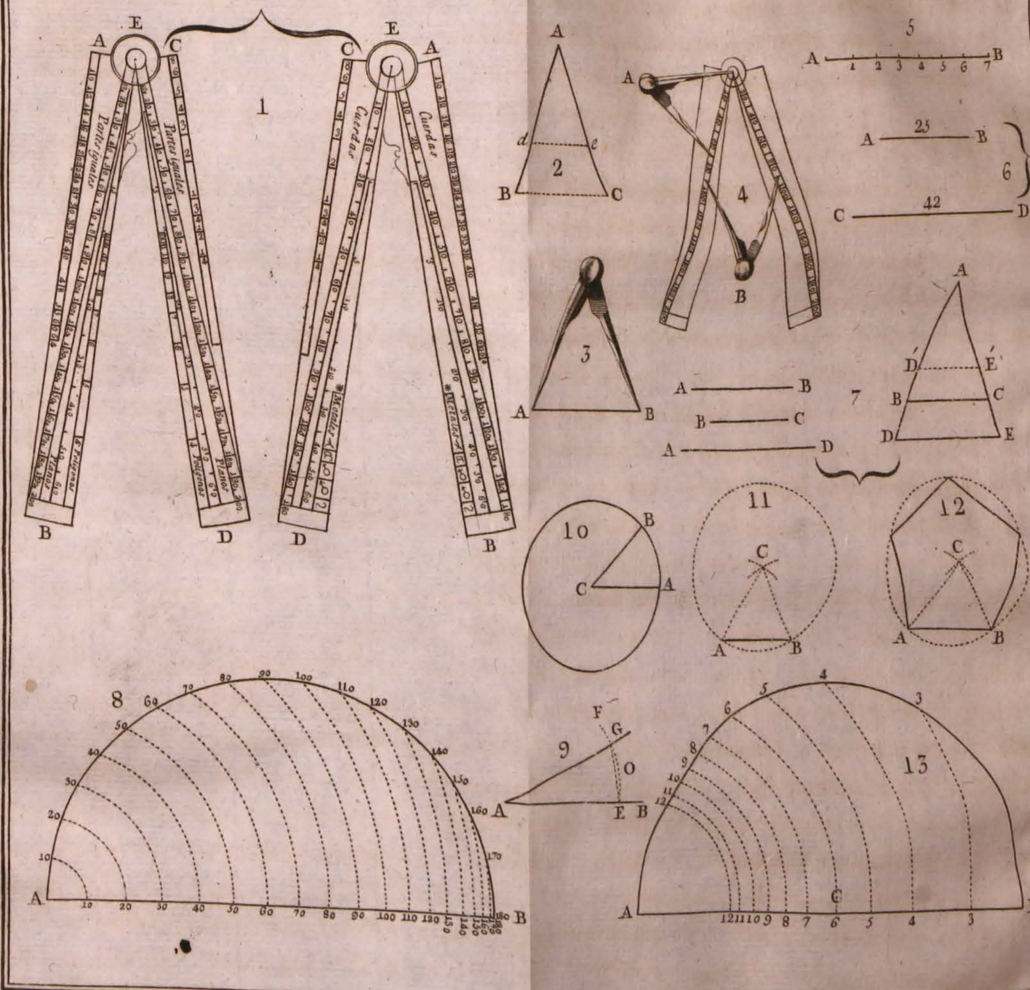
707 Señálanse las divisiones de esta linea, con poca diferencia, del mismo modo que las de la linea de las cuer-
13. das, para cuyo fin se traza un círculo con un radio *CA* igual á la mitad de la Pantómetra; se divide la circunferencia por el método que se declarará mas adelante en 3, 4, 5, 6, 7 &c. partes iguales, de suerte que sea *A*3 el tercio de la circunferencia, *A*4 el quarto, *A*5 el quinto &c. Se llevan los intervalos *A*3, *A*4 &c. á la linea de los polygonos, poniendo la una punta del compas comun en el centro del de proporcion. Concluido esto, está executada la division de la linea de los polygonos, en la qual se echa de ver que la distancia desde el centro al punto 6, igual al lado del exágono, es igual al radio del círculo. Sirve la linea de los polygonos

708 I. Para *inscribir en un círculo dado un polygono regular.*

Se


2
3
4
5
6
7
9
10
11
12
13
A
B
C
D
E
25
42
1 2 3 4 5 6 7
12 11 10 9 8 7 6 5 4 3

Tomo 1. Plana. 468.



Se lleva el radio *CA* del círculo propuesto de 6 á 6; Fig.
y estando abierta como para esto se requiere la Pantóme- 12.
tra, si se quiere inscribir un pentágono, se toma el intervalo entre 5 y 5, y llevándole al rededor de la circunferencia, queda esta dividida en cinco partes iguales.

709 II. Para *describir sobre una linea dada* AB *un* 14.
polygono regular, v. gr. un eptágono.

Llévese la linea *AB* á 7 y 7; tómese despues el intervalo entre 6 y 6; este será el radio del círculo, respecto del qual será *AB* el lado del eptágono inscripto.

Usos de la Pantómetra para la Trigonometría.

710 Pueden servir las lineas de las partes iguales, y de las cuerdas para la resolucion de los triángulos rectilineos; pero para esto es preciso 1.° Que en la linea de las cuerdas estén señaladas las cuerdas de todos los grados hasta la del arco de 180°, mitad de la circunferencia. 2.° Que sean de igual longitud las lineas de las cuerdas y las de las partes iguales; y si se quiere que concuerden las cuerdas con las de las tablas de los senos, es indispensable que la linea de las partes iguales esté dividida en 200, á fin de que su mitad, que es el radio, tenga 100. 3.° Es tambien preciso que las lineas de las partes iguales formen una con otra el mismo ángulo que las lineas de las cuerdas; es muy cómodo que este ángulo sea de un número cabal de grados, v. gr. de 8 ó 10°. El uso

Fig. de estas lineas para la Trigonometría se funda en las dos proposiciones siguientes.

15. 711 I. *Con abrir de varios modos las lineas de las partes iguales, se puede formar qualquiera especie de triángulos como el triángulo* ABC, en el qual el lado *AC* está en la una de las piernas, *CB* en la otra, y el tercero *AB* es la distancia que hay entre el extremo del uno de los primeros lados al extremo del otro.

16. 712 II. *Todo triángulo* ABC *puede ser inscripto en un círculo* (402); entonces el lado *AB* es la cuerda del arco *ADB*, duplo del ángulo opuesto (372), los lados *AC*, *BC* son tambien cuerdas de arcos duplos de los ángulos opuestos *B* y *A*.

Sentado esto, es muy facil de entender lo que se practica con la Pantómetra para la resolucion de los quatro casos que vamos á proponer de la Trigonometría rectilinea.

713 I. CASO. *Dados los tres lados de un triángulo, hallar los ángulos.*

17. Sea el triángulo propuesto *ABC*, cuyo lado *AC* es de 100 varas, *AB* de 80, y *BC* de 60 ¿qual será el valor de los ángulos?

Para hallar el ángulo *A*, tomo con el compas comun en la linea de las partes iguales el intervalo de 60 partes, valor de *BC* opuesto al ángulo *A*; manteniendo el compas comun abierto como está, pongo la una de sus puntas en el punto 80 de la linea de las partes iguales, abro la Pantómetra hasta que la otra punta del compas caiga sobre

bre 100; mido despues el ángulo que forman las lineas Fig.
de las partes iguales, hallo que es de 37°, y este es el valor del ángulo *A*. Lo propio se practicará para hallar el valor del ángulo *B*, que será de 90°; y tomando el suplemento de los ángulos *A* y *B*, saco para valor del ángulo *C* 53°.

714 II. CASO. *Dados dos de los lados de un triángulo, y el ángulo que forman, hallar el tercer lado.*

Sea el triángulo propuesto *ABC*, cuyo ángulo *A* es 18.
de 40°, el lado *AB* de 55 varas, y el lado *AC* de 63; ¿qual será el valor de la base *BC*?

Abrase la Pantómetra de modo que las lineas de las partes iguales formen un ángulo de 40° (701): tómese en las mismas lineas el intervalo desde 55 á 63; búsquese en una de las lineas de las partes iguales el valor de este intervalo, se hallará ser 41 el valor de la base *BC*. En conociendo por este medio los tres lados, facil será hallar el valor de los demas ángulos (712).

715 III. CASO. *Dados dos lados de un triángulo, y el ángulo opuesto al uno de ellos, hallar el otro lado.*

Sea el triángulo propuesto *ABC*, cuyo lado *AB* es 19.
de 75 varas, *BC* de 55, y el ángulo *A* de 45° opuesto al lado *BC*, ¿qual será el valor del lado *AC*?

Abrase el compas de suerte que las lineas de las partes iguales formen un ángulo de 45°; tómese con el compas comun el intervalo de 55 partes, y manteniéndole así abierto, póngase la una de sus puntas en 75, la otra caerá en $37\frac{1}{2}$

Fig. si fuese obtuso el ángulo C, ó en 69 si fuese agudo, cuyos números expresarán respectivamente los valores del lado Ac ó AC, segun fuere el caso.

716 IV. CASO. *Dado en el triángulo* ABC *el lado*
20. AB *de* 82 *varas, y los ángulos adyacentes, es á saber, el ángulo* A *de* 47°, *y el ángulo* B *de* 63°, *hallar los demas lados.*

Si se toma el suplemento de los ángulos A y B, saldrá el ángulo C de 70°. Tómese en la linea de las partes iguales el intervalo del lado AB de 82 varas, y llévesele sobre las lineas de las cuerdas desde 140 á 140, duplo del ángulo C opuesto á 82; tómese despues el intervalo entre 94 y 94, duplo del ángulo de 47°, y llévesele sobre las partes iguales; se hallará ser $63\frac{1}{2}$ el valor del lado opuesto BC. Del mismo modo sacaríamos que el lado AC es de $77\frac{2}{3}$ varas.

Fúndase la operacion en que los lados de un triángulo son cuerdas (711) de arcos duplos de los ángulos á que son opuestos, por lo que, el triángulo ABC nos dará la siguiente proporcion para hallar el lado BC.

La cuerda de un arco de 140°, duplo del ángulo C,
Es á la cuerda de un arco de 94° duplo del ángulo A,
Como el lado AB de 82 varas opuesto á C
Es al lado BC opuesto al ángulo A.

De las Lineas de los planos.

717 Llamamos *Lineas de los planos* las que están se-

señaladas en la Pantómetra de manera que representan los Fig.
lados homólogos de las figuras planas semejantes. Para enterarse bien del artificio con que están divididas estas lineas, es del caso saber primero como se reducen dos ó muchas figuras semejantes dadas á una sola que valga su suma, y sea semejante á las figuras propuestas.

718 Para executarlo, se han de determinar los lados homólogos de las figuras semejantes, cuya suma se busca. Se disponen dos *AB*, *AC* de modo que formen un 21.
ángulo recto *BAC*; la hypotenusa *BC* será el lado homólogo de la figura semejante, igual (517) á la suma de las dos propuestas.

Si se buscase la suma de tres figuras semejantes, despues de hallado el lado *BC*, se levantará la perpendicular *CD* igual al lado homólogo de la tercer figura, y se tirará la hypotenusa *BD*, la qual será el lado homólogo de la figura semejante é igual á la suma de las tres propuestas.

719 Sentado esto, no hay dificultad alguna para alcanzar como se trazan y dividen en la Pantómetra las lineas de los planos. Se trazan dos lineas que concurran en el centro del instrumento; y empezando desde allí, se dividen señalando con la unidad la primera division que representa el lado del primer quadrado y el menor de todos: la segunda division se señala 2, y representa el lado de un quadrado duplo; y prosiguiendo á este tenor la serie de los números naturales, se van señalando los lados

Fig. dos de los quadrados en que cabe el primero ó menor, dos, tres, quatro &c. veces. Por medio de las lineas de los planos se puede

720 I. *Aumentar ó disminuir una figura plana en una razon dada,*

Si la figura propuesta fuese regular, como un quadrado, un pentágono, un círculo, un triángulo equiláte-ro, bastará hallar el lado de la figura que se busca. Supongamos que se me ofrezca aumentar un quadrado en la razon de 4 á 9; llevo el lado del quadrado propuesto desde 4 á 4 en la linea de los planos: el intervalo entre 9 y 9 señalará el lado del quadrado que tendrá con el propuesto la razon de 9 á 4.

Porque las lineas transversales tienen unas con otras la misma razon que las laterales (687); pero las lineas 4 y 9 son los lados de los quadrados entre los quales hay la razon de 4 y 9; luego serán tambien las lineas transversales lados de quadrados entre los quales habrá la misma razon.

Si la figura propuesta fuese irregular; como sería indispensable hallar muchos lados para trazar la figura semejante que se busca, se repetirá tantas veces la operacion quantos fueren sus lados.

721 II. *Dadas dos figuras semejantes, hallar la razon que hay entre ellas.*

Sean las figuras propuestas dos pentágonos regulares, 22. cuyos lados son *AB*, *CD*. Tómese el lado *AB* del pentá-

tágono mayor, y llévesele á uno de los mayores números Fig.
de la linea de los planos, v. gr. á 60 y 60; tómese despues el lado *CD* del segundo, y póngase al traves sobre la misma linea, de suerte que sus extremos caigan sobre una misma division, v. gr. sobre 40 y 40; la superficie *F* del segundo pentágono será á la superficie *E* del primero, como 40 es á 60, ó como 2 á 3; quiero decir que será sus dos tercios.

De la Linea de los sólidos.

722 Despues de lo dicho acerca de la linea de los planos, es facil adivinar para que usos sirve la linea de los sólidos, y las divisiones que van en ella señaladas. Contiene esta linea los lados homólogos de sólidos semejantes que todos son múltiplos del primero ó menor, el qual se toma por unidad, segun la serie de los números 2, 3, 4 &c. hasta el número 64, el último que por lo comun se señala en la linea de los sólidos.

723 Para señalar las divisiones de esta linea se toman en una escala 1000 partes para el lado del sólido 64, el mayor que cabe en la Pantómetra. Muy en breve declararemos la construccion y los usos de las escalas. Se toma el número de 1000 partes iguales con el fin de que salgan mas fáciles y cabales las divisiones indispensables para señalar los lados de los demas sólidos.

Por ser 4 la raiz cúbica de 64, y 1 la raiz cúbica de 1, ha de caber en el lado que se toma para el só-

li-

Fig. lido 64, quatro veces el lado del primer sólido, que es el menor de todos, cuyo lado será por consiguiente de 250 de las 1000 partes iguales. Porque ya que hay entre los sólidos semejantes la razon de los cubos de sus lados homólogos (625), serán sus lados homólogos unos con otros como las raices cúbicas de los números que expresan dichos sólidos; luego el lado del sólido 64 será al lado homólogo del sólido 1, como la raiz cúbica de 64 á la raiz cúbica de 1; esto es, como 4 á 1.

Para hallar el lado del octavo sólido, ó del sólido ocho veces mayor que el primero, se tomarán 500 partes de la escala; esto es dos veces mas que para el lado del cubo 1. Porque el lado del sólido ocho veces mayor que el primero, ha de ser al lado de este como la raiz cúbica de 8 á la de 1, esto es, como 2 á 1; luego el lado del sólido semejante al primero, y ocho veces mayor que él, ha de tener 500 partes de la escala.

Por la misma razon 750 de estas partes expresarán el lado del sólido 27 veces mayor que el primero, pues 750 es triplo de 250, y en el cubo de 3 cabe 27 veces el cubo de 1.

Lo dicho manifiesta quan facilmente se señalan todas estas divisiones en la linea de los sólidos; la dificultad está en señalar las que expresan los lados de los sólidos duplos, triplos, &c. del primero; porque como sus raices son incomensurables, no es posible hallar su valor cabal. Pero se pueden hallar por aproximacion cabales

quan-

quanto basta para las operaciones de la práctica. Fig.

724 Propongámonos hallar el lado del sólido semejante duplo del primero. Formaremos el cubo 15625000 de 250 lado del primer sólido; del duplo 31250000 del tal cubo sacaremos la raiz cúbica, que es 315 con corta diferencia, cuyo número expresará el lado del sólido duplo. Porque una vez que los sólidos semejantes son unos con otros como los cubos de sus lados homólogos, será duplo de otro sólido semejante aquel cuyo lado cubicado tuviere por expresion un número duplo del que expresare el cubo del lado homólogo del primero.

Sentado esto, ya podemos declarar las operaciones que se executan con la linea de los sólidos.

725 I. Con ella se pueden *aumentar ó disminuir los sólidos en la razon que se quiera; formar v. gr. un cubo duplo de otro.*

Se llevará el lado del cubo propuesto sobre unos números tomados á arbitrio, v. gr. sobre 20 y 20. Estando abierta la Pantómetra como para esto se requiere, se tomará el intervalo entre 40 y 40, número duplo del primero; este intervalo será el lado del cubo que se busca.

Si se me pidiera una esfera tripla de otra, llevaría el diámetro de la esfera desde 20 á 20, v. gr. el intervalo entre 60 y 60 sería el diámetro de la esfera que se me pidió.

726 La operacion se executaría al reves si se tratase de disminuir los sólidos en razon dada. Y si los lados

ho-

Fig. homólogos de los sólidos fuesen de tanta longitud, que no cupiesen entre las piernas de la Pantómetra, se tomaría su mitad, su tercio, &c. y lo que saliera sería la mitad, el tercio, &c. de la dimension que se buscare.

727 II. Se puede *hallar que razon hay entre dos sólidos dados.*

Se llevará á la linea de los sólidos el lado de un sólido entre dos números, los que se quiera ó mas acomoden; despues se mirará á que intervalo corresponde el lado del otro sólido semejante. Los números á que correspondieren dichos lados homólogos expresarán la razon que hubiere entre los dos sólidos propuestos.

728 III. *Dados muchos sólidos semejantes, hacer otro sólido semejante é igual á la suma de todos.*

Se tomará entre los sólidos dados uno á arbitrio, y con el compas comun uno de sus lados, el qual se llevará á los números que se quiera de la linea de los sólidos, v. gr. á 5 y 5. Manteniendo abierta la Pantómetra como para esto se requiere, se mirará á que números correspondan los intervalos que cojan respectivamente los lados homólogos de los demas sólidos, y supondremos que correspondan á los números 7 y 8. Júntense en una suma los números 7, 8 y 5, que expresan la razon de los sólidos propuestos; el intervalo que hubiere entre los números 20 y 20 que expresan dicha suma, será el lado del sólido semejante é igual á la suma de los tres propuestos.

IV.

729 IV. *Hallar un sólido semejante á otros dos* Fig.
desiguales entre sí, é igual á la diferencia que hay entre ellos.

Llévese un lado de qualquiera de los dos sólidos sobre dos números de la linea de los sólidos, los que se quiera v. gr. sobre 5 y 5; mírese á que números corresponde el lado homólogo del otro sólido, supondremos que corresponda á los números 9 y 9; se restará el número menor del mayor; se cogerá el intervalo que hubiere entre 4 y 4, cuyo número expresa la diferencia, y este intervalo será el lado homólogo del sólido que se busca semejante é igual á la diferencia de los dos propuestos.

730 Se le añade á la Pantómetra una linea llamada *Linea de los Calibres*, la qual sirve para conocer el diferente peso de las balas de Artillería. Por calibre de los cañones entienden los Artilleros el diámetro de la boca de dichos cañones, cuyo calibre siempre es algo mayor que el diámetro de la bala, á fin de que pueda salir mas fácilmente de la pieza, y no se lo estorbe demasiado el rozamiento. El calibre de un cañon que ha de arrojar balas de 33 libras, cuyo diámetro es de 6 pulgadas $\frac{15}{32}$ de linea, ha de ser de 6 pulgadas 3 lineas y $\frac{12}{32}$ de linea, y por consiguiente el calibre de un cañon de 33 tiene 3 lineas con poca diferencia mas que el diámetro de la bala. Las demas piezas tienen tambien su calibre proporcionado al diámetro de las balas que han de arrojar.

731 Para señalar las divisiones de la linea de los ca-

li-

Fig. libres, es preciso saber quanto pesa una bala de artillería de un diámetro determinado, á fin de que sirva de término de comparacion.

Supongamos que una bala de hierro colado del peso de 4 libras tenga 3 pulgadas de diámetro; los diámetros de las balas del mismo metal y de distinto peso se hallarán del modo siguiente. Se abrirá la Pantómetra hasta que de pierna á pierna haya un intervalo de 3 pulgadas entre los números 4 y 4 de la linea de los sólidos. Manteniendo el instrumento en esta situacion, se cogerán con un compas los intervalos de entre todos los números de las lineas de los sólidos, como de entre 1 y 1, entre 2 y 2 &c. llevándolos todos sobre una linea trazada en la Pantómetra; y donde rematare cada uno de ellos se señalará el número de la linea de los sólidos al qual correspondiere.

Para señalar en la misma linea los quebrados $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ de libra, se practicará lo siguiente. Tómese una bala de hierro de una libra, llévese su diámetro á la linea de los sólidos entre 4 y 4; el intervalo de entre 1 y 1 será el diámetro de una bala de $\frac{1}{4}$ de libra; el intervalo de entre 2 y 2 será el diámetro de una bala del peso de $\frac{2}{4}$ ó $\frac{1}{2}$ de libra &c.

De la Linea de los Metales.

732 Los metales que conocemos no son todos de igual peso, y un volumen determinado, un pie cúbico v.gr. de

de oro, pesa mas que un pie cúbico de plata; de donde Fig.
resulta que estos dos metales no son de una misma gravedad específica, por haberse convenido los Matemáticos en llamar cuerpos de distinta gravedad específica aquellos que teniendo un mismo volumen son de peso diferente. La causa de pesar un cuerpo mas que otro de igual volumen, consiste en que tiene mas materia propia ó mas partes que el segundo; porque lo que pesa en los cuerpos son las partes materiales de que se componen, y no los intersticios ó poros que entre estas hay, hora estén llenas de ayre ú otro fluido, hora estén vacíos, cuyo punto á nosotros no nos toca indagarle. Consiste, pues, el mayor peso de un cuerpo en que contiene mayor número de partes que no otro de igual volumen, con el qual se le compara; y como esto no puede ser sin que las tenga mas inmediatas unas á otros, y separadas por menos y menores intersticios, la mayor gravedad específica de un cuerpo consiste en que sea mas compacto ó mas *denso* que los demas con que le comparamos; usándose en la Matemática la voz *densidad* para expresar el mayor número de partes respecto de un volumen determinado.

733 Tienen, pues, los metales mas ligeros que el oro menos densidad, ó sus partes mas separadas que no este metal. Por consiguiente un cubo v. gr. de estaño de igual peso que un cubo de oro, cogerá mas espacio, ó será de mayor volumen que un cubo de oro; y de volumen tanto mayor quanto menor fuese la densidad del estaño respecto

Fig. de la del oro. Y como, segun llevamos dicho (731), y se prueba en la Mecánica, la densidad y la gravedad específica son una misma cosa, serán los volúmenes de dos sólidos semejantes de igual peso y de distintos metales en razon inversa de sus densidades ó gravedades específicas, y serán tambien las gravedades específicas en razon inversa de los volúmenes. Pero los volúmenes de los cuerpos son (625) como los cubos de sus lineas homólogas; serán, pues, las gravedades específicas en razon inversa de los cubos de las lineas homólogas de los cuerpos.

734 En esto se funda la division de la linea de los metales señalada en la Pantómetra, cuya linea está dividida en la proporcion de los lados homólogos de los cuerpos semejantes de peso igual hechos de diferentes metales. Supongamos que se conozcan las gravedades específicas de los metales, quiero decir que sepamos quanto pesa un pie cúbico de cada uno, y que con ellos se hagan sólidos semejantes de igual peso, v. gr. esferas; que el diámetro de la bola de estaño, el mas ligero de los metales, esté dividido en 1000 partes iguales, y que se busque quantas de estas partes cabrán en el diámetro de una bola de oro del mismo peso.

Ya que las esferas se han unas con otras (625) como los cubos de sus diámetros, serán los volúmenes de dichas bolas, ó los cubos de sus diámetros, en razon inversa de su gravedad específica; de donde sacaremos la siguiente analogía:

Co-

Como la gravedad específica del oro Fig.
Es á la gravedad específica del estaño,
Así el cubo del diámetro de la bola de estaño
Es al cubo del diámetro de la bola de oro.

De donde resulta, que para hallar el diámetro de la bola de oro del mismo peso que la de estaño, se ha de multiplicar la gravedad específica del estaño por el cubo del diámetro de la bola del mismo metal, dividir el producto por la gravedad específica del oro, y sacar la raiz cúbica del cociente.

Por el mismo método se hallarán los diámetros de las bolas de los demas metales de igual peso que la de estaño.

735 Se tira, pues, una linea recta en la Pantómetra desde su centro hasta el extremo; se la divide en 1000 partes iguales, porque suponemos que tiene otras tantas el diámetro de la bola de estaño; se busca por el método expresado quantas de estas partes corresponden á los diámetros respectivos de las bolas de los demas metales de igual peso que la de estaño; y llevando estas partes á la Pantómetra con el compas comun, poniendo la una punta de este en el centro del instrumento, se pone en el punto donde remata la otra punta, la señal característica del metal correspondiente. Siguiendo esta práctica se halla que siendo de 1000 partes el diámetro de la bola de estaño, corresponden á los diámetros de las bolas del mismo peso hechas de los demas metales, las que expresa la tabla si-

Fig. guiente, donde van los caracteres con que se distinguen los metales unos de otros.

Oro	☉	730
Plomo	♄	863
Plata	☾	894
Cobre	☿	937
Hierro	♂	974
Estaño	♃	1000

En cuya tabla es de reparar que están los metales tanto mas cerca del centro del instrumento, quanto mayor es su gravedad específica, y se puede inferir de lo dicho antes (732).

736 Sirve la linea de los metales, I. para *hallar un globo del metal que se quiera de peso determinado, en conociendo un globo de otro metal y su diámetro.*

Sea el diámetro de una bala de hierro de una libra de 22 lineas, y busquemos el diámetro de una bala de plomo del mismo peso.

Tomaremos en un pie con el compas comun la abertura de 22 lineas, la llevaremos desde ♂ á ♂; tomaremos despues el intervalo ♄ y ♄; le llevaremos finalmente sobre el pie, y se hallará que coge 18 lineas, estas expresarán el diámetro de la bala de plomo de una libra.

Considérese que, segun está construida la linea de los metales, las distancias del centro de la Pantómetra á las divisiones de esta linea representan los diámetros de los cuer-

cuerpos semejantes de igual peso hechos de diferentes metales. Pero las distancias ó intervalos entre las mismas divisiones de las lineas de los metales, estando abierta la Pantómetra, son unas con otras como las distancias (687) desde el centro del instrumento á cada una de dichas divisiones; luego el intervalo entre ♄ y ♄, ó entre los caracteres que señalan el plomo, representa el diámetro de una bala de plomo de igual peso que la bala de hierro, cuyo diámetro es igual al intervalo de entre los caracteres del hierro. Fig.

737 II. Para *hallar la razon que hay entre el peso de dos cuerpos semejantes hechos de distintos metales, y de diámetros iguales.*

Supongamos que siendo de 32 onzas el peso de una bola de plata, se me pregunte quanto pesará una bola de oro de igual diámetro.

Tomaré en la linea de los sólidos el intervalo entre el centro y 32, le llevaré desde ☉ á ☉ sobre la linea de los metales; tomaré despues el intervalo entre ☾ y ☾, y le llevaré sobre la linea de los sólidos, poniendo en el centro de la Pantómetra la una punta del compas comun; la otra caerá sobre 59, y manifestará que la bola de oro de igual diámetro que la de plata pesa 59 onzas.

Para percibir el fundamento de esta operacion conviene considerar que quando los cuerpos son iguales, los pesos son unos con otros como las gravedades específicas de los metales; pero antes hemos visto (732) que las

Fig. gravedades específicas son en razon inversa de los volúmenes, y los volúmenes son como los cubos de los diámetros, esto es, para el caso actual, como los cubos de las divisiones de la linea de los metales; luego quando los volúmenes son iguales, las gravedades específicas, y por consiguiente los pesos, son en razon inversa de los cubos de las divisiones de las lineas de los metales. Por lo que, el peso de la bola de plata es al peso de la de oro de igual diámetro, como el cubo de la distancia que hay en la linea de los metales de la Pantómetra desde el centro del instrumento á la señal del oro, es al cubo de la distancia desde el mismo centro á la señal de la plata; ó, por lo dicho (687), el peso de la bola de plata es al peso de la de oro como el cubo del intervalo entre los dos caracteres del oro, es al cubo entre las dos señales de la plata. Como la linea de los sólidos dá la razon de los cubos de las distancias en ella señaladas (721), y como en la distancia entre los dos caracteres del oro caben 32 de estas divisiones, y la distancia entre los dos caracteres de la plata coge 59, se infiere que el peso de la bola de plata es al peso de la bola de oro de igual diámetro, como 32 es á 59. Luego &c.

738 III. Para *averiguar que cantidad se necesita de un metal determinado para hacer un cuerpo semejante é igual á otro hecho de qualquiera de los otros metales.*

Supongamos que alguno quiera hacer de plata una estatua semejante, é igual á otra hecha de estaño, y pregun-

gunte que cantidad de plata necesitará. Fig.

1.° Se pesará con cuidado la estatua de estaño, y supondremos que pese 36 libras.

2.° Se tomará en la linea de los metales la distancia desde el centro de la Pantómetra al caracter de la plata de cuyo metal se quiere hacer la estatua.

3.° Teniendo abierto el instrumento, se llevará esta distancia á las lineas de los sólidos desde 36 á 36.

4.° Finalmente, se tomará en la misma linea de los metales la distancia desde el centro del instrumento á la señal del estaño; manteniendo abierta la Pantómetra como se requiere para lo dicho, se mirará á que números de la linea de los sólidos corresponde esta distancia; y suponiendo que corresponda á 50 y 50, este número expresará que se necesitan 50 libras de plata para hacer una estatua ú otro cuerpo semejante é igual al propuesto.

739 IV. Para *hallar que razon tienen unos con otros los pesos de dos cuerpos semejantes y de distintos metales, siendo conocidos sus diámetros ó lados homólogos.*

Supongamos que siendo *EF* el diámetro de una bola de estaño, y *GH* el de una bola de plata, se pregunta que razon hay entre los pesos de las dos bolas. 23.

Llévese el diámetro *EF*, abriendo la Pantómetra, desde ♃ á ♃ dexando abierto el instrumento como para esto se requiere; tómese el intervalo que hubiere entre ☾ y ☾; si fuere este intervalo igual al diámetro *GH*, serán de igual peso ambas esferas; si el diámetro de la bola

Fig. de plata fuese menor que *GH*, y fuese igual á la linea *KL*, será señal que la bola de plata pesa menos que la de estaño.

Para averiguar quanto menos pesa, se deberán cotejar los diámetros *GH* y *KL* en la linea de los sólidos, conforme voy á declararlo. El intervalo hallado entre los caracteres de la plata, el qual en el caso actual es *GH*, se llevará al intervalo entre dos números de la linea de los sólidos los que se quisiere, v. gr. entre 60 y 60; se mirará despues á que números de la misma linea corresponda, puesto transversalmente, el diámetro *KL* de la bola de plata; y suponiendo que corresponde á 20 y 20, será señal de que el peso de la bola de plata cuyo diámetro es *KL*, es al peso de la bola de estaño cuyo diámetro es *EF*, como 20 es á 60.

740 V. Para *hallar el diámetro de una bola de un metal determinado, cuyo peso sea conocido, en conociendo el peso y el diámetro de otra bola hecha de qualquiera de los otros metales.*

24. Sea *MN* el diámetro de una bola de cobre que pesa 10 libras, y pídase el diámetro de una bola de oro de 15 libras de peso.

1.° Se buscará el diámetro de una bola de oro del mismo peso que la de cobre, llevando *MN* desde ☿ á ☿, y tomando el intervalo que hubiese, estando así abierto el instrumento, entre los caracteres del oro, cuyo intervalo *OP* sea el diámetro de una bola de oro del peso de 10 libras.

2.°

2.° Se llevará este intervalo OP á la linea de los sólidos desde 10 á 10; y estando así abierta la Pantómetra, el intervalo entre 15 y 15 de las lineas de los sólidos expresará el diámetro QR de una bola de oro del peso de 15 libras.

Métodos para tirar lineas.

741 Son varios los casos que pueden ocurrir, segun varian las condiciones con que se han de tirar las lineas; porque se puede ofrecer 1.° tirar una linea recta desde un punto á otro; 2.° tirar una linea perpendicular á otra; 3.° tirar una linea paralela á otra.

Quando las lineas se han de tirar en el papel, se hace uso de una regla, instrumento tan conocido, que tenemos por superfluo representarle. Para *tirar con la regla una linea recta desde un punto á otro* se aplica este instrumento sobre los dos puntos dados, ó muy cerca de ellos á igual distancia de cada uno, y haciendo correr á lo largo de la regla un lapiz ó una pluma, queda trazada la linea.

Para averiguar si está bien hecha una regla, se tira una linea á lo largo de ella con una punta muy sutil; se aplica despues la esquina de dicha regla, que sirvió para tirar la linea, de diferentes modos y lados sobre la linea, y se ve si se ajusta puntualmente con ella; y si se ajustare, la regla y la linea estarán derechas: ó tambien se aplica sobre la linea que se tiró ó sobre la esquina de la regla un

un pelo de caballo muy tirante, y si se ajusta bien con la linea, ó con la esquina de la regla en todo su largo, es señal de ser buena la regla.

Para reconocer si una regla está bien derecha suelen aplicarla los oficiales sobre otra regla de metal, de cuya exâctitud tienen seguridad. Pero para sacar derecha esta regla de metal es preciso hacer dos á un tiempo, y recorrerlas con mucho cuidado y delicadeza con la lima hasta que se ajusten exâctamente sus aristas, aplicando estas reglas la una al lado de la otra de todos los modos posibles; y aun para asegurarse mejor de que una regla está bien derecha, es preciso hacer tres.

Quando las reglas han de servir para tirar lineas con una punta ó con el lapiz pueden ser muy delgadas; pero quando se han de tirar con ellas lineas de tinta han de ser algo mas gruesas. Algunos las hacen con un chaflan, á fin de que la tinta que suele pegársele á la regla no manche el papel, y la vuelven boca abaxo para servirse de ella.

742 Para *tirar lineas en el terreno ó en planos grandes*, se hace uso algunas veces de un compas llamado *compas de varas*, es una regla de metal ó madera, armada con dos puntas de acero movibles que se afianzan á la distancia que se quiera una de otra. Las dos puntas están clavadas al borde de dos caxas, por dentro de las quales pasa la regla, y en cada caxa hay un tornillo para asegurarla apretando en el punto que se quiera de la regla.

AB

AB es la regla que ha de coger 6 ó 9 pies de largo; Fig.
si fuese de madera, ha de ser dura y compacta. *C* y *D* 25.
son las dos caxas de laton, á las que están clavadas las dos puntas de acero indispensablemente perpendiculares á la regla, Con la mira de hacer mas perceptibles las diferentes partes de estas reglas, representamos aquí una en grande; la punta de esta caxa es *G*, el tornillo *F*; ambos son de acero. El extremo del tornillo no aprieta inmediatamente la regla para que no la rehunda, sino una hoja de acero *HL*, la qual arrimándose á la regla la aprieta y sujeta de modo que no pueda correrse.

743 Quando se quiere *trazar una circunferencia con este compas*, se apartan una de otra las dos caxas hasta que hay entre sus dos puntas una distancia igual al radio del círculo por trazar; se planta despues la una en el punto que ha de servir de centro, se le hace dar la vuelta al rededor, de modo que la otra punta dexe en el plano un rastro que señalará la circunferencia.

744 Sirven tambien unos piquetes grandes llamados *jalones*, bien derechos ó labrados, armados con una punta de hierro en la parte de abaxo, y hendidos por la parte de arriba, á fin de que sean bien perceptibles, aun colocándolos á mucha distancia unos de otros, al tiempo de executar las operaciones para que sirven, porque en las hendiduras se ponen pedazos de carton ú otra cosa muy reparable.

745 I. Si se quiere *trazar una linea bastante larga*, se

Fig. se afianzará en el punto *A* el extremo de un bramante
27. dado de almazarron ; y teniéndole muy tirante, aplicando otro de sus puntos en el punto *B*, se le levanta para dexarle caer, y dando contra el plano, dexa estampada en él una linea recta.

746 II. Para *trazar una linea en un terreno llano*, se
28. tomará un piquete *A*, se le levantará en alto, se le dexará caer á plomo, y se le clavará en el suelo colocándole lo mas perpendicular que se pueda. A la distancia de unos 30 pasos por donde ha de pasar la linea, se plantará otro piquete *B*, que con el primero determinará la direccion de la linea por trazar. A igual distancia de este segundo se plantará otro piquete *C*, de manera que le vaya á encontrar la visual que pasa por el extremo de los otros dos, y se plantará verticalmente conforme se dixo del primero. En estando clavado firme, se procurará ponerle bien derecho, porque suele torcerse algo al tiempo de afirmarle, para que vuelva á estar en la direccion del rayo visual ; de modo que mirando desde el piquete *C* al piquete *B*, no se pueda ver el piquete *A*, ó que si este se vé, como sucede en los terrenos desiguales, pase derecha la visual por los tres puntos *A*, *B*, *C*.

Se comprueba esta operacion apartando el ojo del piquete *C* ácia la derecha y ácia la izquierda á igual distancia, mirando al piquete *A*. Si se le vé tanto por el un lado como por el otro, será señal de estar bien plantado el piquete *C*, pues estará enfrente del medio del se-

gun-

gundo *B* por donde ha de pasar la linea recta. Del mismo modo se plantarán los demas, sirviendo siempre dos para plantar el tercero. Fig.

747 Síguese de este método que la cabeza y el pie de los jalones están, quanto es posible en el plano vertical de la linea. Si se hiciese uso de piquetes curvos, como es forzoso en algunas ocasiones, importará poner cuidado en que esté en un mismo plano vertical su curvatura con la cabeza y el pie; esta prevencion es de suma importancia.

748 III. Quando se haya de *trazar una linea recta cuesta arriba*, el último jalon *C* que está al pie de la cuesta, ha de ser mas delgado que los otros, y estar muy á plomo. Se plantará en la cuesta, y bastante cerca del jalon *C*, otro jalon *D* del mismo grueso que *C*, para alinear las puntas *C* y *D* con el pie del jalon *B*, que ha de estar en el plano vertical de la linea, en la qual están los piquetes *A* y *B*. 29.

Si fuera la cuesta tan empinada, que á poco que se subiera ya no fuese posible alinear las cabezas de los jalones *C* y *D* con el pie del jalon *B*, se volvería al jalon *C* para plantar un jalon *Z* muy corto en el plano vertical de la linea *ABC*; hecho esto, se plantará el jalon *D* en la direccion *CZ*. 30.

Se comprueba la operacion ácia lo alto de la cuesta, donde se podrán hallar dos jalones como *E* y *F*, desde los quales se mirará á alguno de los jalones de la llanura co-

Fig. como *A* y *B*, á los quales ha de encontrar puntualmente el rayo visual.

31. 749 IV. Si se quisiese *proseguir la linea cuesta arriba*, se plantará un jalon muy chico y delgado en *D*, desde donde se puedan ver los dos últimos *C* y *B* de la subida; á corta distancia se plantará otro en *E* algo mas alto en la direccion de la linea *CD*; se plantará otro *F* mas grueso, por medio del qual se podrá prolongar la linea ácia *H*.

Quando el terreno es muy montuoso, es preciso valerse de jalones mas cortos y mas delgados, y plantarlos proporcionalmente; despues se ván aumentando poco á poco hasta llegar á lo llano donde sirven los de grueso natural.

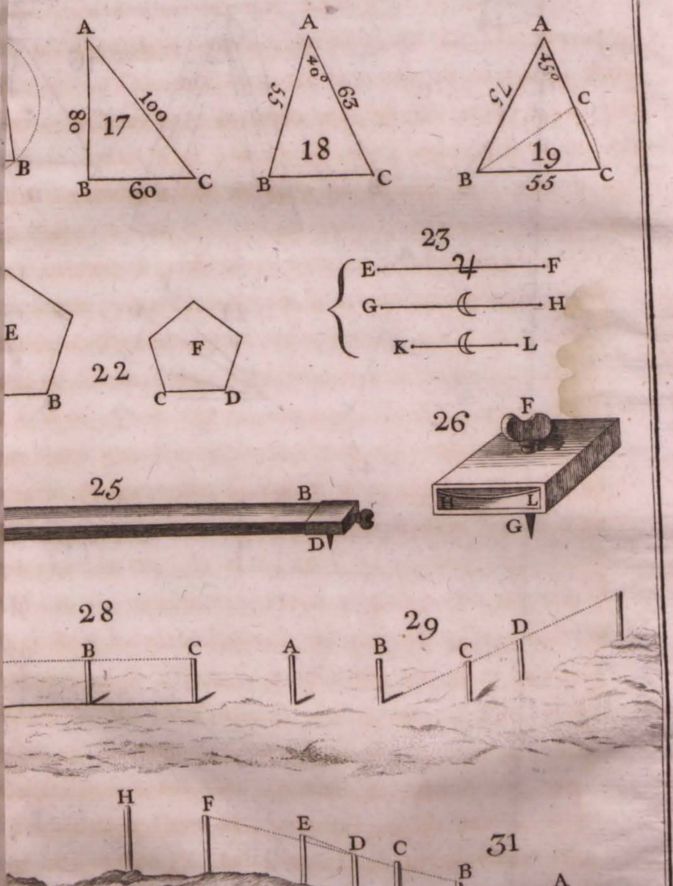
La misma operacion puede servir para trazar una linea cuesta abaxo, quando se la ha de prolongar en la llanura.

32. 750 V. Si *la linea ha de atravesar un barranco AD*, despues de prolongada la linea hasta *C*, practicando lo que acabamos de decir, se habrán de alinear los dos últimos jalones *C* y *D* con los dos primeros *A* y *B*; si la visual *CD* pasa por los jalones *A* y *B*, y los jalones intermedios del barranco ácia *E* estuvieren en el plano vertical de la linea, será perfectamente recta.

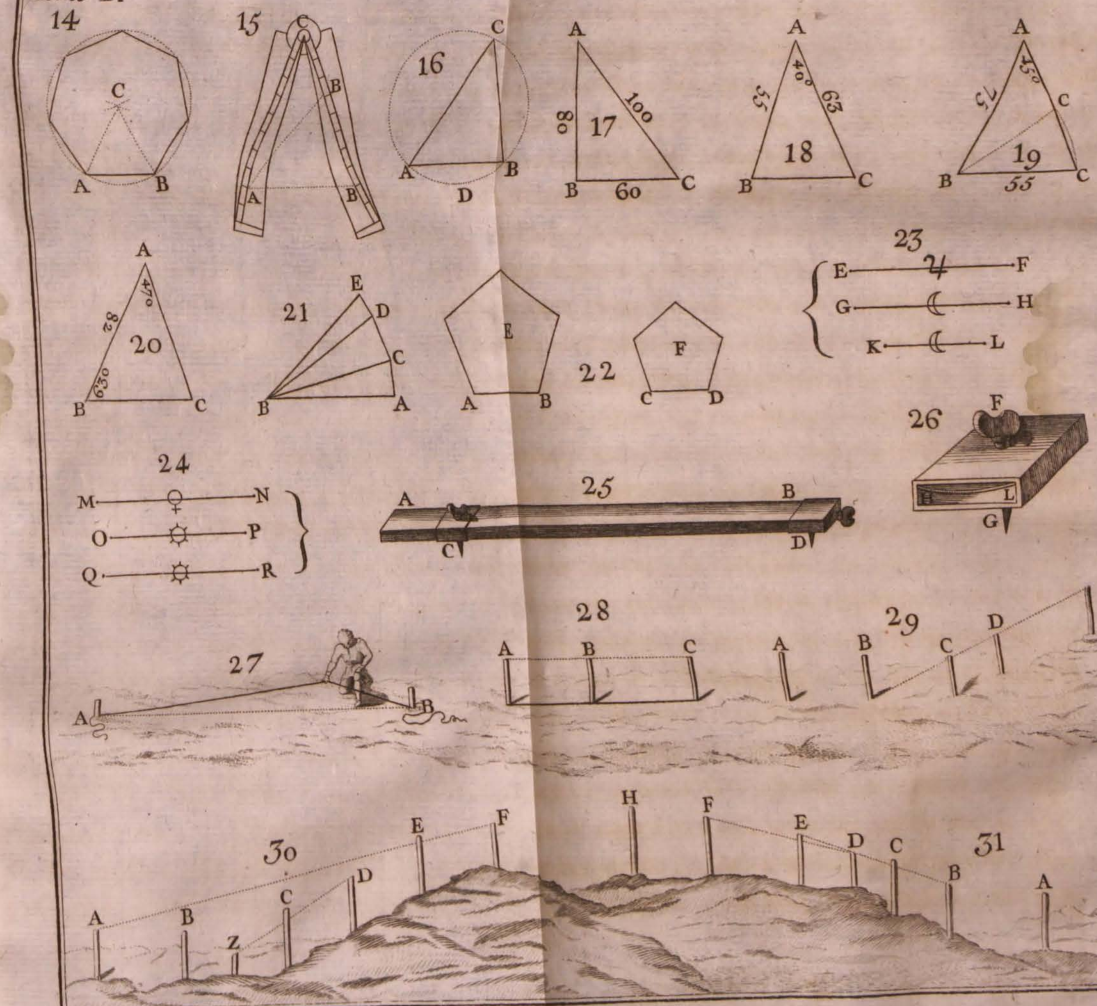
Si por ser mucha la distancia *AD* fuese dificil distinguir los jalones de los extremos, se enviará un peon á que tenga un sombrero detras del jalon *A*, con lo que se percibirá mejor el carton del jalon *B*.

VI.

Plana 494



Tomo 1. Plana 494



751 VI. Supongamos que se quiera *tirar una recta* GH *entre las dos torres* G *y* H *distantes una de otra algunas leguas.* Se plantará un jalon *B* ácia el medio ; á corta distancia se plantará otro *A* alineado con *BG* ; el que hiciere la operacion tendrá que volver á *B* , para ver si el rayo visual *BA* vá á parar al medio de la torre *H* ; si se desvia , supongamos , ácia la derecha , plantará el jalon *B* ácia la izquierda , y volverá á plantar el jalon *A* de manera que esté alineado con la nueva direccion *BG* ; volverá á mirar si el rayo visual *BA* se termina en *H* ; si se apartare todavía , se repetirá lo que hemos dicho , hasta que la linea *AB* sea la prolongacion de *BAH.* Fig. 33.

Estando bien colocados los dos piquetes *A* y *B* de la linea *GH* , se enviará un peon á que plante el jalon *C*, que deberá estar en la direccion del rayo *AB* prolongado hasta *G*. Se mandarán plantar del mismo modo los otros piquetes ácia adelante , poniendo cuidado en alinearlos bien, no solo con los dos jalones precedentes , sino tambien con el medio de la torre *G* que se percibirá mejor á medida que se acerque mas á ella el que haga la operacion. Del mismo modo se trazará la linea *BAH.*

752 VII. Si *entre los dos puntos dados* A *y* B *hubiese algun obstáculo que impida colocar los piquetes en linea recta desde* A *á* B *por medio del rayo visual* : desde cada punto como centro , y con un mismo intervalo mayor que la longitud del obstáculo , descríbanse con el compas de varas los dos arcos de círculo *C* y *D* ; tírese una li- 34.

Fig. linea *CD*, que toque los dos arcos; desde los dos puntos *E* y *F*, los mas cercanos que se pueda al obstáculo, como centros trácense los dos arcos *G* y *H* con el mismo intervalo que los antecedentes; por los puntos *A* y *B* tírense tangentes á los arcos *G* y *H*; estas formarán la linea recta que se desea.

753 VIII. Pero *si hubiese tales obstáculos, que no*
35. *fuese practicable lo que acabo de proponer*, se acudirá á la Trigonometría.

Se tomará un punto *C* fuera de la linea *AB* por trazar, tal que desde él se puedan ver los dos extremos *A* y *B*; se medirán las distancias *AC*, *BC*, sea inmediatamente, sea formando triángulos cuyos lados sean estas lineas, y que se puedan calcular. Entonces en el triángulo *ACB* serán conocidos los dos lados *AC*, *CB*, y se buscará el valor del ángulo *ACB* que forman por el método que mas adelante propondremos; se podrá, pues, calcular el ángulo *BAC* (677). Hecho esto, se mandará plantar, segun la direccion que se quiera *CD*, muchos piquetes; y midiendo el ángulo *ACD*, serán conocidos en el triángulo *ACD* el lado *AC* y los dos ángulos *A* y *ACD*; será, pues, fácil (672) calcular el lado *CD*. Concluido esto, se proseguirá plantando piquetes en la direccion *CD*, hasta una distancia igual á la calculada, el punto *D* donde rematare, estará en la linea recta que va desde *A* á *B*.

36. 754 Si *no fuese posible hallar un punto* C, *desde el*

qual

qual se puedan ver á un tiempo los dos puntos A *y* B, se Fig.
acudirá al rodeo siguiente.

Se buscará un punto *C* desde el qual se pueda ver el punto *B*, y otro punto *E* desde el qual se pueda ver el punto *A* y el punto *C*. Despues de medir ó determinar por alguno de los medios que expresaremos quando declaremos los modos de medir lineas, las distancias *AE*, *EC* y *CB* se observará en el punto *E* el ángulo *AEC*, y en el punto *C* el ángulo *ECB*. Hecho esto, en el triángulo *AEC* serán conocidos los dos lados *AE*, *EC*, y el ángulo *AEC* que forman, y se calculará por lo dicho (677) el lado *AC*, y el ángulo *ECA*; restando el ángulo *ECA* del ángulo observado *ECB*, saldrá el ángulo *ACB*; y como estará calculado *AC* y medido *CB*, quedará reducido este caso al antecedente, del mismo modo que si desde el punto *C* se viesen los dos *A* y *B*; y se concluirá la operacion del mismo modo.

755 IX. Si se hubiese de *tirar en una superficie curva*, *no una linea recta*, *porque esto es imposible*, *sino una linea cuyos puntos estuviesen todos en un mismo plano*, sería menester conocer tres puntos *A*, *B*, *C*; se aplicaría des- 37.
pues una regla sobre el punto del medio *B*, si fuese convexâ la superficie, y sobre los dos puntos extremos *A* y *C* si fuese cóncava, y se dispondria la regla de tal modo que baxando y levantando el ojo que suponemos en *D*, los bordes de la regla tapen los otros puntos. Manteniendo el ojo en esta situacion, se señalarán en la superficie curva

Fig. muchos puntos muy cerca unos de otros á lo largo de la regla, y se tirarian con una regla flexîble lineas desde el uno al otro punto.

En lugar del ojo puede servir una vela encendida *D*
38. bastante distante para que forme muy poco reflexo; despues se tirará la linea *ABC* á lo largo de la sombra de la regla, conforme se dixo poco ha.

756 Para *tirar en el papel una linea perpendicular á una linea dada*, fuera de los métodos declarados (319) en la Geometría Elemental, hay otro mas breve por medio de la
39. *esquadra ABC*, que hay en todo estuche de Matemática. Suele ser este instrumento de laton, con una charnela en *B*, para que doblado quepa en el estuche; pero los que tienen mucho que dibujar suelen tener tambien otra esquadra *B* de
40. una madera dura y lisa, que tambien sirve para tirar lineas paralelas. Se reconoce si la esquadra es buena trazando con ella un ángulo recto *ABC* en un plano, y tirando
41. la hypotenusa, desde cuyo medio *D* como centro y con el intervalo *DA*, se trazará un semicírculo; si este pasare por el vértice *B* del ángulo, será buena la esquadra. Se comprueba tambien este instrumento tirando con él á
42. la linea *AB* la perpendicular *BC*, á la *BC* la perpendicular *BD*, á la *BD* la perpendicular *EB*, y finalmente á la *EB* una perpendicular, la qual se confundirá con la *AB*, si la esquadra es buena.

757 Para *tirar una perpendicular en el terreno*, co-
43. mo si por un punto *A* fuera de una linea *BC* ocurriese ba-

baxar en el terreno una perpendicular; se asegurará en *A* Fig.
el medio de una cuerda; se atarán muy tirantes sus dos extremos en los puntos *B* y *C* de la linea dada; se dividirá *BC* en dos partes iguales en *D*; y tirando *AD*, esta será la perpendicular. Porque tendrá dos de sus puntos *A* y *D* á igual distancia de los extremos *B* y *C* de la linea dada (318).

758 Si *el punto* A *estuviere cerca del extremo de la linea recta DC*, se ataría tirante la cuerda en la direccion 44.
AC; se partiría en dos partes iguales en el punto *E*; se tomaría la cuerda *ED* igual á la mitad *EC*, y tirando la *AD*, esta sería la perpendicular que se desea.

Porque las lineas *ED*, *EC*, *EA* son iguales, y por consiguiente el círculo trazado desde el centro *E* y con el radio *ED*, pasará tambien por los puntos *A* y *C*; luego el ángulo *ADC* pasa por los extremos del diámetro, y será recto (376); luego &c.

759 La operacion contraria se executaría con igual facilidad. Supongamos que *desde el punto* D *se quiera le-* 43.
vantar una perpendicular.

Se tomarán al uno y otro lado los puntos *B* y *C* igualmente distantes de *D*; se doblará una cuerda asegurando sus extremos en los puntos *B*, *C*, y se tirará por el medio *A* de la cuerda y el punto *D*, la linea *AD* la qual será la perpendicular que se pide.

760 Si *el punto* D *estuviese en el extremo de la linea*, 44.
se practicará con poca diferencia lo que antes; quiero

 de-

Fig. decir que sobre *DC* se trazará un triángulo isósceles, conforme se dixo, cuyo vértice estará en *E*; se prolongará *CE* hasta que la *AE* sea igual con ella, y por los puntos *A* y *D* se tirará la linea *AD* la qual será la perpendicular.

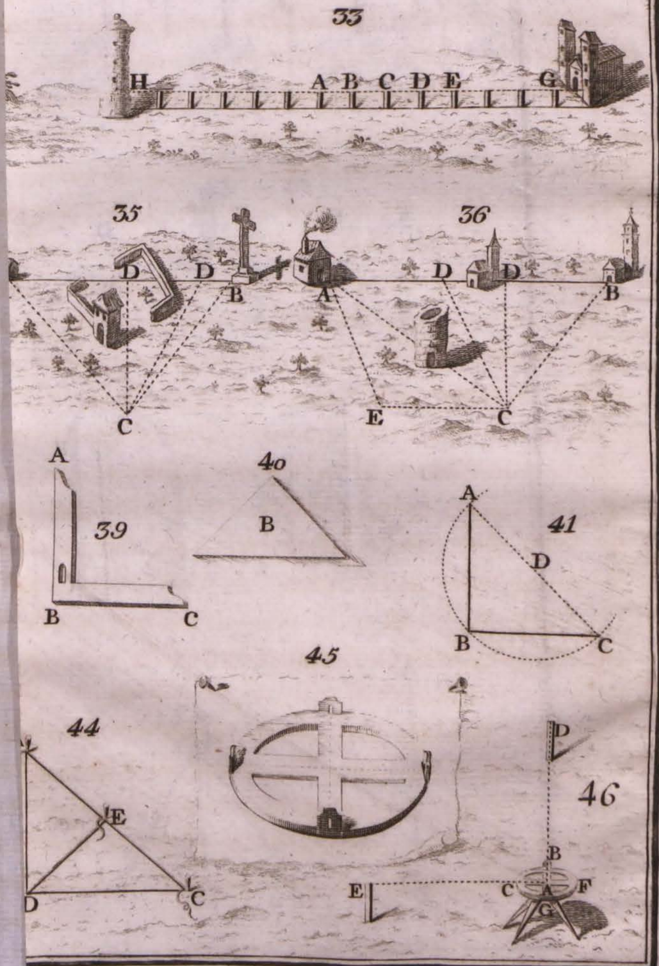
45. 761 Para tirar perpendiculares en el terreno, es de mucho uso el instrumento llamado *Cartabon* ó *Esquadra de Agrimensor*, la qual se compone de un círculo de laton bastante grueso, de quatro, cinco ó seis pulgadas de diámetro; se le divide en quatro partes iguales por medio de dos lineas que se cortan en ángulos rectos en el centro. En los quatro extremos de estas lineas, y en medio de lo ancho ó del limbo del círculo, se colocan quatro pínulas bien remachadas en agugeros quadrados, y hendidas muy perpendicularmente, de modo que las hendiduras correspondan á las lineas que dividen el círculo en quatro partes iguales; en el extremo inferior de cada hendidura suele haber unos agugeritos que sirven para ver mejor los objetos en el campo.

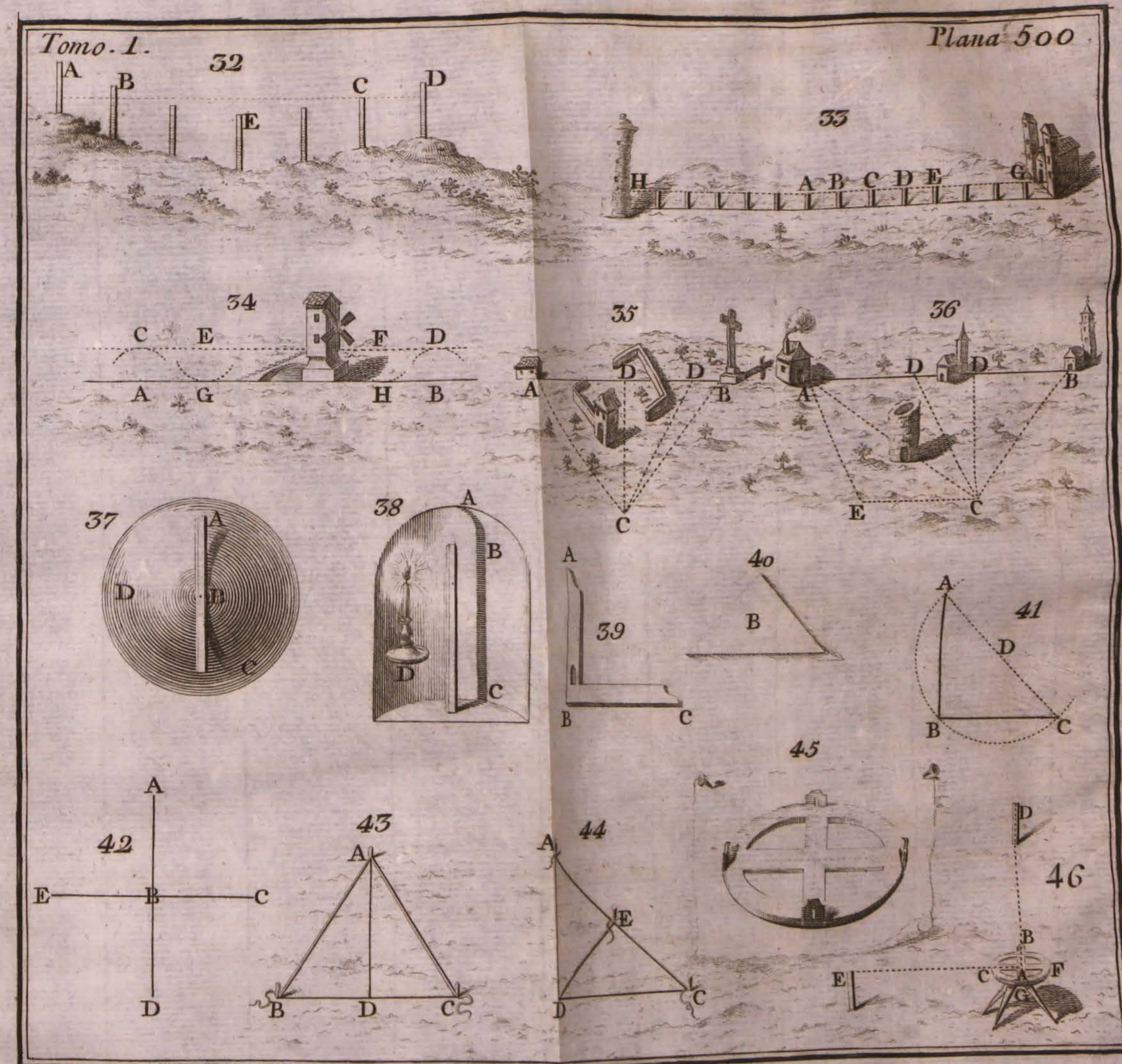
Toda la perfeccion de este instrumento consiste en que estén puntualmente hendidas en ángulos rectos las pínulas.

762 *Para ver si es puntual*, plántense dos piquetes
46. *D* y *E* distantes uno de otro, y en las direcciones de las dos visuales *AB*, *AC* que forman el ángulo recto *BAC*; vuélvase despues la esquadra de modo que la visual *AB* se dirija ácia el piquete *E*, y repárese si la visual *AF*,

que

Plana 500


33
H
A B C D E
G
35
D
D
B
C
A
36
D
D
B
E
C
A
B
C
39
40
B
A
41
D
B
C
45
44
E
D
C
D
46
B
E
C
A
F
G



Tomo. 1.
Plana 500
32
33
34
35
36
37
38
39
40
41
42
43
44
45
46

que forma el segundo ángulo recto contiguo, corresponde Fig.
puntualmente al piquete *D*; si esto se verificare será buena la esquadra. Aunque para la prueba de este instrumento basta la igualdad de estos dos ángulos rectos, porque los otros dos *CAG* y *FAG* son sus opuestos al vértice, bueno será verificar tambien estos, dándole á la esquadra una vuelta entera.

La esquadra suele afianzarse por medio de una virola, que lleva en su centro por la parte de abaxo, en un pie que suele tener unas cinco tercias de alto, y unas dos pulgadas de diámetro. En la parte inferior ha de tener este pie una punta de hierro, y por arriba ha de estar guarnecida de laton, para que encaje firmemente en las virolas de la esquadra, ó de los otros instrumentos que se le quieran aplicar.

763 El pie que acabamos de pintar bastaría si todas las operaciones para que suele servir el cartabon, se hubieran de executar en parages cuyo piso fuese de tierra; pero no es de ninguna utilidad en los parages donde el piso es peña; por lo que, se hace uso de otro pie compuesto de tres piernas *BC*, *BD*, *BE*, que se doblan 47.
sobre el palo triangular *AB* por medio de tres tornillos de laton puestos en su parte inferior *B*; el extremo superior *A* ha de tener las mismas circunstancias que el pie de que hemos hablado antes.

764 Supongamos ahora que *en el punto* E *de una linea se le quiera levantar una perpendicular*; se plantará el 48.

Fig. pie del cartabon en el punto *E*, alineando el extremo superior con la linea *BA* ú *OF*; despues se colocará el cartabon de modo que por el rayo visual que pasa por las pínulas 1 y 2, se vean igualmente al uno y otro lado los jalones *A* y *B*; se enviará despues un peon á que tenga en el punto *C* á su derecha un jalon; se le hará seña que le arrime ó aparte de sí hasta que el pie esté enmedio de la visual que pasa por las otras dos pínulas 3 y 4, y despues se le asegurará: concluido esto, se mirará por las mismas pínulas para que la cabeza y el pie del jalon se pongan enmedio de la misma visual; treinta pasos mas allá se plantará otro jalon *D* del mismo modo. La linea *CD* se podrá proseguir, y será perpendicular á la base *AB*, si el cartabon fuese bueno.

765 Si *en lugar del punto* E *fuese dado el punto* H,
49. esto es un punto fuera de la linea dada *AB*; se plantará el cartabon con poca diferencia enfrente sobre la linea *AB*; se mirará despues si la visual *FX* pasa muy cerca del punto *H*, y el que hiciere la operacion se avanzará quanto fuere menester, haciendo la misma prueba hasta encontrar con el punto *E*, desde el qual se podrá tirar la perpendicular *EH*.

766 El cartabon y su pie han de estar muy á plomo, porque una corta inclinacion ocasiona mucho error.

767 Quando se trate de *tirar una perpendicular á una pared por un punto dado*, la operacion se podrá hacer de dos modos.

I.

I. *Si el punto* A *está inmoble fuera de la pared*, aplíquese la una punta de un compas á dicho punto *A*, y la otra á la pared, en la qual se señalarán tres puntos *B*,*D*,*E* igualmente distantes del punto *A*; búsquese despues el centro del círculo que pasaría por estos tres puntos; la linea tirada desde este centro al punto *A* será perpendicular á la pared (318). Fig. 50.

768 II. Se puede hacer uso de una *esquadra doble*; quiero decir de una esquadra de tres piernas, cuya pierna *AC* es perpendicular á las otras dos *CF*, *CG*, con la qual se puede tirar á una pared una perpendicular desde un punto dado fuera de ella. 51.

769 Nos parece del caso declarar aquí el método de *tirar á una pared una linea á plomo desde un punto dado* A, cuya operacion incluye dos casos.

I. *Si la pared fuese perpendicular*, *ó lo que es lo mismo*, *á plomo*, arrímesele al punto dado *A* un plomo, esto es, un hilo que tenga pendiente del uno de sus extremos un peso qualquiera, de modo que cuelgue el plomo estando arrimado á la pared quanto se pueda sin tocarle; se pondrá el ojo en tal situacion, que el bramante del plomo tape el punto *A*; se señalará despues otro punto *B* que tambien le tape el bramante; tirando por estos dos puntos una linea, esta será la vertical que se pide. 52.

770 II. *Si la pared fuese inclinada*, no se le podria tirar una vertical, pero sí una linea que será la seccion comun de un plano vertical perpendicular á la pared, que

Fig. tambien se llama *vertical.* Quando se quiera tirar esta vertical por un punto dado, se levantará desde dicho punto una perpendicular á la pared, desde cuyo extremo se dexará colgar el plomo, y se tirará la vertical del mismo modo que en el caso antecedente.

771 Quando ocurra *tirar una linea paralela á otra linea dada*; si esta operacion se hubiese de executar en el papel, queda dicho (337) lo que se ha de practicar; bien que suele haber en el estuche de Matemáticas un instrumento por cuyo medio se traza mas facilmente una linea paralela á otra.

772 Compónese este instrumento de dos *reglas paralelas* A y B unidas con dos hojas de laton C y D pa-
53. ralelas, por cuyo medio las dos reglas A y B se pueden arrimar ó apartar una de otra, quedando siempre paralelas entre sí. La una de las dos reglas tiene un chaflan ó rebaxo para tirar lineas con tinta del mismo modo que con la regla simple. Se reconoce si las reglas paralelas son exâctas trazando primero con ellas en un plano dos lineas paralelas AB, CD; despues se trazan otras EF,
54. GH que corten las dos primeras; y si las porciones de las dos paralelas comprehendidas entre las otras dos paralelas fueren iguales, será señal de estar bien construidas las reglas paralelas (409). Para mayor seguridad se podrán tirar tambien otras dos lineas IK, LM, con las quales se debe verificar lo mismo que en las primeras.

55. 773 Pero si esta operacion se hubiese de executar

en

en el terreno, como si v. gr. *por el punto dado* A *se hubiese de tirar una paralela á la linea dada* BC, se baxará una perpendicular *AD*; se levantará otra perpendicular *EF* igual á *AD*; tirando por los puntos *A* y *F* la linea *AF*, esta será la paralela. Fig.

774 En está operacion se funda otra que pueda ocurrir; es á saber, la de *proseguir una linea recta* AB *mas allá de un obstáculo*, para cuyo fin se levantarán las dos perpendiculares iguales *AC*, *BD*; se tirará la paralela *CF*, en la qual se tomarán mas allá del obstáculo los puntos *E*, *F*, desde los quales se baxarán las perpendiculares *EG*, *FH* iguales con las antecedentes; tirando finalmente la linea *GH*, esta será con evidencia la continuacion de la linea *AB*.

De la Nivelacion.

775 Como la nivelacion se reduce, conforme lo manifestaremos, á tirar lineas orizontales, nos parece oportuno declarar aquí el método de executar esta operacion.

Para la inteligencia de lo que sobre este punto nos toca declarar, es indispensable saber, que la tierra es un cuerpo redondo, ó tan parecido á una esfera, que si en algo discrepa de la figura de este sólido, la diferencia cortísima en nada puede alterar las consecuencias que de su perfecta redondez inferiremos respecto de la nivelacion.

776 Bien que son muchas las observaciones de las quales se infiere que no es plana la tierra, sino curva y qua-

Fig. quasi esférica, nos contentarémos con traer una patente á los ojos de todos los hombres. Quando un navio empieza á descubrir una costa, los objetos mas altos son los primeros que divisan los que en él navegan. Si la superficie de la tierra fuera plana, en el mismo instante que desde el navío se vé la torre *B*, tambien se veria todo el terreno adyacente *ABC*. Sin embargo no es así, porque la
57. superficie *DAC* de la tierra se vá baxando mas y mas respecto de la linea orizontal *BD* del navio.

777 Puede, pues, suceder que estén al parecer en una misma linea orizontal *DB* dos puntos *D* y *B*, aunque estén á distancias muy desiguales de la superficie, y por consiguiente del centro *T* de la tierra. Por *linea orizontal* entendemos una linea tirada en un plano que toca la superficie de la mar, ó paralela á dicho plano que llamamos *plano orizontal*; y llamamos *linea vertical* la perpendicular á un plano orizontal.

778 Si la tierra es redonda, no hay duda en que sabiendo quantas varas caben en un grado de uno de sus círculos máxîmos, uno de aquellos cuyo plano pasa por el centro de la tierra (565), se sabrá quantas varas coge su circunferencia; porque multiplicando por 360 el valor de dicho grado, el producto expresará quantas varas entran en la circunferencia del círculo máxîmo cuyo es.

779 Se sabe que en un grado de un circulo máxîmo de la tierra hay 56979 toesas, de donde sacamos

mul-

multiplicando 56979 por 360°: 1.° que en la circunferencia de un círculo máxîmo hay 20512440 toesas; 2.° en su diámetro (504) 6526685; 3.° en el radio 3263342; 4.° en un minuto 950; y 5.° en un segundo 16 toesas. Fig.

Determinó Don Jorge Juan que 6 pies franceses valen 7 pies castellanos, de donde se sigue que el pie de Castilla ó la tercia de la vara de Burgos es al pie frances como 6 á 7; y como la razon de 6 á 7 es con imperceptible diferencia la misma que la de 0,8571 á 1, tambien 0,8571 pies franceses que componen una toesa valdrán 7 pies castellanos que son $\frac{7}{3}$ de vara.

Mediante esta consideracion se puede reducir inmediatamente con suma facilidad un número dado de toesas, v. gr. 56979 toesas á varas castellanas, diciendo: 1 toesa es á $\frac{7}{3}$ vara, como 56979 toesas á un quarto término, cuyo quarto término será el número de toesas por reducir á varas multiplicado por $\frac{7}{3}$, quiero decir, multiplicado primero por 7, y despues partido por 3 el producto, pues la proporcion será $1 : \frac{7}{3} :: 56979 : 132951$.

De aquí *inferirémos* 1.° que en un grado de círculo máxîmo de la tierra hay 132951 varas castellanas; 2.° en su circunferencia 47862360; 3.° en su diámetro $15228932\frac{2}{3}$; 4.° en el radio $7614466\frac{1}{3}$; 5.° en un minuto 2216; 6.° en un segundo 37.

780 Todo esto supuesto, se dice de *dos puntos que están á nivel* quando cada uno está á igual distancia del cen-

Fig. centro de la tierra; por lo que, *una linea está á nivel quando está en la superficie de una esfera cuyo centro es el mismo que el de la tierra.*

57. 781 Si por un punto *D* de la superficie de la tierra se tira una tangente *DB*, la qual será perpendicular (346) al radio *TD* de la tierra, dicha linea, paralela al orizonte, se llama *linea del nivel aparente*; y si se tira otro radio *TI* continuándole hasta la linea del nivel aparente, la parte *BI* es la *diferencia entre el nivel verdadero* I *y el aparente* B, cuya diferencia es la misma que hay entre el radio *TD* de la tierra y la secante *TB* del arco.

57. 782 El que quiera *apreciar la diferencia del nivel aparente al verdadero de dos puntos* D *y* B, ha de considerar que la distancia á que se puede ver un objeto terrestre, ó que por lo menos la distancia á que observamos en la nivelacion, es siempre tan corta que medida esta distancia *DI* en la superficie de la tierra, se puede considerar como igual á la tangente *DB*. Dexamos probado que la tangente *BD* es media (477) proporcional entre una secante qualquiera tirada desde el punto *B*, y la parte exterior *BI* de la misma secante; y por ser muy corto el arco *DI*, podemos mirar la secante que pasa por el punto *B* y el centro *T* de la tierra, como igual al diámetro, esto es, como dupla de *IT*, ó dupla de *DT*; luego será *BI* el quarto término de esta proporcion $2DT : DI :: DI : BI$.

Sea el valor de *DI*, medida en la superficie de la tier-

tierra, v. gr. de 2000 varas ó 6000 pies; ya que el radio de la tierra es de 7614466 $\frac{1}{3}$ varas ó 22843399 pies, hallarémos *BI* haciendo esta proporcion 45686798 pies : 6000 :: 6000 : *BI*; despues de executado el cálculo hallamos que *BI* vale 0,7880 de pie, que viene á ser 9 pulg. 5 $\frac{1}{2}$ lineas; quiero decir, que entre dos objetos *B*,*D* distantes uno de otro 2000 varas, que están en una misma linea orizontal, la diferencia *BI* del nivel ó de distancia al centro de la tierra es de 9 pulg. 5 $\frac{1}{2}$ lineas. Fig.

783 Despues de calculada una diferencia de nivel *BI*, son mas fáciles de calcular las diferencias que corresponden á distancias menores, considerando que las distancias *BI*, *bi* son quasi paralelas é iguales con las lineas *DQ*, *Dq* las quales son unas con otras como (523) los quadrados de las cuerdas ó de los arcos *DI*, *di*; porque en nuestro caso se pueden tomar promiscuamente las cuerdas por los arcos, ó estos por aquellas.

Fundados en esto, si quisiéramos determinar la diferencia *bi* de nivel correspondiente á una distancia de 4000 pies, hariamos esta proporcion $(6000)^2 : (4000)^2 ::$ 9 P 5 $\frac{1}{2}$ l : $bi =$ 4 pulg. 2 $\frac{1}{2}$ lin.

784 Sentados todos estos principios, quando se quiera *averiguar la diferencia de nivel de los dos puntos* B *y* A *los quales no están en la linea orizontal que pasa por el uno de ellos*, se medirá con el grafómetro (despues diré que instrumento es el grafómetro y la cadenilla) el ángulo *BCD*, y con medir con la cadenilla la distancia *CD* ó *CT* en 58.

el

Fig. el terreno *AVB*, se considerará como rectángulo en *D* el triángulo *CDB*; y se calculará *BD*, á cuyo valor se añadirá la altura *CA* del instrumento, y la diferencia *DT* de nivel sacada por el método enseñado antes (779).

Pero como para la puntualidad de esta operacion es preciso tomar con suma puntualidad el ángulo *BCD*, y que el instrumento sea muy perfecto, mas seguro será determinar la diferencia de nivel entre dos puntos por otro método que vamos á declarar, bien que mas largo.

785 Para *saber si una linea de corta extension es orizontal*, se hace uso

1.° Del *Nivel de ayre* que es un tubo lleno de espí-
59. ritu de vino, en el qual se dexa una ampolla de ayre que se manifiesta enmedio *C* del tubo, quando el instrumento está á nivel y en situacion orizontal.

786 2.° Del instrumento que llaman *Nivel de Al-*
60. *bañil*, cuyo instrumento es un triángulo isósceles sin base entre cuyos lados hay un arco de círculo. Desde el vértice va tirada una linea perpendicular á la base que va figurada en el arco que abrazan los dos lados del triángulo; en el extremo superior de cuya linea se cuelga un plomo, cuyo cordel corresponde puntualmente con dicha linea quando la base del instrumento está en situacion orizontal. Este nivel determina mejor que no el de ayre la cantidad de la inclinacion de un plano que no sea paralelo al orizonte; porque las divisiones del arco señalan quanto se aparta el plomo de la vertical.

3.°

787 3.º Del nivel *CABD*, llamado *Nivel de agua.* Compónese de un tubo hueco de hoja de lata, ú otro metal acodillado en *A* y *B*. En los dos tubos *AC*, *BD* se introducen otros dos de vidrio *i*, *K*, pegados con betun el uno en *AC*, el otro en *BD*; habiendo debaxo y enmedio del tubo *AB* una virola para colocarle en su pie. Se le llena de agua al tubo hasta que suba á la altura de 2 ó 3 pulgadas en los dos tubos de vidrio. La linea *CD* que pasa por la superficie del agua en ambos tubos *IA*, *KB*, es una linea orizontal. Fig. 61.

Para servirse de este instrumento es necesaria otra pieza llamada la *Mira*, la qual es un carton ú hoja de lata de un pie en quadro, al poco mas ó menos, dividido en dos partes iguales por una linea orizontal *MN* que separa la mitad inferior dada de negro, de la parte superior que se dexa blanca. Se planta este carton en una regla de modo que *MN* sea perpendicular á la longitud de la regla. Esta se mete y corre por un rebaxo hecho en un estadal *OP* dividido en pies, pulgadas y lineas. Con hacer correr la regla por el rebaxo, se coloca la linea de mira donde se quiere y conviene. 62.

788 Supongamos ahora que se quiera *averiguar si están á un nivel dos puntos* P y Q, ó qual de los dos se aparta mas del nivel verdadero y quanto. 63.

Se planta el instrumento en *N*; el práctico envia un peon á que plante en *Q*, tan perpendicular como pueda, un estadal dividido como se ha dicho, en pies, pulgadas

Fig. y lineas, manteniéndole firme con la mano izquierda, y teniendo en la derecha la mira para subirla ó baxarla á lo largo del estadal, segun se le avisa por señas.

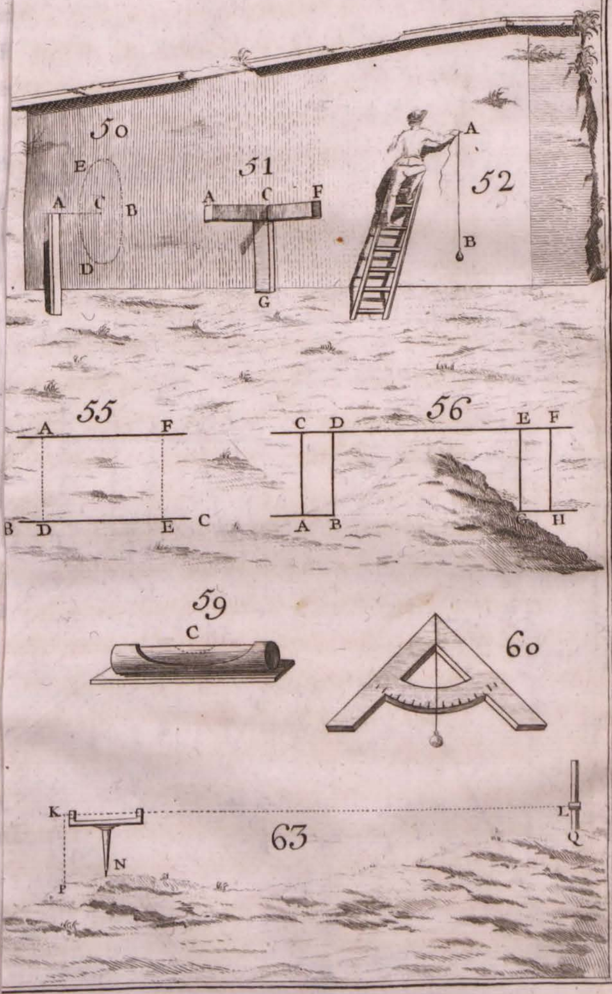
El práctico á cuyo cargo está la operacion, mira desde luego por la superficie del agua ácia el estadal, y hace seña al peon de que pare la mira en el punto *L* donde remata la visual *KL*. Despues mide la altura *QL* que supondremos de 1 pie 3 pulgadas, mide la altura *KP* que supondremos de 4 pies 6 pulgadas; resta la menor de la mayor, y la diferencia 3 pies 3 pulgadas manifiesta quanto el uno de los dos puntos dista mas del centro de la tierra que no el otro, ó quanto el uno está mas alto respecto del orizonte.

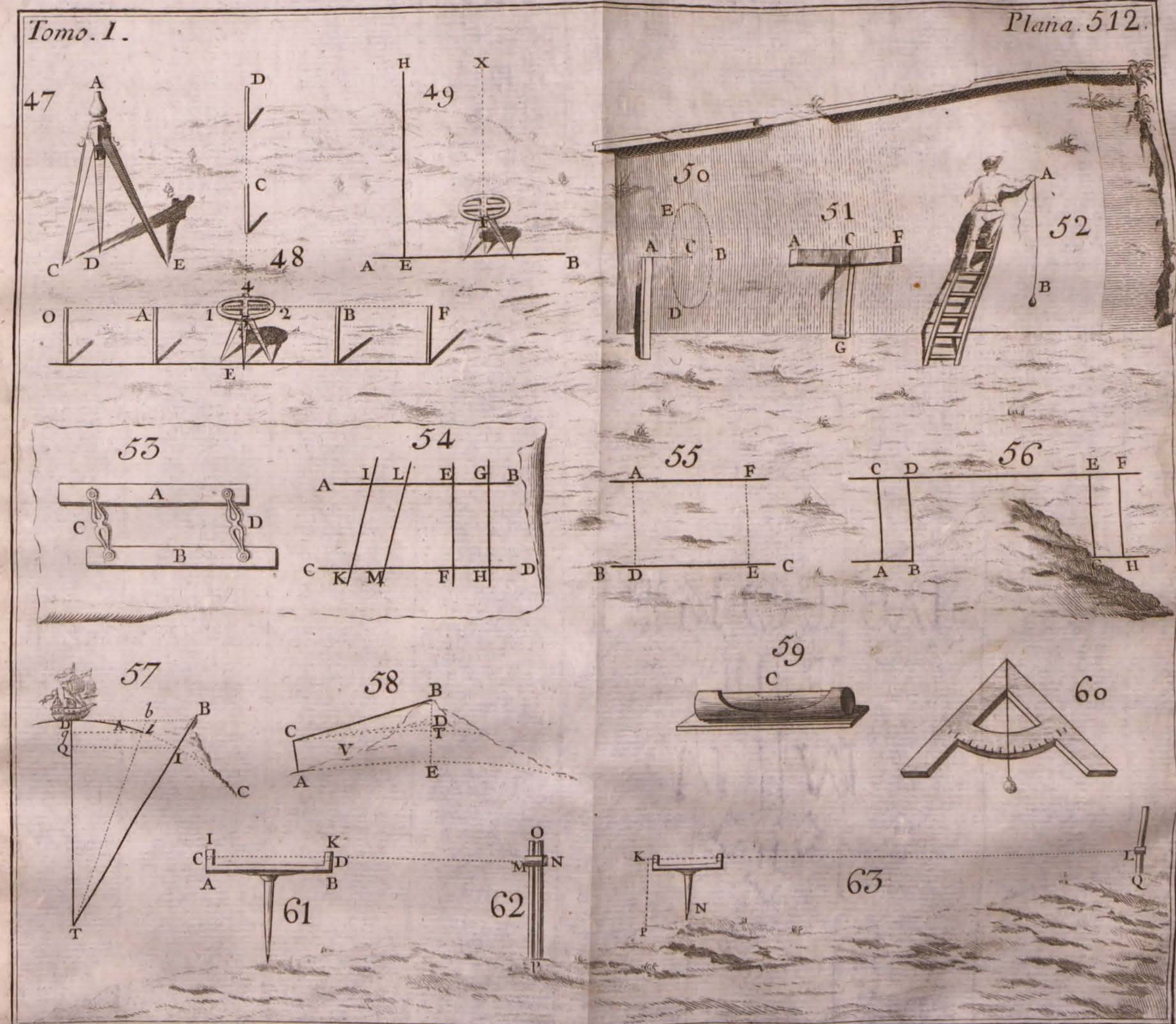
789 Quando se busca la diferencia de nivel de dos puntos entre los quales no hay mas distancia que 700 ó 750 pies, la mayor donde puede servir este instrumento, se desprecia la diferencia que puede haber del nivel verdadero al aparente; porque á distancia tan corta se desvia tan poco del nivel verdadero la linea *KL*, que viene á ser nula la diferencia.

790 *Quando es mucha la distancia entre los dos objetos que se han de nivelar*, se repite muchas veces la operacion; pero si no fuese mas que de unos 1400 ó 1500 pies, se puede hacer la operacion de una sola vez plantando el instrumento enmedio de la distancia que separa los dos términos de la nivelacion.

Propongámonos nivelar v. gr. los dos puntos *A* y *B* en-

Plana. 512.




Tomo. I.
Plana. 512.
47
48
49
50
51
52
53
54
55
56
57
58
59
60
61
62
63

entre los quales hay la distancia de 1540 pies. Plantarémos el nivel en *C*, mitad de la distancia *AB* con poca diferencia; mirarémos desde *D* á *E*; suponemos que la visual remata en el punto *G*, cuya altura es de 2 pies 4 pulgadas. El práctico pasará al otro lado para mirar desde *E* á *D*, donde habrá otro peon con otro estadal, y todo lo demas expresado (786); y supongo que la visual remate en el punto *F*. Medirémos la *AF*, y la supondremos de 9 pies 6 pulgadas; de esta cantidad restarémos 2 pies 4 pulgadas, altura del punto *G*; la diferencia 7 pies 2 pulgadas manifestará que el punto *A* está mas baxo que *B* la misma cantidad. Fig. 64.

791 Si los dos puntos *A* y *B* por nivelar, estuvieran distantes uno de otro v. gr. 5000 pies, se partiria 5000 por 1400, el cociente expresaría quantas estaciones se habrian de hacer, ó quantas veces se habria de repetir la operacion. Porque, como de una vez se pueden nivelar dos puntos distantes uno de otro 1500 pies, el cociente 3 de 5000 partido por 1500 está diciendo que con tres estaciones se puede executar la nivelacion. A cuyo fin se buscarán desde luego tres sitios, los mas acomodados para tres estaciones, se mandará plantar de contado un jalon en el punto *C* el qual viene á estar enmedio de la distancia *AB*; y á la distancia 700 ó 750 pies del punto *A* se mandará plantar en *D* otro jalon, y tambien otro á igual distancia del término *B*, y procurando que los tres jalones estén en una misma linea Fig. 65.

Fig. recta con los dos términos *A* y *B*.

Despues de colocado el nivel en *D*, se mirará desde *T* ácia *S*; y en el supuesto de que la visual vá á rematar al punto *M*, se medirá la *MA* que supongo de 8 pies 2 pulgadas, y lo apunto. Despues se mirará desde *S* ácia *T*, y con un lapiz se señalará el punto *K* donde vá á parar la visual *SK*. Se pasa despues á la segunda estacion *C*; se envia un peon al punto *G*, mitad de la distancia *CE*, á que tenga allí un estadal hasta despues de concluidas las operaciones de la segunda y tercera estacion. Despues se mirará desde *Q* ácia *R*; y suponiendo que la visual vá á parar al punto *L*, se medirá la *KL*, la supondremos de 3 pies 6 pulgadas, cuya cantidad se apuntará; despues se mira desde *R* ácia *Q*, y al peon que está en *G* se le manda señale el punto *H* donde remata la visual. Finalmente, se manda pasar el nivel á la tercera estacion *E*; se mira desde *P* ácia *O*; y suponiendo que para en *I* la visual, se manda medir la *HI*, y supondrémosla de 4 pies 3 pulgadas, que se mandarán apuntar; se mira despues desde *O* ácia *N*, se manda medir *BN*, y supóngola de 1 pie 6 pulgadas, que mando apuntar aparte.

Todo esto concluido, se suman todas las alturas apuntadas, esto es, 8 pies 2 pulgadas, 3 pies 6 pulgadas, 4 pies 3 pulgadas, que suman 15 pies 11 pulgadas, de cuya suma se resta la altura *BN* de 1 pie 6 pulgadas; y la resta 14 pies 5 pulgadas manifiesta que el punto *B*

es-

está mas alto que *A* la misma cantidad. Fig.

792 Quando la distancia entre los dos términos es mucha, suelen encontrarse subidas y baxadas que hacen mas embarazosa la nivelacion. Entonces es preciso apuntar en un libro de memorias todas las subidas en una columna que llamarémos la *primer columna*, y en otra *segunda* las *baxadas*, conforme vamos á enseñar.

Supongamos que se nos ofrezca nivelar los dos términos *A* y *B*. Se plantará el nivel en *D*, distante unos 700 pies de *A* y 3; se mirará á los puntos *E* y *C*, y se apuntará en la primer columna la altura *AC* de 6 pies 4 pulgadas, dexando señalado con el lapiz el punto *E*. Se pasará despues el instrumento al punto 4, y determinarán los puntos *F*, *H*; se medirá la altura *FE*, supongámosla de 3 pies 6 pulgadas, que se apuntarán en la primer columna, dexando señalado con lapiz el punto *H* del estadal 5. Se pasará el instrumento al punto 6, desde el qual se determinará el punto *L* el qual quedará señalado, y el punto *I* para medir la altura *IH*, supondrémosla de 4 pies y los apuntarémos en la primer columna. Se le pasará despues al punto 8, desde el qual supongo que solo se puede determinar el punto *M*; se medirá la altura *LM*; supóngola de 4 pies 2 pulgadas, y se apuntarán en la segunda columna por haberse hallado la altura *LM* baxando. Como el punto *O* está mas baxo que *M* toda la altura *NO* del instrumento que suponemos de 4 pies 6 pulgadas, se apuntarán 4 pies 6 pul- 66.

Fig. gadas en la segunda columna. Se plantará un jalon en el punto O, se baxará el instrumento al punto 9, el qual será preciso buscar de modo que la visual PO vaya á encontrar el pie de dicho jalon; se determinará despues el punto Q. Despues se pasará el nivel á 11 para determinar los puntos R, T, y la altura RQ; supóngola de 3 pies 9 pulgadas, y las apunto en la columna primera, por haberla hallado subiendo. Se pasará despues al punto 13, desde el qual se determinarán los puntos V, Y, y la altura VT de 3 pies 5 pulgadas para apuntarla en la primer columna. Quedará señalado el punto Y, y pasando el nivel á 15, se determinarán los puntos B', Z, y la altura YZ de 4 pies 1 pulgada, y se apuntará en la primer columna. Se irá despues al punto 17, desde el qual se determinarán los puntos C', E', y la altura $C'B'$ de 3 pies 7 pulgadas para apuntarla en la segunda columna. Ultimamente, se pasará el nivel al punto B para determinar la altura $E'F'$ de 3 pies 10 pulgadas, las quales se apuntarán en la segunda columna, igualmente que la altura $G'B$ del instrumento, la qual suele ser de 4 pies 6 pulgadas.

Los números de la primer columna suman 25 pies 1 pulgada, los de la segunda 20 pies 7 pulgadas. Si restamos la menor de estas dos sumas de la mayor, la resta 4 pies 6 pulgadas está diciendo que el término A está 4 pies 6 pulgadas mas baxo que el término B.

793 Si quando ocurre executar una nivelacion, se hu-

hubiesen de hacer muchas estaciones por ser muy empinada la cuesta, sería mucho mejor hacer la operacion cuesta abaxo ácia cada uno de los dos términos, empezando desde la cumbre; en este caso se apuntarian en la primer columna todas las alturas que se determinasen ácia el un término, y en la segunda todas las que se determinasen baxando ácia el otro. Fig.

Supongamos v. gr. que tratándose de averiguar la diferencia de altura de los dos puntos *A* y *B*, sea forzoso hacer muchas estaciones, y por lo mismo perder mucho tiempo. Se empezará desde el punto 6, cumbre de la altura, nivelando desde 6 ácia *A*, y apuntando en la primer columna las alturas que fuesen saliendo; se proseguirá nivelando desde 6 ácia 9, apuntando en la segunda columna las alturas que salieren. Se pasará el nivel al punto 15 para nivelar primero ácia 9, despues ácia *B*. Se restará la suma de las alturas de la una columna de la suma de las alturas de la otra, y su diferencia señalará la que se busca entre el nivel de los dos términos propuestos. 66.

Esta práctica ahorra mucho tiempo; porque si fuesen dos para nivelar, mientras el uno nivela desde 6 ácia *A*, el otro podrá nivelar desde 6 ácia 9.

Métodos para dividir las lineas.

794 Quanto ocurre practicar para dividir en el papel las lineas rectas en razon dada, queda declarado

Fig. en la Geometría Elemental; solo nos falta declarar aquí el modo de dividir la circunferencia del círculo, cuya operacion incluye varios casos.

795 I. Para *dividir un círculo en dos partes iguales*, se tirará un diámetro *AB*; despues se le podrá dividir, si se quisiere, en quatro, en ocho, en diez y seis &c.
67. partes iguales, dividiendo la circunferencia por el medio en los puntos *C*,*D*, y despues los quadrantes tambien por el medio en los puntos *E*, *F*, *G*, *H* &c.

68. 796 II. Para *dividirle en seis partes*, se llevará seis veces el radio *AC* á la circunferencia en los puntos *B*, *D*, *E*, *F*, *G*; y tomando la mitad de cada uno de estos arcos, el círculo estará dividido en doce partes iguales. De donde se puede inferir lo que se habrá de practicar para dividirle en 24, 48 &c. partes iguales.

797 III. La division del círculo en partes de número ímpar se funda en su division en partes de número par. El método que para esto vamos á proponer, dá la division de un arco de círculo, v. gr. del quadrante, en un número ímpar de partes.

Practícase esta division por medio de una curva llamada *Quadratriz*, cuya descripcion es como sigue.

69. Divídase el radio *AB* en un número muy crecido de partes iguales, de modo que el quadrante *AT* pueda dividirse en el mismo número de partes iguales. Aquí supondrémos que así el radio *AB* como el quadrante están divididos en diez y seis partes iguales. Hecho esto, tíren-

rense los radios *BC*, *BD*, *BE*, *BF* &c. y por los puntos Fig.
G, *H*, *I*, *K* &c. lineas paralelas al semidiámetro *BT*, que cortan los expresados radios en los puntos *L*, *M*, *N*, *O* &c. por los quales se trazará la curva *AS*, la qual saldrá tanto mas cabal quanto mayor fuere el número de partes iguales en que se hubiere dividido así el radio *AB* como el quadrante.

Si se tiran paralelas *HM*, *KO* que encuentren la curva en los puntos *M*, *O*, y por estos puntos se tiran radios *BD*, *BF*, habrá por el modo de trazar la curva la misma razon entre el arco *AD* y el arco *DF*, que entre la linea *AH* y la linea *HK*.

798 Ya se nos hará muy fácil dividir un ángulo ó un arco en tres partes iguales; y lo que respecto de este número demostrarémos, deberá entenderse de otro qualquiera número impar. Propongámonos *dividir el arco ó* 70.
ángulo OPQ *en tres partes iguales*. Supondrémos trazada la curva en un pedazo de cuerno ó de carton muy liso, conforme hemos dicho. Suponiendo tambien que esté la curva con su quadrante de círculo *AC*, harémos el ángulo *ABE* igual al ángulo dado, y desde el punto *F*, donde el radio *BE* corta la curva *AD*, tirarémos la perpendicular *FG* al radio *AB*, y dividirémos la parte *AG* en tantas partes iguales quantas ha de contener el ángulo despues de dividido: ahora la dividirémos en tres partes iguales en los puntos *H*, *K*, por los quales tirarémos las paralelas *KL*, *HI* que cortan la curva en los puntos *L*, *I*,

 por

Fig. por los quales tirarémos los radios BM, BN que dividen el arco AE en tres partes iguales en los puntos M, N; porque por la propiedad de la curva $AK : AG :: AM : AE$; y como AK es un tercio de AG, el arco AM será la tercera parte del arco AE.

71. 799 Si ocurriese dividir en tres partes iguales un ángulo obtuso RST; como el arco RVT no puede caber en el arco AC, se dividirá en dos partes iguales el án-
70. gulo obtuso para formar el ángulo agudo RSV que supondrémos ser el mismo que el ángulo ABE; se dividirá el ángulo agudo en tres partes iguales en los puntos M, N, se tomará el arco AN el qual, por ser duplo de la sexta parte del arco RVT, será el tercio del mismo arco RVT.

800 Para dividir un círculo en siete partes iguales, se dividirá su quadrante en otras tantas partes; el quádruplo de uno de ellas será la séptima parte de toda la circunferencia.

Métodos para formar y medir ángulos.

801 Como para medir las lineas suele ser preciso en muchas ocasiones buscar primero el valor de algunos ángulos, declararémos aquí el modo de formarlos y medirlos, y los usos de algunos instrumentos que para estas operaciones se han inventado.

72. 802 Quando se han de formar y medir ángulos en el papel, sirve un instrumento llamado *semicírculo graduado,*

do ; porque es un semicírculo de laton ó cuerno, dividido Fig.
en 180°. Quando es muy grande se le divide en medios grados y tambien en quartos de grado ; tiene los grados señalados de diez en diez, y debaxo están sus suplementos, á fin de que se pueda contar con igual comodidad de la izquierda á la derecha que de la derecha á la izquierda. El centro está señalado con una linea recta, y el otro lado está á modo de chaflan.

Sirve este instrumento para trazar ángulos de un número determinado de grados ; conocer el valor de un ángulo propuesto ; tirar una linea perpendicular á otra ; y como su base es una linea recta, puede servir en lugar de regla para tirar lineas.

Si el semicírculo fuese de cuerno, como entonces será transparente y delgado, será mas acomodado para conocer el valor de los ángulos y tirar lineas rectas con una punta ó con lapiz ; pero está expuesto á la contingencia de torcerse.

803 Propongámonos ahora *saber el valor del ángulo* EBG por medio del semicírculo graduado. Aplicaré- 73.
mos el centro del instrumento en el vértice *B* del ángulo propuesto, y su radio *BC* sobre el lado *BE* del ángulo. El arco *CD* comprehendido entre los dos lados del ángulo manifestará los grados del ángulo *EBG*.

804 Quando ocurra *formar un ángulo igual á un ángulo* BAC *formado del encuentro de dos paredes* ; desde el 74.
vértice *A* se medirá una longitud arbitraria *AC* de tres ó

qua-

Fig. quatro varas. Se tomará igual distancia, ó la que se quisiere, desde *A* ácia *B*; se medirá puntualmente la linea *BC*, y resultará un triángulo *ABC*, cuyos tres lados serán conocidos. Se formará despues otro triángulo *abc* cuyos lados *ac*, *bc*, *ab* tengan tantas partes de una escala quantas varas ó pies los lados de *ABC*; el ángulo *bac* opuesto al lado *bc* será de igual número de grados que el ángulo *BAC* formado del encuentro de las dos paredes *AC*, *AB*, y opuesto al lado *BC*.

805 Quando se ofrezca *formar en el terreno un ángulo de un número determinado de grados*, v. gr. de 30°, se buscará la cuerda de 30°, suponiendo que los dos lados del ángulo sean de 10, 100, ó 1000 partes. Si los dos lados del ángulo fuesen de 1000, la cuerda de 30° será 517; si los dos lados fuesen de 100, la cuerda será de $51\frac{3}{4}$; finalmente, si los dos lados fuesen de 10, la cuerda será de $5\frac{1}{6}$; por lo que, si se forma un triángulo cuyos tres lados sean 1000, 1000, 517, ó 100, 100, $51\frac{3}{4}$, ó 10, 10, $5\frac{1}{6}$, este triángulo tendrá un ángulo de 30°.

806 Por lo que mira á la cuerda de un ángulo, se puede hallar su valor de varios modos.

75. I. Formando en el papel un ángulo *A* de 30°, cuyos lados *AB*, *AC* sean iguales; tirando la cuerda *CB* de este ángulo; dividiendo despues los lados en diez partes iguales, y considerando quantas tiene la cuerda, se hallará que caben $5\frac{1}{6}$.

II.

II. Tómese con un compas la cuerda de 60° ó el radio del círculo en la Pantómetra; llévesela á las partes iguales, se hallará que este radio tiene por lo comun 100 partes. Tómese despues la cuerda de 30°, aplíquesela sobre las mismas partes, se hallará que tiene $51\frac{3}{4}$; de suerte que suponiendo los dos lados de un ángulo de 100 partes, la cuerda de 30° será de $51\frac{3}{4}$. Fig.

III. Por las tablas de los senos que suponen el radio de 1000, se omitirán las dos últimas figuras, tómese el duplo del seno de 15° para sacar la cuerda de 30°; y como el seno de 15° es de 258, su duplo 516 será la cuerda de 30°.

IV. Pero como hemos supuesto que los lados del ángulo son de 10, de 100, de 1000 partes, á cuyos números se refieren las cuerdas; si se pidiesen números menores en la misma razon, á fin de formar con ellos los mismos ángulos; entonces se partirian los números expresados por un mismo número. Supongo v. gr. que el lado de un ángulo de 30° sea de 1000 partes, y su cuerda 516, se partirán 1000 y 516 por 4; saldrán 250 y 129, cuyos números partidos por 5 dán 50, y quasi 26; partiendo todavía por 2 se sacará con poca diferencia, 25 y 13, los quales podrán servir para formar el ángulo de 30°, del mismo modo que 1000 y 516.

807 Si se tratase de *formar un triángulo igual á otro propuesto*, se reduciria toda la operacion á tirar lineas

igua-

Fig. iguales á lineas dadas, y formar ángulos iguales á otros ángulos.

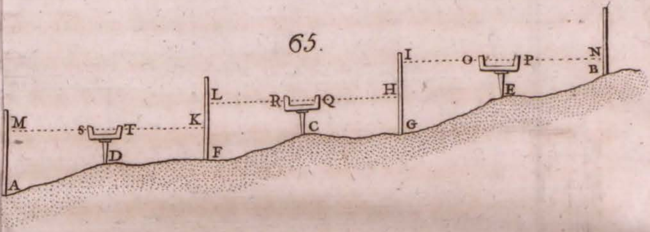
808 El instrumento que sirve para medir ángulos
76. en el terreno se llama *grafómetro*, y es un semicírculo de laton con quatro pínulas, dos de las quales *A* y *B* están en los extremos de su diámetro inmobil *AB*, y por lo mismo son inmobles; las otras dos pínulas *C* y *D* están en los extremos de una alidada mobil *CD*, por medio de un exe que está en el centro del instrumento. En lugar de las quatro pínulas suele llevar el grafómetro dos anteojos de larga vista, de los quales el uno está asegurado en el diámetro del instrumento, y el otro sirve de alídada mobil.

Los grados del semicírculo están señalados de dos modos opuestos desde la unidad hasta 180°. En cada extremo de la alidada mobil está señalada la linea diametral con una flor de lis, y sirve para señalar los grados. Al lado de esta linea hay doce divisiones iguales, que cada una vale $\frac{11}{12}$ de grado, ó 55 minutos, y sirven para distinguir los minutos de 5 en 5, conforme lo declara el exemplo siguiente.

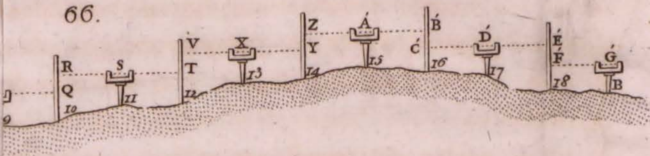
809 Supongamos que señale la linea diametral 1 grado y $\frac{1}{12}$ de grado, en este caso la primera de las divisiones de la alidada corresponderá puntualmente al grado siguiente, pues $\frac{1}{12}$ mas $\frac{11}{12}$ valen 1°. Si la flor de lis cogiese 2 ó $\frac{3}{12}$, la segunda ó tercera division de la alidada corresponderia al segundo ó tercer grado.

I.

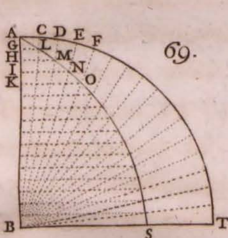
65.



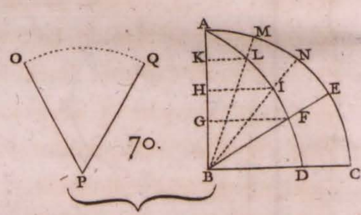
66.



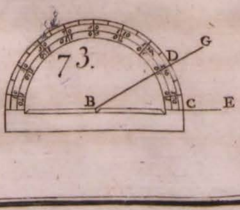
69.



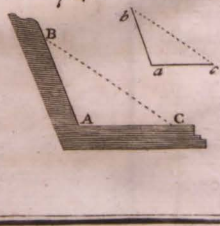
70.



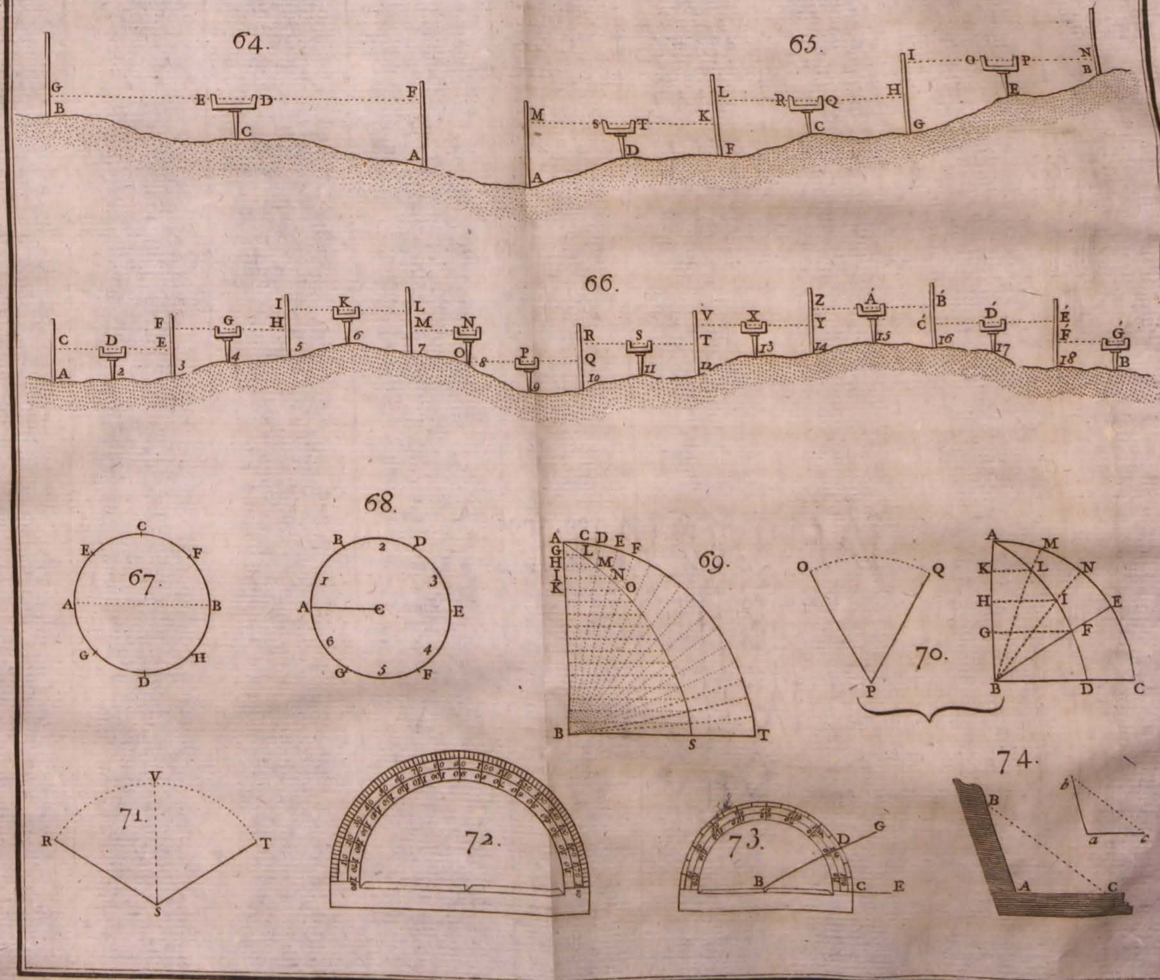
73.



74.



Tomo I. Plana. 524.



810 I. Para *medir, pues, con el grafómetro el ángulo* BAC, v. gr. se plantará el pie del instrumento en el punto *A*, donde concurren las direcciones de los objetos *B*, *C*; se pone despues á nivel el instrumento, y se dirije el rayo visual *OQ* del anteojo inmoble al uno de los dos objetos v. gr. *C*, antes de apretar el tornillo de la choquezuela; se pone despues el anteojo mobil *MN* fijo en la direccion del otro objeto *B*, y se cuentan los grados del arco *NQ*. Fig. 77.

Si cogiese la flor de lis algo mas allá del último grado, se mirará entre las divisiones de las pequeñas partes de la alidada qual es la que cae puntualmente sobre uno de los grados siguientes. Con esto se sabrá quantos minutos, ademas de los grados señalados, coge el ángulo propuesto.

Despues de apuntarle, vuélvase á ver, antes de mudar el instrumento, si las dos visuales se dirigen puntualmente á las dos lineas que forman el ángulo, y verifíquese si está apuntado cabal para asegurarse de que no se han movido las alidadas tropezando acaso con el sombrero, ó por otro accidente.

811 II. Para *medir el ángulo* BAC *formado por dos campanarios distantes y la señal* A, plántense junto á la señal, en la direccion *AB* dos jalones *M*, *N* (750), y otros dos *O*, *P* en la direccion *AC*; tómese despues el ángulo *PAN* (810). 78.

Este artificio es muy socorrido quando el grafóme-

tro

Fig. tro no lleva anteojos sino pínulas.

79. 812 III. Si hubiésemos de *medir el ángulo* ABC, *cuyo vértice está en un rio ó en un sitio donde no se puede colocar el instrumento*; sobre qualquiera de las dos bases, *BC* v. gr. se tomará un punto *m*, desde el qual se figurará la recta *mA*, se tomará el ángulo *CmA* (810); se medirá despues por alguno de los métodos que se declararán mas adelante, la corta distancia inaccesible *Bm* y el intervalo *AB*, y se hará la analogía siguiente:

El lado *AB*

Es al seno de *BmA*, suplemento de *AmC*,

Como el lado pequeño *Bm*

Es al seno de *BAm*, el qual se restará del ángulo *AmC*, para sacar el ángulo *ABC* que se busca.

813 IV. Quando el grafómetro hubiere de servir para medir un ángulo que esté en un plano vertical; esto es, un ángulo formado en un plano que pasa por lo que llamamos una linea á plomo; se colocará el plano del instrumento en una situacion vertical por medio de un plomo colgado en su centro. Quando el hilo del plomo rasa con el borde del instrumento, y coincide con la division de 90°, está el grafómetro en la situacion que corresponde.

Así, *para medir el ángulo* BAC *que la cuesta* AC

80. *forma con la orizontal* AB; colóquese el grafómetro al pie de la cuesta en la direccion *AD*, conforme acabamos de decir; levántese despues la alidada mobil hasta que por

ella

ella se vea la cabeza del jalon *C* plantado en lo alto de la cuesta ; el arco *mn* expresará el valor del ángulo *mAn* igual (302) con el ángulo *CAB*. Fig.

Métodos para la medida de las lineas.

814 Para medir y trazar en el papel lineas que tengan un número determinado de partes de una linea conocida, son de muchísimo uso las escalas que tambien se llaman *Pitipies*. Declararémos, pues, antes de pasar adelante, sus tres principales especies, el modo de formarlas y sus usos.

815 I. Para *hacer la escala que llaman* comun, *cuya longitud* AB *tenga cien partes*, v. gr. se dividirá *AB* en 10 partes iguales que representarán decenas; se tomará *AC* igual á una de estas decenas, y se dividirá en 10 partes iguales, estas serán las unidades de la escala; póngase cero en la division *C*, desde cuyo punto se empezarán á contar las decenas y las unidades. 81.

Quando ocurra tomar en esta escala un número determinado de partes, v. gr. 37, se pondrá la una punta del compas sobre las decenas en 30, y la otra sobre las unidades en 7, cuya abertura cogerá 37 partes.

Si fuesen bastante grandes las unidades que ha de expresar la escala, de modo que se pudiesen subdividir en otras, si fuesen v. gr. varas, y las quisiésemos subdividir en pies, se dividirá primero *AB* en 10 decenas, y cada una de estas en 10 unidades que representarán varas;

Fig. ras ; despues se dividirá la primer vara en tres partes iguales que representarán pies.

82. 816 II. Para *hacer una escala muy puntual sobre una longitud dada* DE ; tírese la *DE* en un plano muy igual, v. gr. en una lámina de cobre ó en un papel ; levántense las perpendiculares iguales *AD*, *BE* del largo que se quiera ; tírese la *AB* paralela á *DE*, y divídanse la *AB* y *DE* en diez partes iguales ; tómense *AC* y *DF* cada una igual á una de estas partes, y divídanse estas lineas en diez partes iguales ; júntense las divisiones de *AB* y *DE* con lineas rectas *CF*, 100 100, 200 200 &c. cuyas rectas serán perpendiculares á *AB* y *DE* ; divídanse las lineas *BE* y *AD* cada una en diez partes iguales, y desde una division á otra tírense lineas paralelas á *AB*. Desde una de las divisiones de *AC*, v. gr. desde 90, tírese á la inmediata sobre *DF* que es 100, una linea recta, y despues por todas las demas divisiones de *AC* tírense paralelas á dicha primer linea, las quales serán obliquas á *AC*. Señálense en las divisiones de *CB* y *FE* 100, 200, 300 &c. y en las divisiones de *AC* y *DF* señálense las decenas 10, 20, 30 &c. Finalmente, en las divisiones de *AD* señálense las unidades 1, 2, 3, 4 &c. y estará hecha la escala.

817 Con esta escala se pueden 1.° tomar quantas partes se quieran de la linea *DE* que representarán varas, pies, &c. supongamos que se pidan 54 partes ; busco en la linea *AC* la division 50, y en la linea *CF* la division

sion 4. Pongo la una punta del compas en K donde concurren estas dos divisiones, y la otra en 4. El intervalo $K4$ vale las 54 partes que se piden. Fig.

Los triángulos $CF10$, $C4p$ son semejantes por causa de las paralelas que pasan por las divisiones de AD; luego como CF vale 10 partes, de las quales $C4$ vale 4, valdrá tambien $4p$ quatro partes, diez de las quales componen $F10$. Pero desde K á p hay 50 partes, por la construccion de la escala; luego $K4$ vale las 54 partes que se piden.

2.° Saber quantas partes de la linea AC vale una linea dada. Se tomará esta linea con el compas, poniendo la una punta en la linea CF, y dirigiendo la otra ácia AD, para ver en que transversal cae; y suponiendo que caiga en el punto K, esto será señal de valer la linea dada 54 partes de AC.

818 III. Para *hacer una escala universal, esto es, una figura á la qual se pueda aplicar una linea que conviene dividir en un número de partes, el que se quiera.*

1° Trácese una linea BC mayor que qualquiera de las que ocurre comunmente dividir. Fórmese sobre ella un triángulo equilátero BAC; divídase la BC en diez partes que representarán decenas; pártase la primera de estas decenas en diez unidades, y desde el vértice A tírense lineas rectas á cada una de estas divisiones. 83.

Puede servir esta escala universal para hacer otra particular, cuyo largo sea EF el qual se ha de dividir en 10 partes. Se tomarán Ae, Af iguales con EF, y se

Fig. se tirará la paralela *ef*, esta estará dividida como se quiere (468).

819 2.° Puede tambien servir el *ángulo de reduccion*, el qual se hace del modo siguiente.

84. Tírese la *AB* indeterminada, en la qual se tomará la *AD* del largo que se quiera, y representará una decena; esta parte se llevará diez veces sobre la linea *AB*; desde el centro *A* y con el radio *AB* trácese el arco *BC*; desde el centro *B* y con un radio de 10, 20, 30, 40 &c. partes trácense arcos que dividan el arco *BC*; por el punto *A* y las divisiones del arco *BC* tírense lineas.

Para manifestar el uso de este ángulo de reduccion supongo que ocurra dividir la linea *GH* en 10 ó 100 partes. Se tomará la *Ag* igual con *GH*; desde el centro *A* y con el radio *GH* se trazará un arco *gh* el qual estará dividido por los radios en 10, ó en 100 partes. Se pondrá despues la una punta del compas en *g*, y la otra en una de las divisiones del arco *gh*; esta abertura de compas cogerá un número determinado de partes iguales de la linea propuesta.

820 Las *lineas pueden medirse en el terreno con una cuerda, con una cadenilla, ó con un compas.* Las mediciones se han de hacer con una medida invariable, y la cuerda suele encogerse con la humedad, y necesita de cierta preparacion para usarla con toda confianza. Aconsejan algunos que se tuerzan ácia distintos lados las hebras con las quales se quiere hacer la cuerda; que se la eche en

acey-

aceyte hirbiendo, y en estando seca se la pase por cera Fig.
derretida, y por fin se la encere. Se asegura que una cuerda preparada de este modo no se encoge aunque esté todo un dia en el agua.

821 Sirve tambien *la cadenilla*, la qual se compone de varios eslabones, cada uno de una medida determinada, v. gr. de un pie. Se le pueden dar treinta pies de largo, y bueno será hacerla de alambre no muy grueso, á fin de que por muy pesada no incomode. 85.

Como al tiempo de medir, el peso de la cadenilla ó de la cuerda la acorta, se la sostiene conforme aquí figuramos; porque está averiguado que un hilo de 24 pies de largo y de $\frac{1}{33}$ pulgada de diámetro, del peso de $161\frac{5}{6}$ granos, puesto tirante en direccion orizontal, con una fuerza de 10 libras, pandea enmedio linea y media. 86.

822 Una linea accesible por todos sus puntos se mide aplicándole succesivamente la medida con que se la quiere medir, sea cuerda, cadenilla, ú otra medida qualquiera.

823 Quando *la linea por medir está en un plano muy igual*, se toma con un compas comun ó con el de varas el largo de la medida, sea vara, estadal, y se le aplica varias veces en seguida la abertura de este compas sobre la linea que se quiere medir. 86.

824 Si la medicion de la linea por medir en el terreno se hubiese de executar muy cabal, se pondrá una cuerda muy tirante desde el uno de sus extremos al otro,

 ó

Fig. 6 entre estos se plantarán piquetes, y se pondrá succesivamente una cuerda desde cada piquete á su inmediato; despues se echará mano de dos medidas iguales, tan largas como se pueda, de un número cabal de medidas señaladas, v. gr. 10 pies. Cada una de estas medidas la llevarán dos hombres, y al primero de los dos que llevaren la segunda se le entregarán diez piquetes. Finalmente el medidor tendrá un libro de memorias.

La operacion empezará aplicando los hombres que llevan la primer medida á lo largo de la cuerda al extremo de la linea; y los que llevan la segunda, la aplicarán á lo largo de la cuerda inmediatamente á continuacion de la primera. Un peon que va delante dexa entre los dos primeros uno de los piquetes que tiene en la mano, y le coge el que lleva la otra medida. Se prosigue aplicando de este modo la primera y la segunda medida hasta el otro extremo de la linea; y quando el que lleva al principio los diez piquetes ha dexado el último, el que lleva el libro de memorias se los vuelve todos, y apunta en el libro el número de veces que ha vuelto los piquetes, que valen cada uno diez veces las medidas ó 100 pies.

Para mayor puntualidad conviene medir la linea dos ó tres veces; y si las mediciones salieren diferentes, se sumarán unas con otras, y la mitad, ó el tercio de la suma, segun sean dos ó tres las mediciones diferentes, será la longitud de la linea; ó mejor será tomar la menor de

de todas las mediciones, que suele ser la mas cabal. La Fig. razon es que no se pueden sacar dos mediciones iguales de una misma linea midiéndola con la cadenilla ó la cuerda, por no ser posible que en ambas operaciones tengan los medidores igualmente tirante la medida. De aquí resultará que saldrá la linea antes mas larga que corta; pues claro está que dexar floja la medida es lo mismo que medir con medida menor; y como esta ha de caber mas veces en la linea que no la mayor, es evidente que la medicion de una linea que mas se arrima á su verdadero valor, es la que se hace teniendo muy tirante la cuerda ó la cadenilla. Por consiguiente quando se toma dos veces la medicion de una misma linea, y salen desiguales sus valores, se debe preferir el menor.

825 Una linea puede ser inaccesible, ó en todo lo que coge de largo, ó en alguna de sus partes. Sea como fuese, debe procurarse hacerla lado de un triángulo, del qual se buscarán las cosas que le pueden determinar; ó considerando solo dicho triángulo ú otros triángulos auxîliares, se logrará despues conocer el lado que se busca por uno de los quatro métodos siguientes.

1.° Formando en un sitio accesible una figura igual con la imaginada para conocer la linea propuesta.

2.° Reduciendo á pequeño la expresada figura.

3.° Resolviendo dichos triángulos por Trigonometría.

4.° Resolviendo los mismos triángulos con instrumentos, como el compas de proporcion &c.

Fig. 826 Supongamos primero que se ofrezca *medir una*
87. *linea accesible por uno de sus extremos*, ó que se busque quanto coge la linea *AB* accesible en el punto *B*.

Desde el extremo *B* tírese una base *BC* en sitio donde se la pueda medir; figúrese el práctico la linea *AC* que concluya el triángulo; mida despues la base *BC* y los dos ángulos *B* y *C*, sacará el valor del lado *AB* (672).

827 Formando en el terreno en un sitio bastante
88. grande, llano y accesible por todas sus partes, el triángulo *abc* igual y semejante al triángulo *ABC*, cuya operacion es facil, pues son concocidos un lado y dos ángulos suyos; se medirá despues el lado *ab*, este será igual á la linea propuesta *AB*.

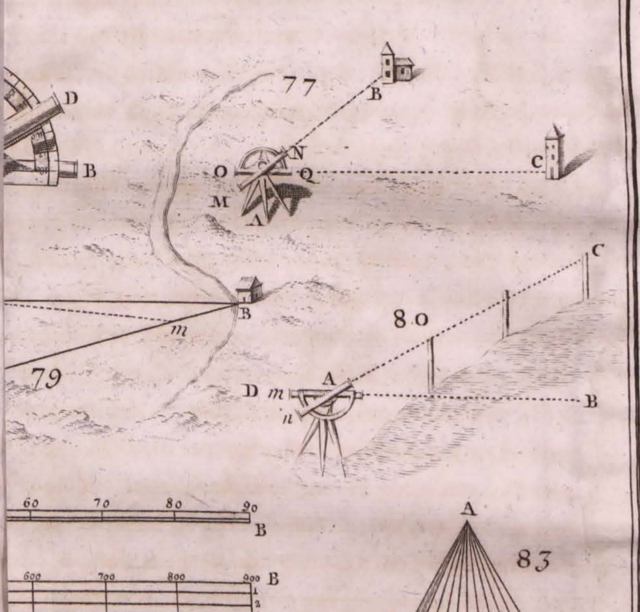
Esta operacion se puede abreviar de dos modos.

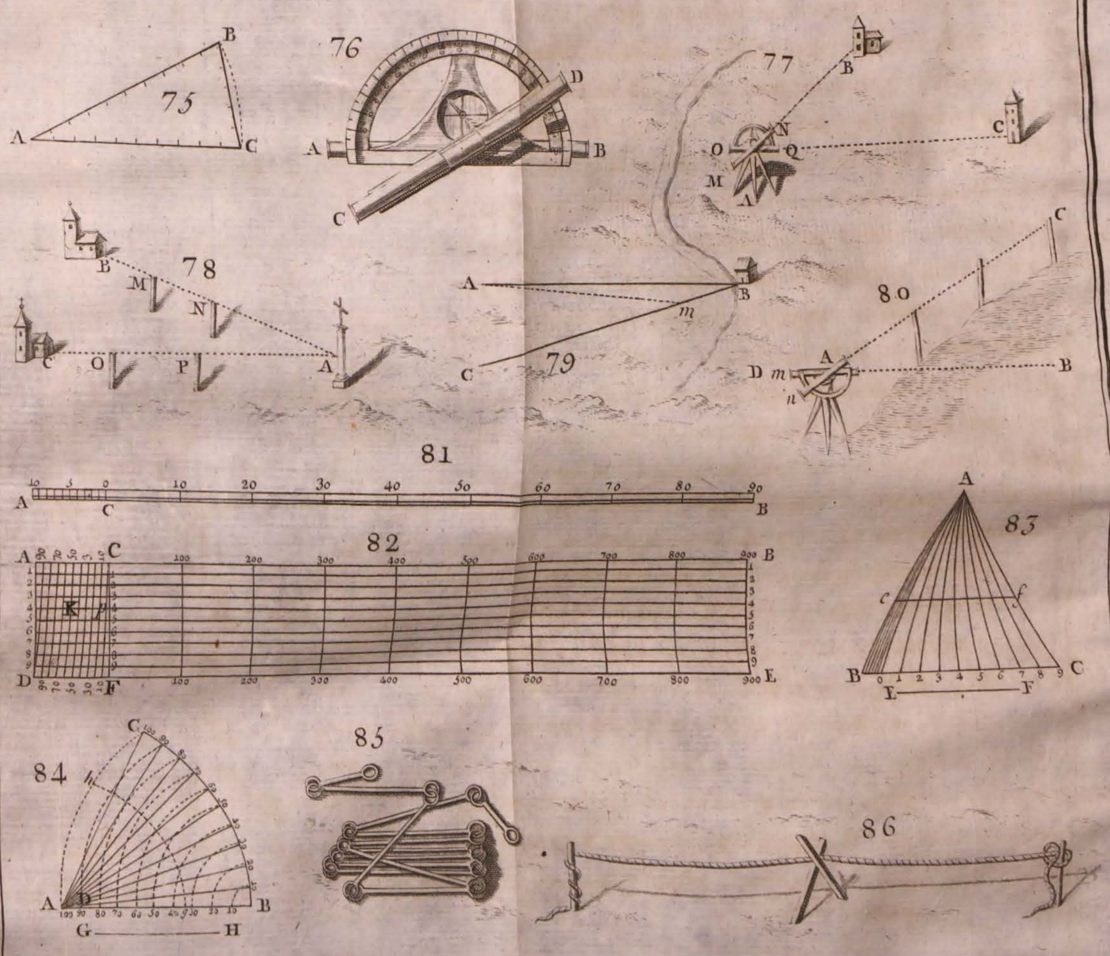
1.° Trastornando el triángulo del otro lado de la ba-
89. se, esto es, haciendo el ángulo *CBa* igual al ángulo *CBA*, y el ángulo *BCa* igual al ángulo *BCA*, las dos lineas *Ba*, *Ca* se encontrarán en *a*; midiendo despues *Ba*, se sacará el valor de la linea propuesta *BA* igual con *Ba*.

90. 2.° Tírese una base *BC* que forme un ángulo recto con la linea propuesta *AB*; prolónguese la *AB*, y hágase el ángulo *BCa* igual al ángulo *BCA*; la *Ca* encontrará *AB* prolongada en *a*; medida la *Ba* será su valor el de la linea *AB*.

828 II. Se puede hallar el valor de la linea *AB*, reduciendo el triángulo á pequeño por uno de los métodos siguientes.

I.


77
D
B
N
O
Q
C
M
A
C
B
m
80
79
A
D m
B
n
60 70 80 90
B
A
83
600 700 800 900 B
1 2 3 4 5 6 7 8 9
600 700 800 900 E
c
f
B
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
C
E
F
86


75
76
77
78
79
80
81
82
83
84
85
86

1.º Si la linea AB tuviese una parte accesible BG, Fig.
se medirá una base BC, y supongo sea de 60 varas. Se 91.
tomará Bc á arbitrio, de 15 varas v. gr. se hará el ángulo Bca semejante al ángulo BCA; la linea ca cortará la AB en a (si a estuviese mas allá de la parte accesible BG se tomaría la Bc mas corta); despues se medirá Ba que supongo de 19 varas, y se hará la siguiente regla de tres.

Como Bc. . . . . 15 V.
Es á BC. . . . . 60 V.
Así Ba. . . . . 19 V.
Es á BA. . . . . 76 V. esta será la longitud de la linea propuesta.

Para mayor comodidad conviene tomar Bc tal que sea el tercio ó el quarto &c. de BC, porque Ba será entonces el tercio ó el quarto de BA.

829 Por el mismo método se puede *medir la altu-* 92.
ra AB *de una pared ó de una torre* &c. por medio de la sombra del sol ó de la luna. A cuyo fin se medirá en un plano igual la longitud BC de la sombra de la altura AB; se plantará en el mismo plano un palo ba paralelo á BA; se medirá la parte del palo que esté fuera de tierra, y tambien su sombra; y finalmente por una regla de tres como la antecedente, se hallará la altura AB.

830 Si la linea BA no fuese accesible sino por su 93.
extremo B, se la prolongará ácia a, y tambien se prolongará la base lo que se quiera ácia c. Hágase la Bc,

Fig. v. gr. de 15 varas, y el ángulo *Bca* igual al ángulo *BCA*, y conclúyase la operacion como arriba (830).

94. 2.° Tírese en un plano igual, en un papel v. gr. una linea *bc* que tenga tantas partes de un pitipie, quantas varas tiene la *BC*; trácese despues sobre la linea *bc* el triángulo *bca* semejante al propuesto *BCA*; el lado *ba* tendrá tantas partes de la escala quantas varas *AB*.

95. 831 III. Para hallar *AB* por Trigonometría es preciso conocer la base *BC* que supongo de 60 V, los ángulos *B* de $64^\circ\ 3'$, y *C* de 54°. Entonces el tercer ángulo *A*, suplemento suyo, será de $61^\circ\ 57'$; con cuyos datos se hallará el lado *BA* por medio de la siguiente analogía (671).

El seno del ángulo *A*
Es al seno del ángulo *C*,
Como la base *BC*
Es al lado *AB* que se busca.

96. Si se pudiese medir una parte *BG* de la linea cuyo largo se quiere saber, y fuese v. gr. de 15 varas, tómese la base *BC* que forme con *BA* un ángulo recto, y figúrese el práctico las lineas *CA*, *CG*; mídase los ángulos *ACB*, *GCB*; si se toma despues *BC* por radio, será *BG* la tangente del ángulo *GCB*, y *BA* la del ángulo *ACB* (667). Nos dará el valor del lado *BA* la siguiente analogía.

La tangente del ángulo *GCB*. . . . . 12°
Es á la tangente del ángulo *ACB*. . . $37^\circ\ 56'$

Co-

Como la parte *BG*. . . . . 15 V Fig.

Es á toda la linea que se busca *BA*. $47\frac{5}{12}$ V.

832 *Si la linea por medir fuese una altura* AC, se 97.
plantará el grafómetro en *D* á alguna distancia del edificio; se medirá la distancia *CD*; se colocará el grafómetro de modo que su plan vertical corresponda al exe *AC* de la altura, y que su diámetro fijo *HF* esté orizontal, lo que se verificará por lo dicho (813). Se pondrá el diámetro mobil en tal situacion que por las pínulas ó el anteojo, si le lleva, se vea la cumbre *A* del edificio. Se mirará despues en el instrumento quantos grados coge el ángulo *FEG*, y los mismos cogerá su opuesto al vértice *AEB*.

Sentado esto, como la altura *AC* del edificio es perpendicular al orizonte, será perpendicular á *BE*; de aquí se origina un triángulo rectángulo *ABE*, en el qual son conocidos el ángulo recto, el ángulo *AEB*, y el lado *BE* igual á la distancia medida *CD*. Se buscará el lado *AB* por lo dicho (665), y añadiéndole la altura *DE* del instrumento, saldrá la del edificio *AC*.

833 Acerca de este modo de medir las alturas se nos ofrece prevenir que la operacion debe hacerse á una distancia mediana de las mismas alturas, á fin de que el error que se comete indispensablemente al tomar el ángulo de la altura, haciéndole mayor ó menor de lo que es en realidad, sea el menor que se pueda, y no dé muy errada la medida que se busca. Supongamos v. gr. que se

ofrez-

Fig. ofrezca medir la altura *AC*. Si observando desde el pun-
98. to *D*, en vez de tomar el ángulo *ADC* qual es en la realidad, se toma el ángulo *FDC* algo menor es patente que se nos hará la altura *AC* menor la cantidad *FA* que viene á ser mas de la quarta parte; pero si se toma el ángulo de la altura en el punto *B*, y en vez de tomar el ángulo *ABC*, que es el verdadero, se padece la misma equivocacion que antes al tomar el ángulo *EBC*, de suerte que el ángulo *EBA* sea igual al ángulo *FDA*; es evidente que este error, aunque igual con el primero, no disminuirá la altura *AC* sino la cantidad *EA* mucho menor que *FA*. Lo propio sucederia si el que hace la operacion se arrimase mucho á la altura que se propone medir. Este es el motivo porque ha de haber alguna proporcion entre la distancia á que el práctico está del objeto, y la altura del mismo objeto, cuya distancia ha de ser igual con poca diferencia á la misma altura, y se determina con tomar un ángulo de altura de 45°.

96. 834 IV. El que quisiese hallar el valor de *AB* por la Pantómetra, una vez conocidos en el triángulo *ABC* un lado y dos ángulos, practicará lo propuesto antes (714).

95. 835 En órden á lo dicho (826) conviene prevenir que quando el ángulo *ABC*, que forma la base con la linea propuesta, es determinado, se debe tirar la base *BC* igual, quanto se pueda, á la linea *AB*; ó, lo que es lo mismo, conviene apartar tanto el punto *C*, que el ángulo *BCA* sea la mitad del suplemento del ángulo *B*.

Por-

Porque si el ángulo C es la mitad del suplemento del ángulo B, será igual al ángulo A; luego en el triángulo ABC serán iguales los lados AB, BC (403), y por consiguiente lo mismo será medir CB que BA. Fig.

836 *Si la linea fuere accesible por sus extremos, qual suponemos la linea* AB, se tomará un punto C, desde el qual se puedan tirar dos bases CA, CB. En cuya operacion pueden ocurrir tres casos. 99.

837 I. Si se pueden medir los ángulos B y C y la base BC, se hallará el lado AB por lo dicho (672).

838 II. Si se puede medir el ángulo C, y las bases CB, CA, se hallará el lado AB por uno de los tres métodos siguientes. 100.

1.° Trasladando el triángulo á un sitio donde se le pueda medir, lo que se executa de varios modos: 1.° trasladándole entero á abc: 2.° dándole un lado BC por base comun con el primer triángulo: 3.° continuando los lados BC, AC mas allá del vértice. Este último medio es el mas acomodado para el que tiene á mano algun instrumento para medir los ángulos. 101. 102. 103.

2.° Reduciendo á pequeño el triángulo ABC, lo que se puede practicar de dos modos: 1.° tomando en los lados del triángulo ACB las partes Ca, Cb proporcionales á los lados CA, CB, de modo que sean v. gr. su mitad. Para mayor exâctitud se tomarán estas partes las mayores que se pueda, y en vez de tomarlas en los lados CA, CB, se pueden tomar en sus prolongaciones Ca, Cb: 2.° redu- 104.

Fig. duciendo el triángulo *ABC* á otro *abc* por medio de un pi-
100. tipie.

3.° Por Trigonometría, considerando que en el triángulo *ABC* los lados *CA*, *CB*, y el ángulo *C* que forman, son conocidos (677).

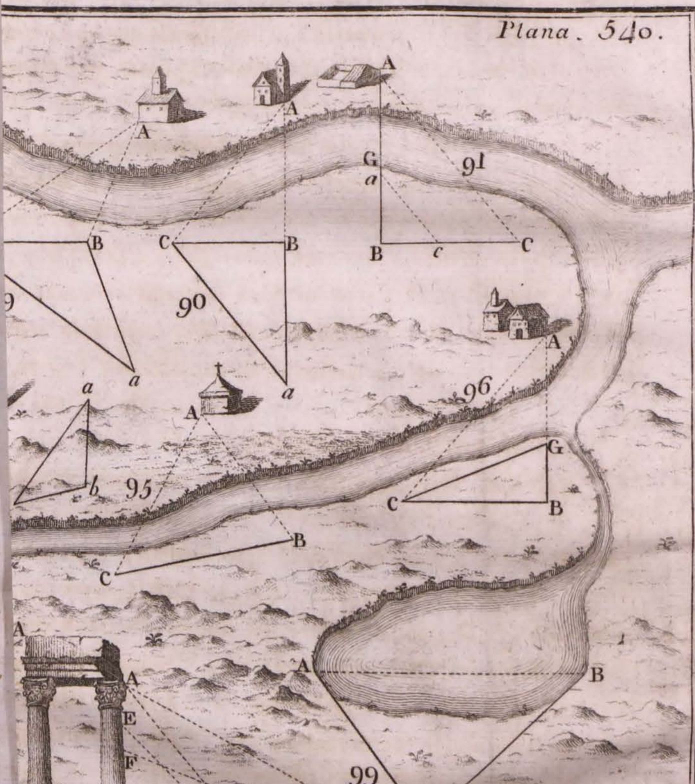
105. 839 III. Si no fuese posible hallar un punto *C* desde el qual se puedan ver los dos extremos *A* y *B* de la linea propuesta; escójanse dos puntos *C* y *D*, de suerte que se puedan medir los tres lados *BC*, *CD* y *DA*, y los ángulos *C* y *D* (trae utilidad hacerlos rectos): resultará de aquí un quadrilátero *ABCD*, cuyo lado *AB* se hallará por uno de los métodos arriba dichos; esto es,

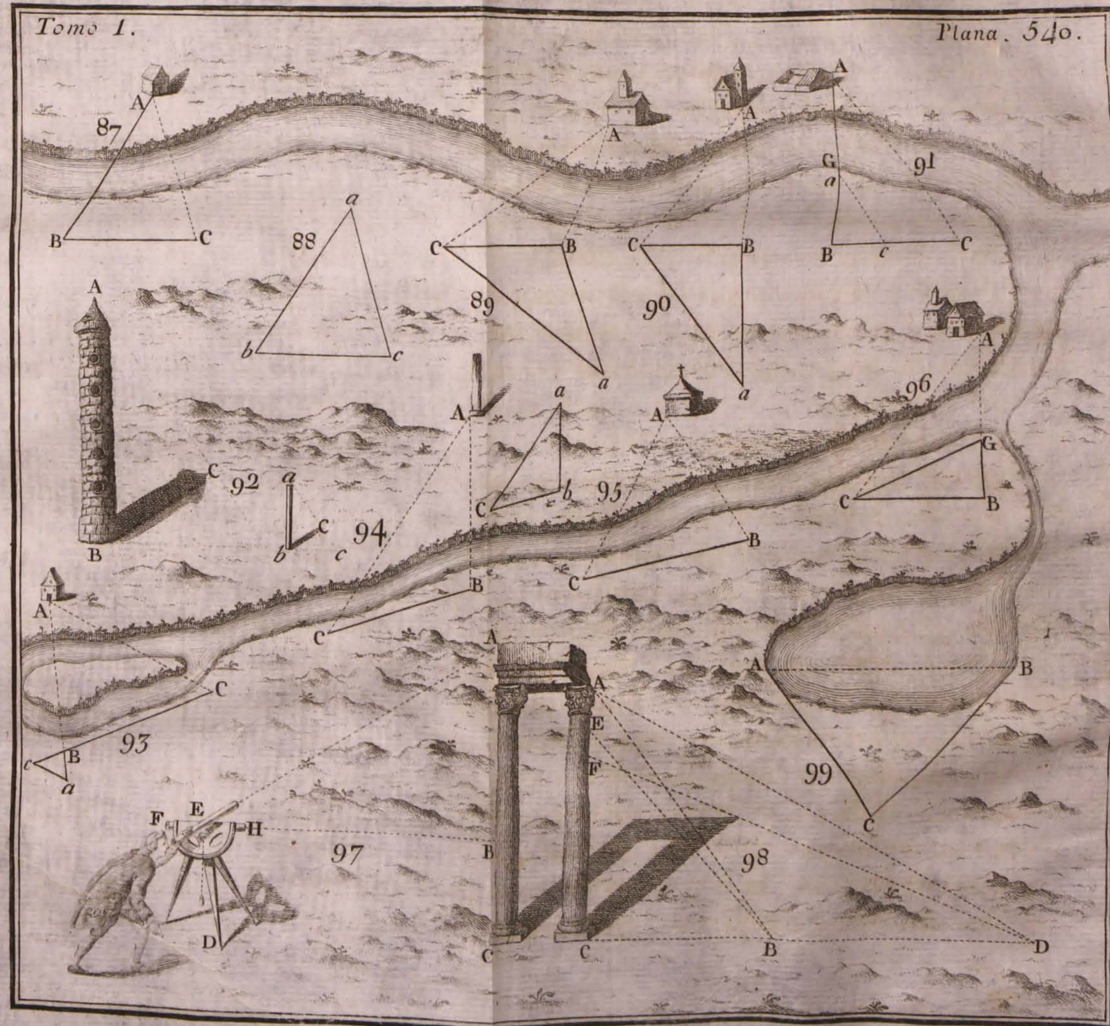
1.° Trasladándole.

2.° Reduciéndole á pequeño.

3.° Por Trigonometría, tirando las diagonales *BD*,
106. *CA*, y considerando que en el triángulo *ADC*, los lados *AD*, *DC*, y el ángulo *D* que forman, son conocidos; luego será facil conocer el lado *CA* (677), y el ángulo *ACD* que se restará del ángulo *DCB*, y resultará el ángulo *ACB*; con esto, en el triángulo *ACB* serán conocidos los lados *AC*, *CB*, y el ángulo *ACB* que forman, luego se hallará facilmente (677) el lado *AB*.

107. Si los ángulos *C* y *D* valiesen juntos dos rectos, quiero decir, si las dos lineas *CA*, *BD* fuesen paralelas (334); del lado mayor *CA* réstese *CE* igual á *BD*, de lo qual nacerá el triángulo *AEB*, en el qual serán conocidos los dos lados *AE*, *EB*, y el ángulo *AEB* igual al ángulo *C*; lue-


90
91
95
96
98
99
A
B
C
G
a
b
c
D
E
F


Tomo 1.
Plana. 540.
87
88
89
90
91
92
93
94
95
96
97
98
99

luego será facil hallar (677) el lado propuesto *AB*. Fig.
Sirve esta operacion para medir el ancho de una laguna, de una montaña, de un bosque, &c.

840 Pero *si la linea que se ha de medir fuese enteramente inaccesible*, qual suponemos la linea *AB*, á la qual no es posible acercarse; se medirá una base *CD* que sea, con poca diferencia, paralela é igual á la linea propuesta *AB*; por los extremos de cuya base se figurarán lineas tiradas á los extremos de la *AB*; mídanse los ángulos en *C* y *D*. Concluido esto, se hallará la linea *AB* por uno de los quatro métodos arriba declarados. 108.

841 *Si desde el extremo* C *de la base no se pueden ver los dos extremos de la linea propuesta* AB, tírese *CE* de modo que desde *E* se puedan ver los dos puntos *C* y *D*; figúrense tiradas las lineas *EA*, *EB*, *ED*, *DA*, *BD*, *CA* y *CB*; mídanse los ángulos en *E* y *D*, y la base *ED*; se sacará despues el valor de la linea *AB* por uno de los métodos declarados. 109.

842 En la eleccion de los puntos *D*, *C*, *E* conviene huir de formar triángulos de ángulos muy agudos, particularmente los que tienen sus vértices en los puntos *A* y *B* de la linea propuesta.

Esta operacion se ofrece quando se han de medir lineas que están al otro lado de un rio, un precipicio, y la distancia de dos sitios apartados uno de otro v. gr. dos campanarios; tambien sirve de fundamento para levantar el mapa de un pais.

Pa-

Fig. 110. 843 Para *medir la cuesta* AD *de una montaña inaccesible*, se medirán los ángulos MBA, BMA, y el lado BM del triángulo BAM, y será conocido el tercer ángulo MAB. Despues se dirá (671) sen $MAB : BM$ :: sen $B : MA$, y será conocido el lado AM del triángulo MAD, y el ángulo DMA suplemento de AMB. Se tomará despues una base MN que se pueda medir; sacando su valor y el de los ángulos DMN, MND, serán conocidos en el triángulo MND un lado MN, y los dos ángulos adyacentes; será por lo mismo conocido el tercer ángulo, y será fácil de hallar el valor del lado MD. Luego en el triángulo AMD se conocerán dos lados, y el ángulo que forman AMD. Será, pues, fácil hallar (677) los demas ángulos del mismo triángulo, y por consiguiente el tercer lado ó la inclinacion AD de la montaña.

844 *Si se hubiese de medir la altura* AP *de la misma montaña*; despues de sacado, por lo que acabamos de decir, el valor del lado MA, y del ángulo AMP serán conocidos en el triángulo rectángulo AMP la hypotenusa, y el uno de los ángulos agudos, y por consiguiente el otro ángulo tambien. Se dirá, pues (664), R : sen AMP :: $AM : AP$, cuyo quarto término será el valor de la altura AP. Para *sacar la distancia orizontal desde el punto* M *al punto* P *del orizonte*, *al qual corresponde la cumbre* A *de la montaña*, se dirá R : sen MAP :: MA : MP.

De

Fig.

De las Figuras.

845 Acerca de las figuras se puede ofrecer 1.° trazarlas; 2.° transformarlas unas en otras; 3.° dividirlas.

El fin principal para que suelen trazarse las figuras, se encamina á trazar una figura igual ó semejante á otra, cuya operacion es la misma que levantar un plano quando está en el terreno la figura que se busca. Porque como no es posible formar en el papel una figura igual á una casa, huerta ó provincia, para enterarse de sus dimensiones, han acudido los prácticos al artificio de imitar en pequeño las figuras cuyas dimensiones se quieren expresar. Siendo la figura pequeña semejante á la propuesta, se dá noticia cabal de los ángulos y dimensiones de la primera, por las condiciones en que estriba la semejanza de las figuras (479).

846 *En el caso de ser pequeña la figura propuesta, como quando está trazada en el papel, puede ocurrir trazar otra igual con ella, cuya operacion se executa de varios modos.*

I. Si fuese rectilinea la figura, y poco complicada como *ABCDE*, se tirará la linea *ab* igual con *AB*, y 111.
la llamarémos base de la figura; se buscará el punto *c* á igual distancia de los extremos de *ab* que el punto *C* de los de la *AB*; del mismo modo se buscarán los demas puntos *d*, *e* respecto de los extremos *a*, *b*, ó de otra linea qualquiera v. gr. *be*.

Para asegurar el acierto de esta operacion conviene

1.°

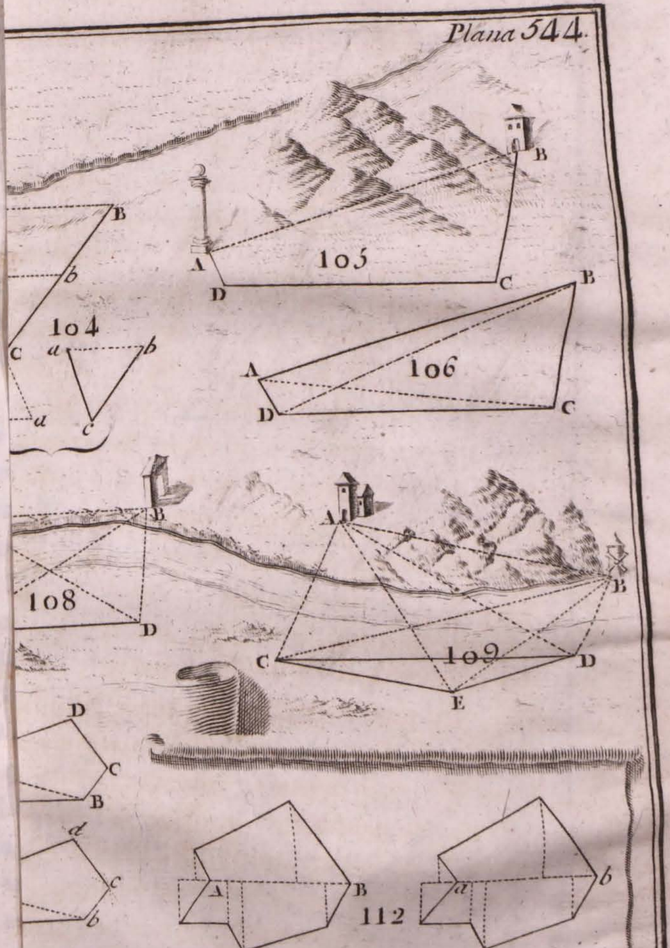
Fig. 1.° tomar por base la linea mayor *AB* de todas las de la figura. Si todas las lineas fuesen muy cortas, se tirará dentro de la figura, por su mayor dimension, una linea recta v. gr. la *EB* para que sirva de base.

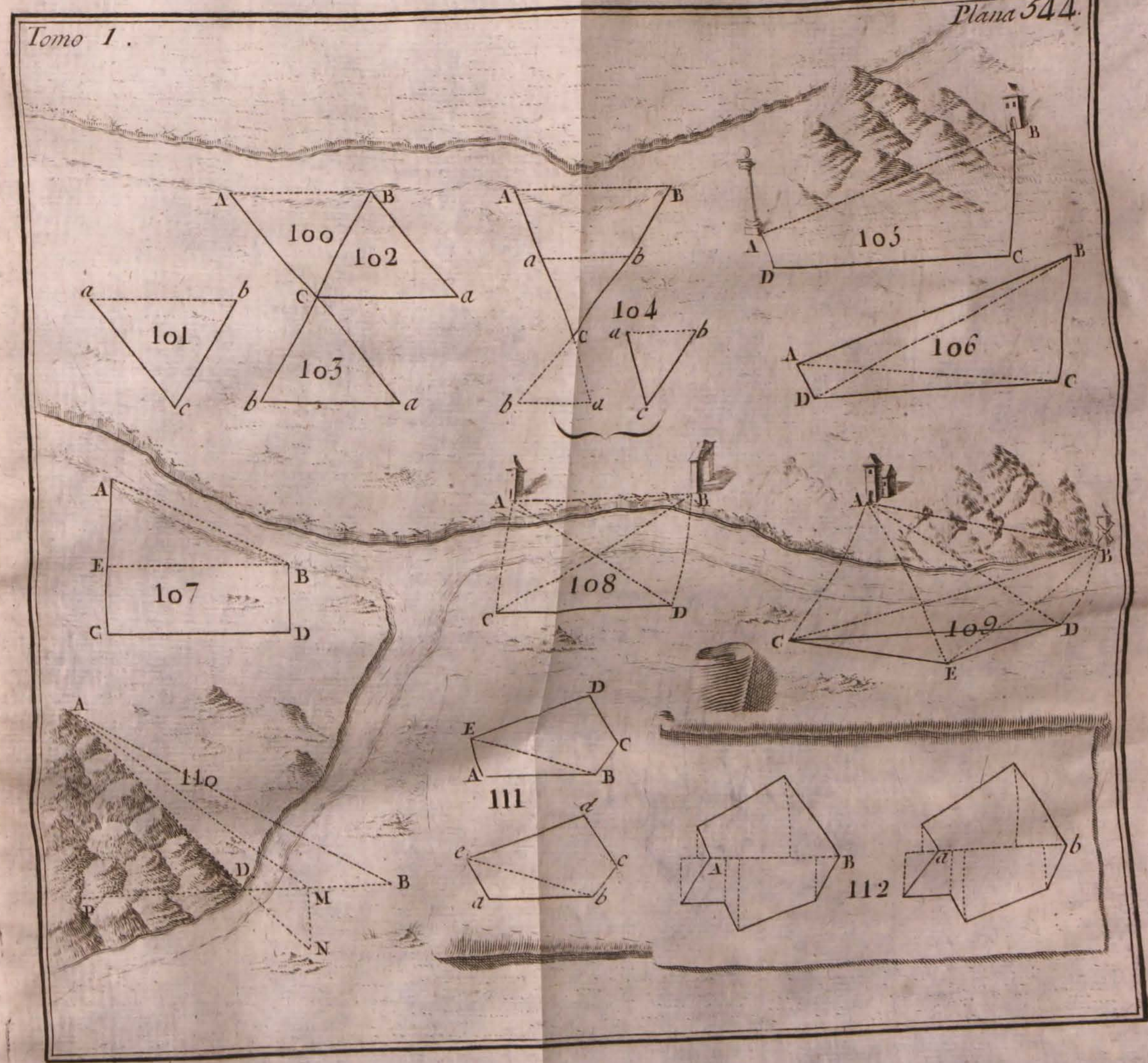
2.° Si alguno de los puntos cuya posicion se busca, estuviese tan distante de la base, ó tan á un lado respecto de ella, que las dos lineas tiradas desde dicho punto á los extremos de la base formaran un ángulo ó muy agudo, ó muy obtuso, se buscará su posicion desde un punto que fuese vértice de un ángulo que se acercare mucho á un ángulo recto; tirando desde este punto al uno de los extremos de la base una linea recta, esta servirá de base para determinar los puntos que eran vértices de ángulos muy agudos ú obtusos respecto de la primer base.

3.° Si fuese irregular la figura, y bastase señalar la posicion de algunos puntos principales, y trazar lo demas á ojo; en este caso se tirará una linea que pase por el mayor número posible de dichos puntos, cuya linea servirá de base para determinar la posicion de los demas.

112. 847 II. Se puede tirar una linea *AB* que atraviese la figura siguiendo su mayor dimension, y que pase por muchos de los puntos cuya posicion se quiere señalar; cuya linea tambien se llamará *base*. Desde cada punto principal de la figura se baxarán perpendiculares á la base; se tirará despues separadamente una base indefinita *ab*, en la qual se señalarán las distancias de las perpendiculares, y al uno y otro lado se levantarán perpendiculares

igua-


Plana 544.
104
105
106
108
109
112
A
B
C
D
E
a
b
c
d


Tomo 1.
Plana 544.
100
101
102
103
104
105
106
107
108
109
110
111
112

iguales á las de la figura propuesta, mediante lo qual quedará señalada la posicion de todos los puntos que determinan la figura igual que se busca. Fig.

Si las perpendiculares fuesen muy largas, sería preciso tirar en la figura dada, por no incurrir en alguna equivocacion, dos lineas *AB*, *CD* muy perpendiculares una á otra, cuyas lineas servirian de base para señalar la posicion de los puntos mas inmediatos á ellas; ó deberian tomarse tres puntos *A*, *B*, *C*, tan distantes unos de otros quanto se pudiere, y en tal posicion, que los triángulos que causasen las lineas tiradas de unos á otros se acerquen quanto quepa á equiláteros, con el fin de escusar algunos muy agudos. Las lineas *AB*, *AC*, *BC* servirán de bases, á las quales se tirarán desde los puntos *D*, *E*, *F* &c. mas inmediatos las perpendiculares *DD*, *EE*, *FF* &c. Despues se formará otro triángulo *abc* igual con el precedente *ABC*, respecto de cuyos lados se señalarán las distancias de las perpendiculares, conforme se hizo antes respecto de las lineas que sirven de bases. 113. 114.

848 III. Descríbase al rededor de la figura dada una quadrícula, esto es, tírese una linea *AB* paralela á la dimension mas larga de la figura, y que pase por su punto mas saliente; tíresele otra linea perpendicular *AC*, que tambien pase por el punto mas saliente de la figura que está de su lado; aplíquensele unas despues de otras á la linea *AB* partes iguales del tamaño que se quiera; aplíquense las mismas á la *AC*; tómese en la *AB* el pun- 115.

Fig. to *B* inmediatamente fuera del ancho de la figura, y el punto *C* mas allá de su altura; acábese el rectángulo cuyos lados opuestos se dividirán del mismo modo que los primeros, tirando lineas paralelas desde las divisiones del uno á su opuesto; este rectángulo dividido en quadros se llama *quadrícula.*

Quando con este instrumento se quiera hacer una figura igual á otra propuesta, trácese otra quadrícula *abcd* igual con la primera; señálense despues, si fuese menester en un mapa de la figura que se ha de copiar, los rios, las costas, las ciudades &c. en los puntos de los quadrados correspondientes á los de la figura propuesta. Hecho esto, será fácil concluir el dibujo.

Para sacar la figura con mas puntualidad conviene 1.° que los quadros sean pequeños, lo que se consigue señalando con lineas gruesas *EF*, *GH* &c. quadros grandes cuyos lados estarán divididos en dos, tres, cinco ó en diez partes iguales, mas ó menos, segun la puntualidad con que se quiera sacar el dibujo mas ó menos puntual, cuyas lineas formarán quadros pequeños; ó se logrará dividiendo estos quadros grandes, los que fuere menester por lo menos, en quadros pequeños por medio de diagonales, y estos con nuevas diagonales. Esta es la práctica comun de los dibujantes.

2.° Por no echar á perder el dibujo original, se puede hacer la quadrícula con hebras de hilo ó seda aplicándolas á la figura dada, haciendo otra quadrícula igual pa-

para la figura que se quiere sacar. Fig.

849 IV. Se puede sacar tambien una figura igual á otra pasándola ó picándola, lo que se executa de varios modos.

1.º Aplíquese el papel en que está formada la figura sobre otro papel, de modo que esté muy firme; píquese despues la figura con un alfiler muy sutil en los puntos que sirven para determinarla; señalados estos, será fácil sacar la figura.

2.º Píquense con un alfiler los puntos principales de la figura propuesta, y aplíquese el papel donde está trazada sobre el papel donde se quiere sacar el dibujo; tómete un cisquero, esto es, un pedazo de lienzo atado por las puntas, en que hay un poco de carbon molido, y dese con él sobre todos los puntos picados de la figura (esto se llama *estarcir*); despues de quitado el papel picado se hallará en el de abaxo la figura bosquejada con el cisquero; finalmente se recorren estos puntos con tinta ú otra cosa permanente.

3.º Tómese un pliego de papel teñido de algun color fácil de quitar, v. gr. lapiz colorado ó negro, ó lapiz-plomo &c.; aplíquese el pliego ó la hoja teñida sobre la hoja donde se quiere trazar el dibujo; póngase sobre estas dos hojas aquella en que está la figura propuesta, y por los perfiles de esta pásese una punta roma apretándola algun tanto, y quedará calada la figura sobre la tercer hoja.

Fig. 4.° Aplíquese la figura dada á un cristal de balcon, detras del qual haya mucha luz (supónese la figura en un papel muy trasparente); aplíquesele encima de esta hoja otra de papel blanco, en la qual se señalarán los perfiles de la figura propuesta, los quales se verán al través del papel. Esta práctica es muy comun para copiar dibujos de fortificacion, particularmente quando se quiere conservar el original.

5.° Tómese una hoja de papel encerado, que se hace ó bien dándole con mezcla de cera y trementina, ó bien con aguarrás y barniz de aguarrás; aplícase la hoja encerada sobre la figura propuesta; síganse con tinta los perfiles de la figura que se verán al través del papel encerado, los quales se señalarán despues en otro papel limpio practicando alguno de los métodos antes propuestos. El papel encerado ha de estar muy seco, porque si no lo estuviere echará á perder el dibujo sobre el qual se le aplique.

850 Veamos ahora como se puede *hacer una figura semejante á una figura dada.* Para esta operacion sirven los mismos métodos que para hacer una figura igual á otra, buscando puntos que correspondan á los de la figura dada. Como estos puntos se hallan por ángulos y lineas, siempre se han de hacer en la figura que se busca los ángulos iguales con los de la figura dada; pero las lineas de la segunda se han de hacer proporcionales á las de la primera, lo que se conseguirá por alguno de los métodos siguientes.

I.

I. Fórmense dos escalas, la una para la figura dada, y la otra para la figura que se ha de trazar; búsquese por la escala de la figura dada el valor de las lineas que sirven para determinar dicha figura; si es v. gr. un polygono, sáquese el valor del radio *AC*, y el del lado *AF*; tírense perpendiculares desde los ángulos de la figura á la *AF* &c.; hágase lo propio con los demas lados del polygono propuesto. Tírese despues una linea *af* que tenga tantas partes de la segunda escala quantas caben en el lado *AF* de la primera, y conclúyase la descripcion del polygono *abcdef* con las mismas circunstancias que determinan el primero. Fig. 116.

II. Hágase una quadrícula *ABCD* al rededor de la figura dada, y hágase otra semejante para la figura que se quiere trazar; colóquense en la segunda quadrícula los puntos que determinan la figura, la qual despues se concluirá con suma facilidad. 117.

Este es el método que mas se usa para la reduccion de los mapas, planos &c.

851 Trazar una figura semejante á otra es, segun llevamos dicho (844), lo propio que levantar el plano de un terreno. Cuya operacion consiste en determinar en el papel puntos que estén colocados unos respecto de otros, del mismo modo que lo están en el terreno los objetos que dichos puntos han de representar. Supone el que levanta un plan que todos los objetos cuya situacion ha de determinar, están en un mismo plano orizontal;

Fig. pero si no lo estuviesen, de modo que las operaciones executadas para determinar las situaciones respectivas de los objetos, no se hubiesen practicado todas en un mismo plano orizontal, á no ser que fuese muy corta la diferencia, convendria, antes de trazar el plan, reducir dichas observaciones á lo que hubieran sido, si se hubiesen hecho en un plano orizontal. Declararémos primero lo que conviene practicar quando se hacen las operaciones en un plano orizontal; despues se declarará como se reducen á lo que serian si se hubiesen hecho en el mismo plano orizontal.

852 Sean, pues, *A,B,C,D,E,F,G,H,I,K* muchos
118. objetos cuya posicion respectiva se ha de representar en un plan.

Se dibujarán primero toscamente los tales objetos en un papel, dándoles las situaciones que á ojo parezca tienen; á cuyo fin el que levantare el plan tendrá que ir á los diferentes sitios donde conviniere, para formar algun juicio de todos los objetos propuestos. Este primer dibujo, que se llama *borrador*, servirá para señalar las diferentes medidas que se irán tomando en el discurso de las operaciones.

Se medirá una base *AB*, cuyo largo no sea desproporcionado con la distancia de los objetos mas remotos que desde sus extremos se pueden ver, y que al mismo tiempo sea tal, que desde sus extremos se pueda alcanzar el mayor número de objetos que posible sea; se medirán

con

con el grafómetro en el punto *A* los ángulos *EAB*, *FAB*, *GAB*, *CAB*, *DAB* que forman en el punto *A* con la base *AB*, las lineas que se figuren tiradas desde dicho punto á los objetos *E,F,G,C,D*, los quales, segun supónemos, se pueden ver desde los extremos *A* y *B* de la base; del mismo modo se medirán en el punto *B* los ángulos *EBA*, *FBA*, *GBA*, *CBA*, *DBA* que forman en dicho punto con la linea *AB*, las lineas que se figuren tiradas desde dicho punto *B* á los mismos objetos que antes. Fig.

Si algunos objetos, v. gr. *H,I*, no se pudiesen ver desde los extremos *A* y *B*, será preciso pasar á dos de los puntos *E* y *F* observados antes, desde los quales se puedan ver los dos objetos *H*, *I*; se considerará la *EF* como una base, y se medirán los ángulos *HEF*, *IEF*, *HFE*, *IFE* que formarán con esta nueva base las lineas que se figuren tiradas desde sus extremos á los dos objetos *H,I*. Finalmente, si algun objeto como *K* no se hubiese podido ver ni desde los extremos de *AB*, ni desde los de *EF*, se tomará por base otra linea v. gr. *FG* que vá desde uno de los puntos observados á otro, y se medirán del mismo modo en sus dos extremos los ángulos *KFG*, *KGF*.

Sentado esto, en los triángulos *ACB*, *ADB*, *AEB*, *AFB*, *AGB* conocemos el lado *AB*, y los dos ángulos adyacentes; luego será fácil calcular (672) los otros dos lados.

Fig. Por lo que mira á los triángulos HEF, IEF, como no se han medido mas que los ángulos sobre EF, se calculará desde luego EF por medio del triángulo EAF en el qual son conocidos el ángulo EAF, diferencia de los dos ángulos observados EAB, FAB, y los lados AE, AF determinados por el cálculo antecedente; será, pues, fácil de hallar el valor de EF por lo dicho (677). Hecho esto, en cada uno de los triángulos HEF, IEF serán conocidos el lado EF, y los dos ángulos adyacentes; se calcularán los otros dos lados del mismo modo que los primeros; y lo mismo se practicará con el triángulo KFG.

Despues de executados estos cálculos, se tirará en el papel una linea ab, dándole tantas partes de la escala
119. que ha de determinar el tamaño del plan, quantas varas ó pies tuviere AB; para determinar despues qualquiera de los dos puntos que se han podido ver desde los extremos A y B de la base, v. gr. el punto E, se tomarán en la escala tantas partes quantas varas ó pies tuviere AE segun el cálculo; y desde el centro a, con el radio ae igual á dicho número de partes, se trazará un arco. Se tomarán tambien en la escala tantas partes quantas varas ó pies tuviere BE, y desde el centro b, y con un radio igual á dicho número de partes, se trazará un arco que corte en el punto e, el que se trazó con el radio ae, el qual representará en el papel la posicion del punto e respecto de ab, semejante á la de E respecto de AB; porque en virtud de esta construccion el triángulo aeb tiene sus lados pro-

proporcionales á los del triángulo *AEB*. Son, pues, semejantes los dos triángulos. Por el mismo método se determinarán los puntos *f,g,c,d*, que han de representar los puntos *F,G,C,D*. Fig.

Por lo que mira á los puntos *h,i,k*, que han de representar los puntos *H,I,K* que suponemos no poderse ver desde los puntos *A,B*; despues de determinados los puntos *e,f,g* conforme se ha dicho, servirán de base las líneas *ef*, *fg*, del mismo modo que sirvió *ab* para *c,d,e,f,g*; por manera que la operacion tambien se reducirá á trazar desde los centros *e* y *f*, y con los radios *he*, *hf*, que tienen tantas partes de la escala quantas varas ó pies se hallaron por el cálculo en *HE*, *HF*, dos arcos cuya interseccion *h* señalará el punto *H*; y así de los demas. Con esto la figura trazada en el papel será semejante al terreno dibujado, pues se compondrá de igual número de triángulos que este, semejantes á los del terreno, y colocados del mismo modo; solo faltará dibujar en cada uno de dichos puntos los objetos que en ellos se hubieren observado; las partes de entremedias, que no requieren tanta escrupulosidad, se colocarán por los medios que luego dirémos.

Prevengo que como este método sirve para determinar los puntos principales y fundamentales del plan, es mejor un grafómetro con anteojos de larga vista que no con pínulas.

853 Si los objetos observados en las operaciones an-

Fig. antecedentes no estuviesen todos en un mismo plano orizontal, será preciso, antes de concluir el dibujo que los ha de representar, reducir los ángulos á lo que serian si todos los objetos hubieren estado en un mismo plano orizontal; cuya operacion se executa como sigue.

120. Sean *A*,*B*,*C* tres puntos en distintas alturas sobre el orizonte, las quales sean respectivamente *AD*, *BF*, *CE*; de suerte que sea *FDE* un plano orizontal. Ya se midió el ángulo *BAC*; pero como queremos referir los tres objetos al plano *FDE* nos hemos de figurar que *B* está en *F*, *A* en *D*, y *C* en *E*, y hemos de valuar el ángulo *FDE*.

En la estacion que se haga para medir el ángulo *BAC*, se medirán tambien los ángulos *BAD*, *CAD* que forman las visuales *AB*, *AC* con el plomo en *A*, y se practicará lo dicho (814).

Supongamos ahora que *AB* y *AC* prolongados, si fuese menester, encuentran el plano orizontal *FDE* en los puntos *G*, *I*; si en los triángulos *ADG*, *ADI*, rectángulos en *D*, hacemos *AD* el radio de las tablas, serán *DG* y *DI* las tangentes de los ángulos observados *GAD*, *IAD*, y serán *AG*, *AI* sus secantes; luego si se toman en las tablas las secantes y las tangentes de los ángulos *GAD*, *IAD*, conocerémos 1.° en el triángulo *GAI*, los lados *GA*, *AI*, y el ángulo observado *IAG*. Será, pues, facil calcular por lo dicho (677) el lado *GI*. 2.° en el triángulo *GDI* conoceremos los lados *GD*, *DI*, y el

la-

lado *GI* calculado antes. Será, pues, facil calcular por lo dicho (675) el ángulo *GDI*. Fig.

Lo propio se practicaría para reducir el ángulo observado en el punto *B*; y despues de reducidos en un triángulo dos ángulos, será escusado otro cálculo para reducir el tercero, porque como los tres no valen mas que 180°. será fácil sacar el tercero.

Reducidos por este medio los ángulos, se reducirán fácilmente las distancias, ó una de ellas, porque con una basta en cada triángulo. Con efecto, si nos figuramos la orizontal *BO*, en el triángulo *BAO*, rectángulo en *O*, conocerémos *BA* que se midió, el ángulo recto y el ángulo *BAO*; se sacará, pues, fácilmente *BO* ó *FD* (669).

Con un exemplo aclaremos mejor quanto acabamos de decir. Supongamos que por observacion sepamos ser el ángulo *BAC* de 62° 37′, el ángulo *BAD* de 88° 5′, el ángulo *CAD* de 78° 17′.

Busco en las tablas las secantes y tangentes de los ángulos *BAD*, *CAD*, y omitiendo las tres últimas decimales, hallo los valores siguientes.

Sec.	88° 5′	ó	*AG*......	29,90
Sec.	78° 17′	ó	*AI*......	4,92
Tang.	88° 5′	ó	*DG*......	29,88
Tang.	78° 17′	ó	*DI*......	4,82

Calculo en el triángulo *AGI* (676) la semidiferencia de los ángulos *AGI*, *AIG*, por esta proporcion $AG + AI : AG - AI ::$ tang. 58° 41′ semisuma de dichos ángu-

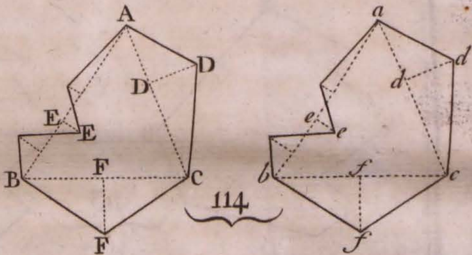
Fig. gulos, es al quarto término $49^{\circ}\ 42'$, que será dicha semidiferencia; de donde sacamos que el ángulo *AGI* vale $8^{\circ}\ 59'$, y será (672) *GI* de 27,98.

Una vez conocidos los tres lados *DG*, *DI*, *GI*, se hallará que el ángulo *GDI* es de $62^{\circ}\ 27'$ (675).

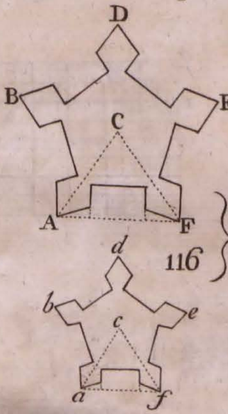
854 No es indispensable la Trigonometría para levantar un plan, sino quando los puntos principales del sitio cuyo mapa se quiere formar, están á distancias muy grandes unos de otros. Pero quando no, despues de medida una base, y observados los ángulos conforme hemos enseñado (852), en lugar de calcular los triángulos, para formar por medio de los lados calculados y reducidos á la escala del plan, triángulos semejantes á los que se han observado en el terreno, basta formar dichos triángulos semejantes por medio de los ángulos observados conforme vamos á declararlo.

Este método es menos exâcto que el antecedente, porque como el semicírculo graduado ó, en general, el instrumento que sirve para formar en el papel ángulos iguales á los que se han observado en el terreno, no puede ser sino de un radio muy corto, no se pueden formar dichos ángulos con la misma precision que con la escala se mide el valor de los lados que se determinan por cálculo.

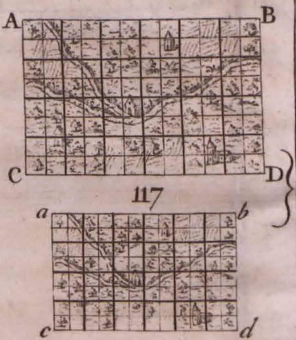
Pero como pocas veces se necesita una puntualidad tan escrupulosa, y es mas breve el método de trasladar los ángulos al papel, debe este mirarse como suficiente y
119. bastante seguro. Cuyo método consiste en tirar una linea



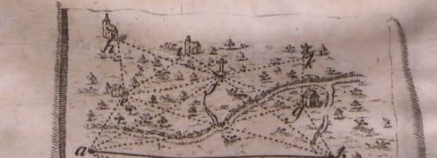
114



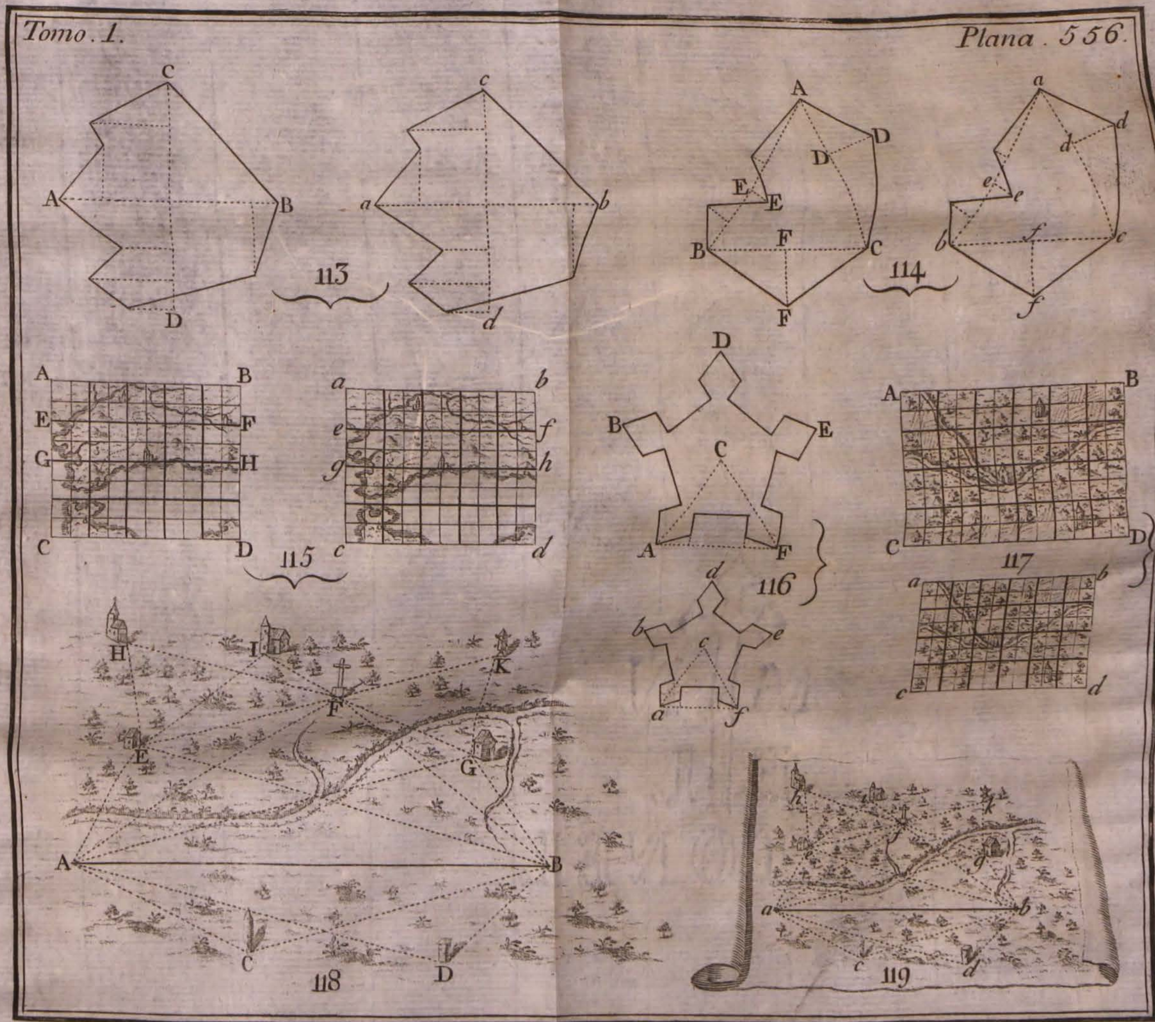
116



117



119


Tomo. I.
Plana. 556.
113
114
115
116
117
118
119

nea *ab* que tenga tantas partes de la escala del plan quantas medidas caben en *AB*. Se hacen despues en los extremos *a*,*b* los ángulos *eab*, *eba*, *fab*, *fba* &c. iguales con los ángulos observados *EAB*, *EBA*, *FAB*, *FBA* &c. que los objetos que se han podido ver desde los puntos *A* y *B* forman con la base *AB*. Juntando despues los puntos *e*, *f* con la recta *ef*, se forman en los extremos de esta linea, tomándola por base, ángulos iguales con los observados desde los puntos *E* y *F*; y así prosiguiendo. Fig. 118.

855 Despues de determinados los puntos fundamentales de un plan por un método riguroso, se determinan los de menos importancia, y se traza menudamente el plan por otros métodos, los quales, bien que no tan rigurosos como el antecedente, son sin embargo suficientes para los fines á que se encamina esta operacion. Sirvan para este fin dos instrumentos sumamente socorridos, es á saber la *brújula* y la *plancheta*.

856 La brújula es un instrumento de cobre, marfil, madera ú otra materia sólida, cuyo diámetro suele variar, habiendo brújulas desde dos hasta seis pulgadas de diámetro; su parte interior está hecha á manera de círculo, en el qual ván señalados dos diámetros que se cortan á ángulos rectos, para señalar con sus extremos los quatro puntos del mundo que llaman *cardinales*, y son Norte, Sur, Oriente y Poniente. En el extremo que ha de representar el norte, está pintada una flor de lis, desde la qual empieza la division del expresado círculo en 360°, yendo 121.

ácia

Fig. ácia el oriente ó ácia la derecha estando en la parte de arriba la flor de lis. Para entender esto, conviene considerar que el que mira la brújula de modo que esté la flor de lis arriba, está en la misma situacion que el que mira al cielo estando de cara al norte; el qual tiene siempre el sur á las espaldas, el poniente á mano izquierda, y el oriente ó sol naciente á la derecha.

En el centro del expresado círculo se planta un exe de cobre ó acero muy puntiagudo, sobre el qual se coloca una aguja de acero imantada ó tocada á la piedra iman muy en equilibrio, á fin de que pueda dar vueltas con sumo desahogo. Tapa todo lo dicho un cristal redondo afianzado en un rebaxo hecho de intento al rededor del círculo, para precaver que el ayre menee la aguja.

Como la construccion y los usos de este instrumento penden de la propiedad que tiene el iman de volver sus polos ácia unos mismos puntos del mundo, tenemos por indispensable dar á conocer muy por mayor á lo menos la piedra iman y su propiedad característica.

857 Es el *iman* una piedra dura que se halla en las minas de hierro, la qual tiene la virtud de atraer á otro iman ó al hierro en llegando á tocarle, ó teniéndole á corta distancia. Hay imanes azules, los hay blancos y de otros colores.

858 Tiene por lo comun esta piedra dos puntos opuestos llamados *polos* del iman, donde es mucha su virtud atractiva, uno de los quales, estando libre el iman,

mi-

mira constantemente al norte, y el otro al sur; por cuyo motivo se le llama al primero *polo boreal*, y al otro *polo meridional*. La linea que va desde el un polo al otro se llama *meridiana*. Fig.

859 Están constantemente en unos mismos puntos de la piedra sus dos polos, con tal que esté sola, y su exe en la direccion magnética. Pero si muchos imanes puestos desordenadamente unos inmediatos á otros se tocan por otros puntos que sus polos, llegan estos á mudar de lugar, y se reparan con el discurso del tiempo en otros puntos de la piedra.

860 Siempre que un iman esté puesto respecto de otro, de modo que el polo austral de este mire al polo boreal del primero, se atraen y arriman uno á otro hasta tocarse, con tal que ningun obstáculo se lo impida, y no estén uno de otro á una distancia que exceda la esfera de su virtud atractiva.

861 No solo atrae el iman por qualquiera de sus polos indistintamente, sino que tambien pega su virtud atractiva á una barra de hierro pasándola por uno de sus polos ó cerca de él. El hierro imantado de este modo tiene las mismas virtudes que el iman, y atrae á otro hierro.

862 Dexamos dicho antes que la piedra iman dirige el uno de sus polos al norte y el otro al sur, cuya propiedad tambien la tiene el hierro imantado, y en ella se funda la construccion de la brújula. Pero no se dirige ca-

Fig. cabalmente la aguja imantada al norte, ni tampoco se aparta de él una cantidad invariable aun en un mismo lugar. El número de grados que la aguja se aparta del norte, se llama *su declinacion*, sobre cuyo punto han andado muy solícitos los filósofos indagando de quantos grados era en varios parages del globo de la tierra esta declinacion, y si era ácia el occidente ó el oriente; de cuyas observaciones resulta ser muy varia esta declinacion, y que aun en un mismo parage es en unos tiempos occidental y en otros oriental. Bien se echa de ver que para determinar con la brújula la verdadera situacion de los puntos que se han de señalar en un mapa, es indispensable saber primero la cantidad de su variacion en el parage donde se hace uso de este instrumento.

863 Para conseguirlo, se mira en que situacion está la aguja respecto de la linea meridional; y el ángulo que con ella forma en el plano orizontal, es la declinacion de la brújula.

864 Por lo que toca al imantar las agujas, no hay cosa mas fácil. Se pasan rozando por el polo de un buen iman, de modo que la punta que ha de mirar al sur toque primero la piedra, y la toque la última la que ha de mirar al norte.

122. 865 Sea B el un polo del iman, y AC una aguja, cuyo extremo C quiero que mire al norte. Aplicaré la aguja en B, y teniéndola arrimada al iman, la haré correr ácia A, de modo que toda la mitad DC pase por el polo B.

Las

866 Las agujas han de ser del mejor acero que se Fig.
pueda encontrar; y para que se les comunique bien la virtud magnética no han de tener mas de seis pulgadas de largo.

867 El grafómetro suele llevar una brújula, la qual sirve para orientar los objetos, ó conocer, con medio grado de diferencia, su situacion respecto de los quatro puntos cardinales, ó respecto de la linea nortesur, con la qual forma constantemente la aguja el mismo ángulo en un mismo parage, á lo menos en el discurso de un mismo año. Con esta mira se señala la linea nortesur de la brújula paralela al diámetro del grafómetro; porque como la base comun de todos los triángulos observados es paralela á dicho diámetro, basta mirar que ángulo forma con la aguja imantada, lo que será facil de averiguar dirigiendo la linea de *fe* de la alidada paralela á dicha aguja. Hecho esto se dibuja en el plan una roseta de los rumbos de viento, donde los principales van señalados con sus nombres, y colocados conforme se han observado en el terreno.

868 Sería la brújula un instrumento sumamente apreciable para levantar planos, por la suma facilidad con que por su medio se levantan, sea el que fuere el terreno, cubierto de maleza, irregular &c. si no tuviera algunos defectos de los quales se pueden originar algunas equivocaciones muy substanciales en estas operaciones 1.° como no se pueden usar agujas muy largas, cogen

Fig. muy poco espacio los grados de la graduacion del instrumento, y los ángulos no se pueden medir con igual precision que con el grafómetro. 2.° Como todo plan, despues de trazado en borrador en el mismo terreno cuya figura ha de representar, se ha de copiar en limpio, sirve tambien en esta segunda operacion la misma brújula ú otra para colocar en el plan las lineas, con arreglo á su inclinacion observada en el terreno respecto de la linea nortesur. Pero es operacion sumamente larga sacar esta copia con la brújula; y por causa de la virtud atractiva es preciso que el que la saca esté apartado 4 ó 5 pies de toda cosa hecha de hierro, como cerraduras de puerta, fallebas de balcones &c. y que la mesa donde trabaja no tenga clavo alguno. Ha de estar distante 30 pies á lo menos de la barandilla de una escalera, reja &c. No se han de arrimar mas de seis pulgadas las puntas de un compas; y si hubiese otra brújula, será indispensable tenerla un pie distante de la que sirve. 3.° Al tiempo de levantar el plan en el terreno, es importantísimo no acercarse á mina alguna de hierro; sin cuya precaucion se saldrá forzosamente la aguja de su declinacion natural.

869 No obstante, como puede ofrecerse alguna ocasion en que no tenga el práctico mas instrumento que la brújula de que echar mano, declararemos el modo de averiguar su declinacion, sin cuyo conocimiento es imposible saber qual es la situacion de un punto del plan respecto de los puntos cardinales. El método que para la expresada ave-

averiguacinn voy á enseñar no es tan exâcto como otro Fig.
que se funda en el conocimiento de la esfera, bien que lo es bastante para los usos comunes.

Trácese con jalones ó de otro modo una linea que se dirija ácia el sol quando nace, y desde el mismo punto y en uu mismo dia trácese otra linea dirigida al sol quando se pone; causarán las dos lineas un ángulo que deberá partirse en dos partes iguales (367) por una linea, la qual se llama *meridiana*; si á la meridiana se le tira una perpendicular, los extremos de esta se dirigirán á los puntos que llaman Oriente y Poniente. Las dos lineas que forman el ángulo que la meridiana parte por medio, han de tener por lo menos 30 ó 40 estadales de largo.

Trazada la meridiana, la qual por el uno de sus extremos se dirige al norte, será facil averiguar la declinacion de la brújula ó de su aguja. Se colocará el instrumento de modo que la base del uno de los lados de la caja paralelos á la linea nortesur rase la linea meridiana hallada, en cuya situacion la linea nortesur de la brújula será paralela á la meridiana; y estando así puesto el instrumento, se mirará á que grado corresponde la aguja; restándole de 360, la resta expresará la declinacion de la brújula.

870 Por estos motivos solo sirve la brújula, segun hemos insinuado, para señalar los puntos menos esenciales de un plan, una vez determinados por el método antecedente los de mayor entidad.

Fig. 871 Vamos á trazar v. gr. el curso de un rio; plan-
123. tarémos piquetes en los recodos mas reparables *A*,*B*,*C*,*D*, *E*,*F*; plantarémos la brújula en el punto *A*, y mirarémos en la direccion *AB*; contarémos en la graduacion los grados que hubiere entre la linea *AB*, y la direccion actual de la aguja, y medirémos la *AB*. Colocarémos despues la brújula en el punto *B*; mirarémos en la direccion *BC*, contarémos tambien los grados que hubiere entre *BC* y *BN*, cuya direccion de la aguja es paralela á la primera direccion *AN*; medirémos *BC*, cuyas operaciones repetirémos en cada recodo; una vez medidos de este modo todos los ángulos y todas las distancias, las trazarémos en el papel del modo siguiente.

124. Tomarémos á arbitrio un punto *a*, el qual representará el punto *A*; tirarémos á arbitrio la linea *an*, la qual representará la direccion de la aguja imantada. En el punto *a* formarémos con el semicírculo graduado, el ángulo *nab* igual al ángulo observado *NAB*; y le daremos á *ab* tantas partes de la escala del plan, quantas medidas cupieren en *AB*. Desde el punto *b* tirarémos la *bn* paralela á la *an*, y haremos el ángulo *nbc* igual al ángulo observado *NBC*, dándole á *bc* tantas partes de la escala quantas medidas cupieren en *BC*. Lo propio practicarémos con todos los demas puntos.

Lo que acabamos de decir de los recovecos de un rio, se aplica igualmente á los de un camino, á la cerca de un bosque &c.

Hay

872 Hay tambien otro modo de levantar planos, el qual es muy acomodado, porque pide poco aparato, y porque al mismo tiempo que se observan los diferentes puntos cuya situacion se ha de determinar, se ván señalando en el plan sin perderlos de vista. El instrumento que para esto sirve es una tabla *ABCD* de tres ó quatro pies de largo y de igual ancho con muy corta diferencia, cuya tabla se coloca sobre un pie del mismo modo que el grafómetro. Sobre la tabla se tiende una hoja de papel afianzándola por medio de un bastidor que coge todo el perímetro de la tabla. *LM* es una regla con dos pínulas, una en cada extremo, las quales están en una linea paralela al canto de la regla. En lugar de pínulas suele haber un anteojo de larga vista. Fig. 125.

Quando, para trazar un plan, se hace uso de este instrumento, cuyo nombre es *plancheta*, se busca una base *mn*, del mismo modo que en las operaciones antecedentes; y despues de plantado en *m* el pie del instrumento, se manda plantar un piquete en *n*; se le aplica al papel la regla *LM*, y dirigiéndola de modo que por las dos pínulas se pueda ver el piquete plantado en *n*, se tira á lo largo de la regla una linea *EF*, dándole tantas partes de la escala del plan quantas medidas quepan desde el punto *E* donde se observa primero, al punto *f* donde está la segunda estacion. Despues se le dá vuelta á la regla al rededor del punto *E* hasta encontrar, mirando por las pínulas, alguno de los objetos *I*, *H*, *G*; y á medida que

Fig. se vá encontrando alguno, se tira á lo largo de la regla una linea indefinita. Despues de recorridos de este modo todos los objetos que se pueden ver desde el punto *m*, se lleva el instrumento á *n*, dexando un piquete en *m*; en el punto *n* se hacen las mismas observaciones respecto de los objetos *I*,*H*,*G*, que se han hecho en la estacion antecedente. Las lineas *fi*, *fh*, *fg* que en este segundo caso van, ó se concibe que ván á dichos objetos, encuentran las primeras en los puntos *g*, *h*, *i*, los quales representan los objetos *G*,*H*,*I*.

873 La plancheta sirve principalmente para trazar los puntos menudos de un plan, despues de determinados por el método declarado antes (852) los puntos mas principales, ó para añadirle á un mapa despues de levantado algunos objetos omitidos.

126. Supongamos v. gr. que despues de determinados los objetos *A*,*B*,*C*, representados en el mapa por los puntos *a*,*b*,*c*, sea *D* un punto cuya situacion no se sabe. Con la plancheta se determinará su situacion *d* del modo siguiente. Se plantará la plancheta en *D*, orientándola conforme dirémos despues; se pondrá la alidada primero en la direccion de la linea *Aa*, despues en la direccion *Bb*; y trazando una linea á lo largo de la alidada en cada operacion, su concurso *d* señalará en el mapa la situacion del punto *D* respecto de los objetos *A*,*B*,*C*. Esta determinacion se comprobará mirando por la alidada, puesta en la direccion *Ce*, si esta linea prolongada pasa por el punto *d*.

Lo

874 Lo dicho acerca de la plancheta basta para manifestar sus usos. El práctico que no supiere Trigonometría podrá usarla quando hubiere de levantar por mayor el mapa de un terreno que no requiera extremada puntualidad. Fig.

Por lo demas, aunque la plancheta determina la situacion de los puntos que se han de señalar en un plan, lo hace con tan poca precision, que es imposible executar con este instrumento una operacion con una puntualidad que dé entera seguridad del acierto. Son muchos los escollos con que corre riesgo de tropezar el práctico que usa de la plancheta, ya porque dá ángulos muy agudos, en cuyo caso el punto de la seccion se halla con diferencia de 2 ó 3 estadales; ya porque la plancheta ó el papel se apartan algunas lineas de la direccion de la base, lo que basta para que haya muchos estadales de diferencia en la determinacion de los puntos distantes. Finalmente, el mal tiempo puede cortar á cada instante el hilo de la operacion; siendo la dificultad de continuarla despues un inconveniente de grandísima consideracion, aun quando no se le agregara ninguno de los expresados antes.

875 Se señala comunmente en todo mapa la direc- 127.
cion de la aguja imantada; para cuyo fin *sirve* una brújula de figura rectangular, que viene á tener de ancho como un tercio de lo que coge de largo. Enmedio de suelo va trazada una linea paralela al lado mas largo de la caxa, en cuya linea está el exe que sostiene la aguja.

Fig. Para *señalar en el plan la direccion de la aguja*, se coloca la alidada de la plancheta en la linea que pasa por dos objetos señalados en el plan, y de modo que la representacion de los dos objetos en el plan, esté en la misma linea. Despues se pone la brújula encima de la plancheta, dándole vuelta hasta que la aguja se pare en la linea nortesur de la caja, quiero decir en la linea de medio del suelo de la caja. Finalmense se traza una linea en la direccion del lado largo de la caja, cuya linea es la direccion de la aguja.

876 Recíprocamente quando está señalada en el mapa la direccion de la aguja, y se le quiere dar al mapa ó á la plancheta la misma situacion que los objetos tienen en el terreno, basta procurar que la linea nortesur del mapa convenga con la linea nortesur de la brújula.

877 Puede bastar una sola estacion para determinar la posicion de los objetos, sin necesidad de hacerlo en dos, conforme lo hemos propuesto respecto de la figura 125; pero entonces es preciso medir la distancia á que cada objeto está de la plancheta, señalándola en partes de la escala del plan á lo largo de la regla dirigida al objeto respectivo.

De la transformacion de las figuras.

878 Escusamos prevenir, que lo que aquí vamos á declarar solo debe entenderse de las figuras planas rectilineas

neas; de cuyas figuras decimos que una es igual á otra, Fig.
quando la superficie de ambas se compone de un mismo número de partes iguales, haya la razon que hubiere entre los lados y ángulos de la una y los lados y ángulos de la otra.

879 Si ocurriese *transformar un triángulo isósceles ó equilátero* ABC *en otro triángulo rectángulo igual con él.* 128.
Se baxará la perpendicular *AD*, la qual, considerando la *BC* como cuerda de un círculo, cuyo centro esté en *A*, dividirá la *BC* en dos partes iguales en el punto *D*; hágase la *DE* igual con *BC*, y despues de tirada la *AE*, estará hecha la operacion.

Se funda en lo dicho (493), porque no pueden menos de ser iguales los dos triángulos *ABC*, *AED*, pues son iguales sus bases, y tienen una misma altura. 129.

880 Para *construir un triángulo obtusángulo escaleno igual á un triángulo equilátero* ABC; se tirará por el vértice *B* la indefinita *BE* paralela á la base *AC*, la *CE* como se quiera, con tal que forme con *AC* un ángulo obtuso en *C*; finalmente, se tirará la *AE*, y quedará construido el expresado triángulo.

Fúndase en lo mismo que la antecedente.

881 El que quisiere *construir un triángulo isósceles y obtusángulo igual al triángulo equilátero* ABC, tirará por 130.
el vértice *B* la *BD* paralela á la base *AC*, y desde el centro *C*, con un radio igual á *CA* trazará un arco que corte en *D* la paralela *BD*, y tirando por último las *CD*

y

Fig. y *CA*, tendrá conseguido el intento.

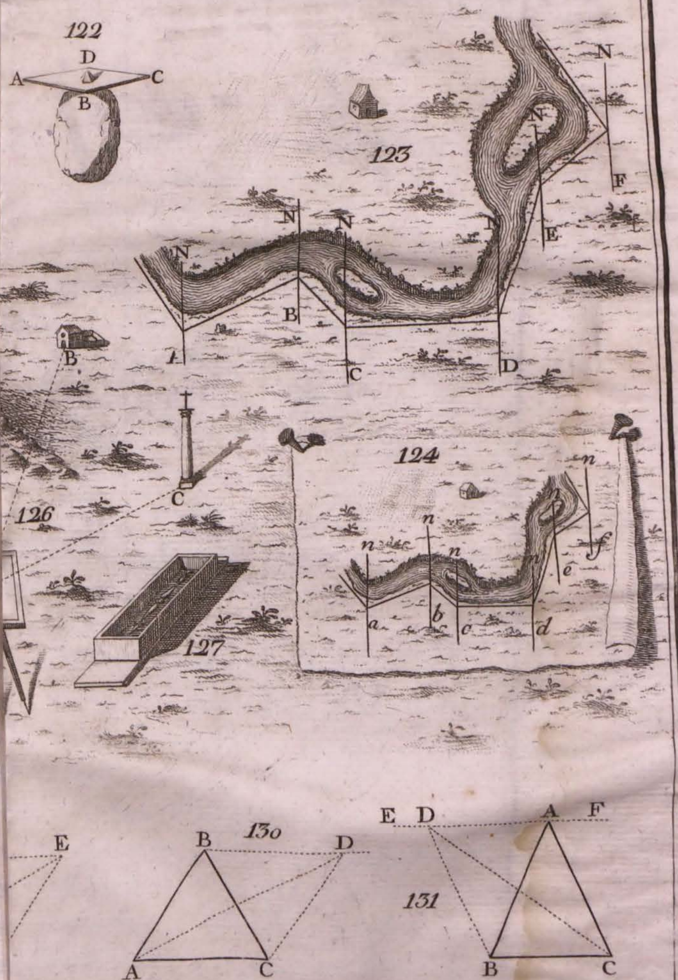
131. 882 Despues de lo dicho (880) se percibe lo que se habrá de executar para *construir un triángulo escaleno igual á un triángulo isósceles* ABC. Se echa de ver que por el vértice *A* se habrá de tirar la *EF* paralela á la base *AC* &c.

132. 883 Si se hubiera de *construir un triángulo igual á un triángulo dado* ABC, *con la condicion de que cada uno de los tres lados del primero sea mayor que cada uno de los tres lados del segundo*, se prolongará ácia *E* y *D* la base *BC* hasta que la recta *DE* sea dupla de la misma base; por los puntos *D* y *E* se baxarán las perpendiculares *DF*, *EG* iguales á la mitad de la altura *AH* del triángulo dado; se tirará la *FG*, y el paralelogramo *DEFG* será duplo del triángulo *ABC* (491). Por consiguiente tirando por último las lineas *FH*, *GH*, el triángulo *FHG* será la mitad del expresado paralelogramo (426), y por lo mismo igual al triángulo *ABC*.

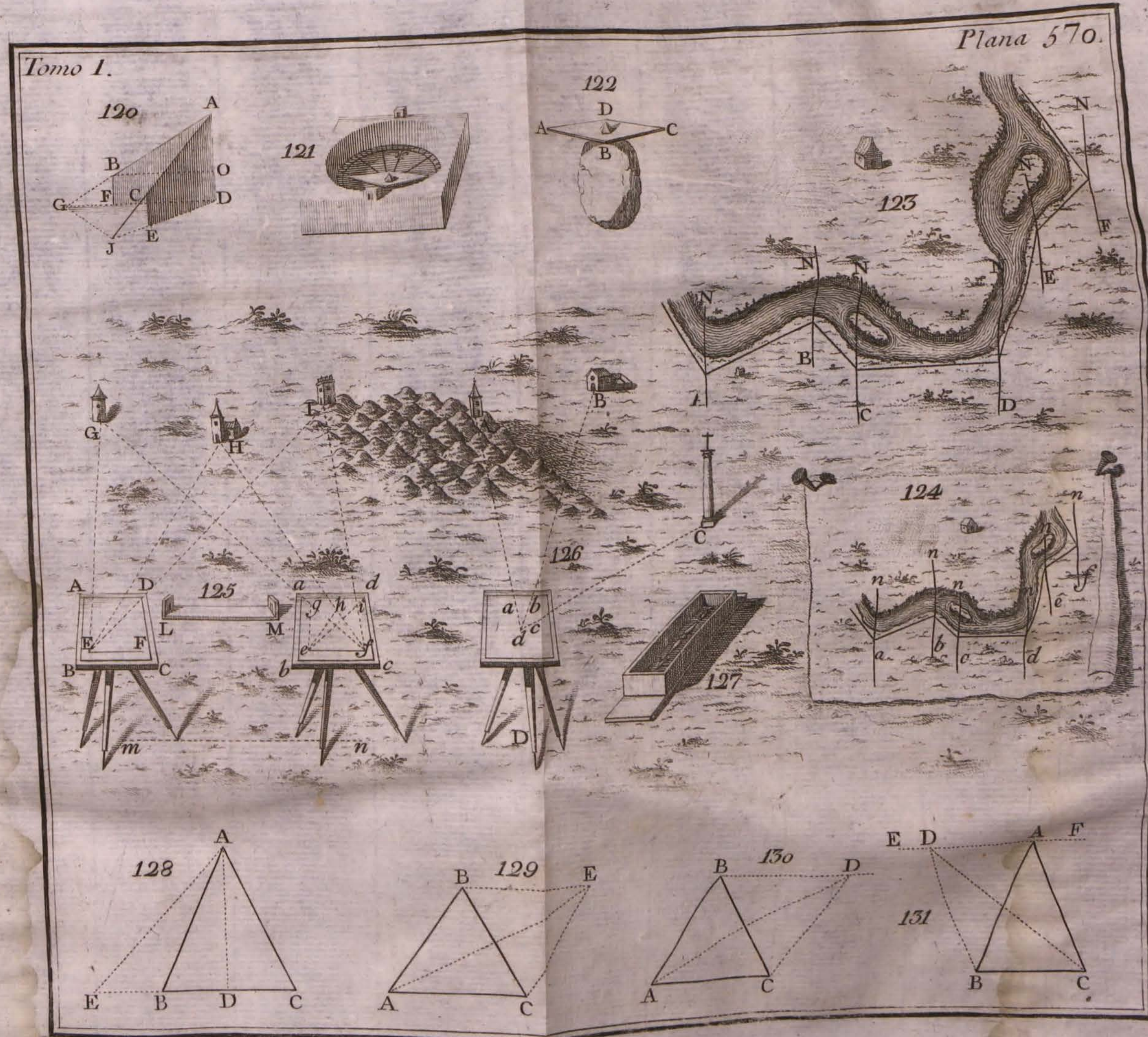
133. 884 Quando ocurra *transformar un triángulo dado* BAC *en otro de altura determinada*, habrá que resolver dos casos.

1.° Si el punto *D* donde ha de estar el vértice del triángulo que se pide, fuere uno de los del lado *AB* ó de su prolongacion; desde el punto *D* se tirará al ángulo opuesto *C* la recta *DC*, á la qual por el vértice *A* se tirará la paralela *AE*, que encontrará en *E* la base *BC* prolongada si fuese menester. Tirando finalmente la *DE*, el

Plana 570.



122
D
A
C
B
123
N
N
N
N
N
N
N
F
E
B
A
C
D
124
n
n
n
n
n
f
e
a
b
c
d
B
C
126
127
E
B
130
D
A
C
E D
A F
131
B
C


120
121
122
123
124
125
126
127
128
129
130
131

el triángulo *BDE* será igual al triángulo *BAC*, y tendrá Fig.
su vértice en el punto señalado *D*.

Porque los dos triángulos *DAC*, *DEC* son iguales, pues tienen una misma base *DC*; y están entre dos líneas paralelas (493), por consiguiente si se añaden al triángulo *BDC* como en la figura primera, ó si se restan del mismo triángulo, como en la figura segunda, los triángulos *BAC*, *BDE* que resultaren serán iguales.

885 Si el punto *D*, donde ha de estar el vértice 134.
del triángulo pedido, no estuviere en el lado *BA* del triángulo *BAC* ni en su prolongacion; por el punto *B* de la base *BC*, y el punto *D* se tirará la indefinita *BD* que encontrará en *O* la *AO* paralela á la base *BC*; desde el punto *O* se tirará la *OC* al otro extremo *C* de la base, y el triángulo *BDE* será igual al triángulo *ABC*.

Porque el triángulo *BAC* y el triángulo *BOC* son iguales (493). Pero segun hemos visto en el prlmer caso, son tambien iguales los triángulos *BOC*, *BDE*, cuyo vértice *D* está en el lado *BO* ó en su prolongacion; luego el triángulo *BAC* es igual con el triángulo *BDE*.

886 Si se hubiese de *transformar el triángulo* BAC *en otro* BDE *de igual valor*, *de altura dada*, *y siendo tambien dado el ángulo* DBE; se tirará la indefinita *BDO* tal que forme con *BC* el ángulo dado; se tomará despues en la recta *BDO* el punto *D* que esté respecto de la base á la misma altura que ha de tener el triángulo que se pide: lo demas como en la operacion antecedente.

Pa-

Fig. 887 Para *construir un triángulo igual á un quadri-*
135. *látero* ABCD, *con la condicion de que el vértice del triángulo haya de estar en un punto qualquiera* F *del lado* AB *del quadrilátero*; se trazarán las *FC*, *FD*, á las quales se tirarán desde los puntos *A* y *B* la paralelas *AM*, *BN* que rematen en los puntos *M* y *N* del lado *DC* prolongado. Tirando finalmente las lineas *FM*, *FN*, nacerá el triángulo *FMN* igual al quadrilátero propuesto.

Se funda esta operacion en los mismos principios que la de antes (884 y 885).

136. 888 Si el quadrilátero *ABCD* fuese regular, despues de tirada la diagonal *AC*, se le tiraría la paralela *BN*, y tirando la *AN*, el triángulo *DAN* sería el pedido.

Supongamos que ocurra *construir un triángulo igual á un quadrado*, *paralelogramo*, *rombo ó romboide* ABCD; se
137. hará la *BE* igual á *CB*, se tirará *AE* &c. todo lo demas se percibe bastante.

Quando ocurra *hacer un triángulo igual á un trape-*
138. *cio* ABCD, se considerará si el trapecio tiene ó no ángulos rectos. Si no hubiere ningun ángulo recto, se dividirán en dos partes iguales los lados obliquos *AD*, *BC* en los puntos *G*, *H*, por los quales se tirarán perpendiculares á los lados opuestos, prolongados si fuere menester. Se demostraría facilmente como antes, que el quadrilátero *ABCD* $=$ *IFKL* $=$ al triángulo *KFE*.

139. Si el trapecio tuviere ángulos rectos, divídase por me-

medio el lado *AB* en el punto *K*; tírese *GKF* paralela al lado *DC*, y prolónguese *CB* hasta *F*. Se probaría tambien facilmente que el trapecio *ABCD* es igual al quadrilátero *GFCD* igual al triángulo *DFE*. Fig.

889 Para *transformar el quadrilátero* ABCF *en un triángulo igual*, se tirará la diagonal *CA*, y su paralela *BG*, y despues de tirada la linea *CG*, se probaría con gran facilidad que el triángulo *FCG* es el pedido. 140.

890 Si se hubiese de *construir un triángulo igual al quadrilátero* ABCD, *cuyo ángulo* A *es entrante*, se tirará la linea *DB*, su paralela *AE*, y despues la *DE*; el triángulo *CDE* será igual al quadrilátero propuesto. 141.

891 Para *construir un triángulo igual á un polygono irregular* ABCDE; la misma figura manifiesta patentemente y demuestra la construccion despues de todo lo dicho. 142.

892 Si quisiéramos *transformar una figura rectilinea* ABCDE, *v. gr. en otra igual* ABFE *que tenga un lado menos que la primera*; por los extremos *C* y *E* de los lados *DE*, *DC* del ángulo *D* tirarémos la recta *EC*, y por el vértice del mismo ángulo *D* le tirarémos la paralela *DF* que encuentre en *F* el lado *BC*, prolongado si fuere menester. Tirando finalmente la recta *EF*, el polygono *ABFE* será igual al polygono propuesto *ABCDE*, y tendrá un lado menos. 143.

Porque los dos triángulos *EDC*, *EFC* tienen una misma base *EC*, y están entre paralelas, son iguales, luego si á la misma figura *ABCE* se le añade, ó se le quita

qual-

Fig. qualquiera de estos dos triángulos, resultará la figura *ABCDE* igual á la *ABFE* de un lado menos que la primera.

893 De aquí inferirémos que *no hay figura rectilínea alguna que no se pueda transformar en triángulo.* Porque transformandola succesivamente en otras figuras tales què cada una tenga un lado menos que la antecedente, quedará por fin transformada en triángulo.

144. Supongamos que se ha de *transformar el polygono* ABCDEF *en el triángulo* IAH, *cuyo vértice* A *esté en la circunferencia del polygono, y la base sea el lado* CD *prolongado ácia ambos lados.*

1.° Desde el extremo *D* del lado *CD* se tirará la diagonal *DF* que le quitará al polygono el triángulo *DEF*; tíresele á la *DF* la paralela *EG*, la qual encontrará en *G* el lado *CD* prolongado, y tírese por fin la *FG*. Concluido todo, quedará construido el polygono *ABCGF* igual al polygono propuesto, el qual tendrá un lado menos (891).

2.° Reduzcamos ahora el polygono *ABCGF* á otro igual con él, y que tenga un lado menos. Para este fin tirarémos la recta *AG*, y su paralela *FH*, la qual encontrará en *H* el lado *CD* prolongado. Tirarémos por fin *AH*, y resultará el polygono $ABCH = ABCGF = ABCDEF$.

3.° Como el lado *AH* del último polygono *ABCH* se puede tomar para lado del triángulo *IAH* que ha de ser igual con él, su construccion se reduce á la reduccion

de

de la parte ABC. Se tirará, pues, la recta AC, y su paralela BI que encontrará en I la base DC prolongada, y tirando la AI, quedará transformado el polygono propuesto $ABCDEF$ en el triángulo IAH. Fig.

De la division de las figuras.

894 Para *dividir un triángulo* ABC *en tres partes iguales, v. gr. por lineas tiradas desde el ángulo opuesto á la base*, se dividirá la base AC en tres partes iguales en los puntos D, E, y se tirarán las BD, BE, las quales dividirán el triángulo en tres triángulos iguales, por tener bases iguales y la misma altura. 145.

895 Supongamos que el triángulo ABC representa una tierra que tiene en D un pedazo mejor que lo demas de la heredad, la qual se ha de partir entre dos, de modo que á cada particionario le toque igual porcion del pedazo bueno. Se dividirá la base AC en dos partes iguales en E, desde cuyo punto se tirarán las lineas EB, ED, y desde B la BF paralela á DE; y finalmente la FD, la qual dividirá el triángulo en dos partes iguales $BDFA$, DFC.

Porque el triángulo ABE es la mitad del triángulo total ABC; y siendo, por razon de las paralelas BF,DE, el triángulo BFD igual al triángulo BEF, se sigue que el triángulo OFE quitado del triángulo BEA, es igual al triángulo ODB quitado del triángulo EBC; de lo que resulta que el trapecio $BDFA$ es igual al triángulo FDC. 146.

Si

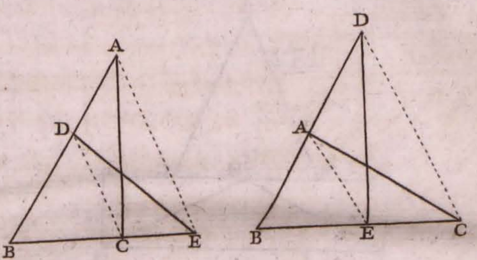
Fig. 147. 896 Si quisiésemos *dividir en dos partes iguales el triángulo* ABC *con lineas tiradas desde un punto dado* F, se dividirá la base *AC* en dos partes iguales en el punto *D*, se tirará *DF*, y á esta una paralela *BE*. Tirando despues las lineas *EF*, *FB*, la figura *ABFE* será igual á la *BFEC*.

Porque tirando la *BD*, y considerando que el triángulo *BFE* es igual, por causa de las paralelas, al triángulo *BDE*, será por consiguiente lo que se ha quitado por una parte, igual á lo que se ha añadido por otra en los triángulos *ABD*, *DBC*.

148. 897 Para *dividir el triángulo* ABC *en dos partes iguales con una linea* DE *paralela á la base*, se dividirá por medio el uno de los otros lados, *BC* v. gr. se buscará una media proporcional entre todo el lado *BC* y la mitad *BF*; y suponiendo la *BE* igual á la media proporcional hallada, se tirará desde *E* la *DE* paralela á la base *AC*, la qual dividirá el triángulo como se pide.

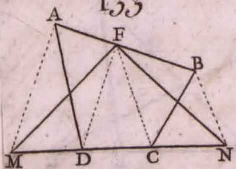
Por ser proporcionales las lineas *BC*, *BE*, *BF*, el quadrado formado sobre *BC* será al quadrado formado sobre *BE*, como la primera linea *BC* á la última *BF* (220). Pero ya que los triángulos semejantes tienen unos con otros la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos (509), el triángulo *BAC* será duplo del triángulo *BDE*, pues el quadrado del lado *BC* es duplo del quadrado del lado *BE*, por ser *BC* dupla de *BF*.

898 Si se quisiese *dividir un triángulo en tres partes iguales con lineas paralelas tambien á la base*, se buscará-

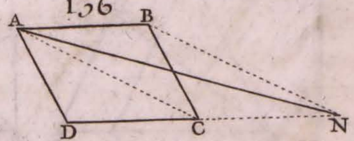


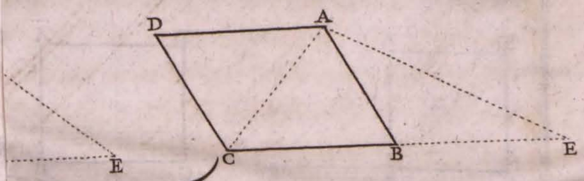
133

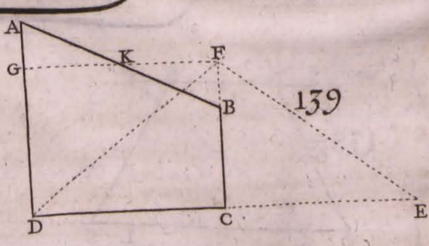
135



136

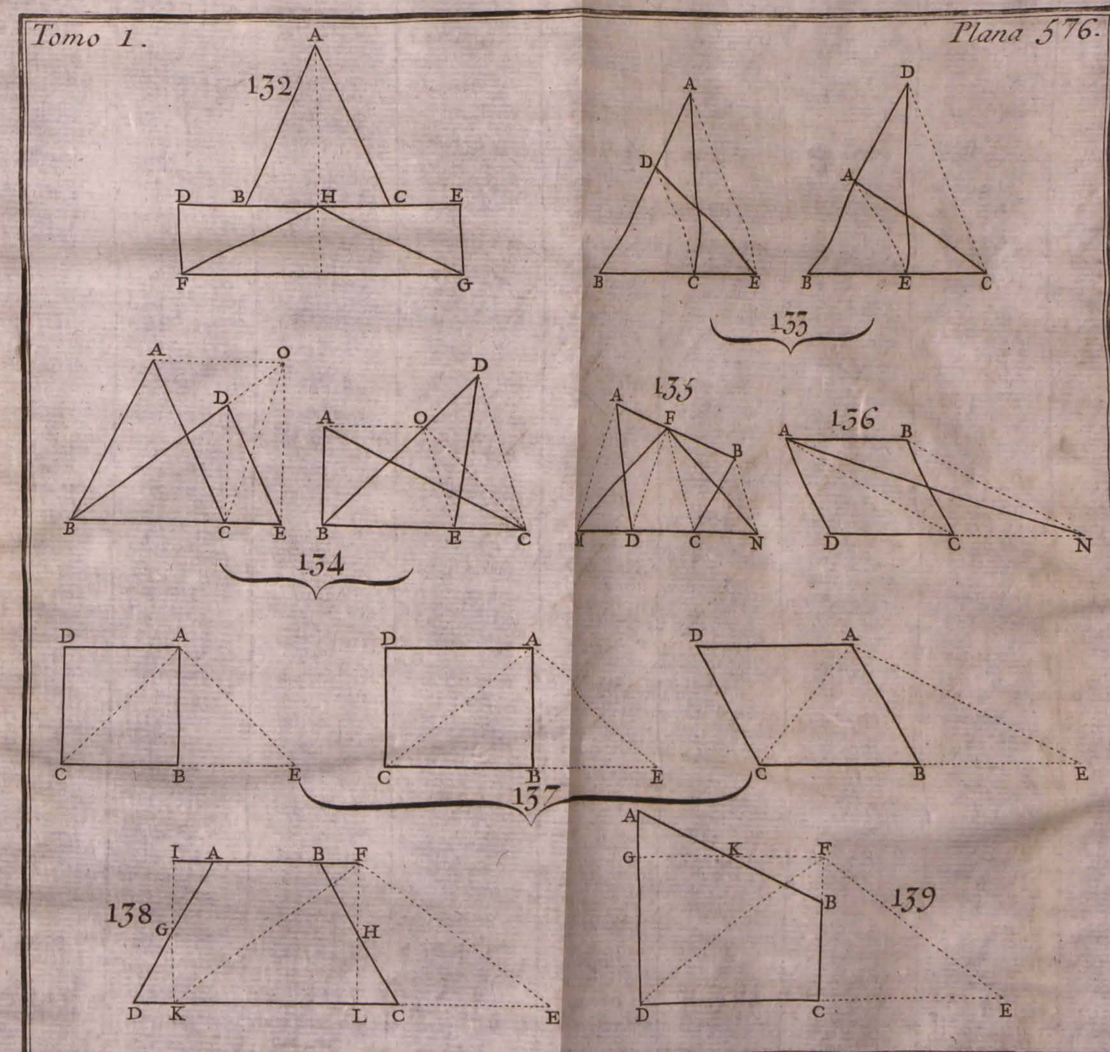






139

Tomo 1. Plana 576.



cará una media proporcional entre el uno de los lados y Fig.
los dos tercios del mismo lado. Se señalará esta media proporcional en el lado dividido, y desde el extremo de esta linea á la base se tirará una paralela, de lo qual resultará un triángulo interior, que será los dos tercios del que se quiere dividir en tres; partiendo despues en dos partes iguales como antes (897) el triángulo que vale los dos tercios del grande, quedará este dividido en tres partes iguales.

899 Si ocurriese *dividir un triángulo* ABC *en tres partes iguales, v. gr. con lineas tiradas desde el punto* D *dado en uno de sus lados*, se dividirá el lado *AB* en tres partes iguales en *E* y *F*; se tirará despues la linea *DC*, á esta se la tirarán desde los puntos *E* y *F* las paralelas *EH*, *FG*, y desde *D* las *DG*, *DH*, las quales dividirán el triángulo como se pide. 149.

Lo probaremos con tirar las *CE* y *CF*. Los dos triángulos *GFC*, *GFD* que tienen una misma base *GF*, y están entre unas mismas paralelas, son iguales. Si de cada uno restamos el triángulo comun *GIF*, el triángulo *GIC* será igual al triángulo *DIF*. Si á cada uno de estos se les añade el quadrilátero *BFIG*, saldrá el triángulo *BGD* igual al triángulo *BCF*, esto es, á la tercera parte del triángulo propuesto (894).

900 Si *en un triángulo* ABC *hubiéramos de señalar un punto tal que las lineas tiradas desde dicho punto á los tres ángulos, partiesen en tres partes iguales el triángulo,* 150.

Fig. haríamos la *AF* igual al tercio de la base *AC*; desde *F* tiraríamos la *FE* paralela al lado *AB*, y la dividiriamos por medio en *D*, este sería el punto pedido. Las lineas *DB*, *DA*, *DC* tiradas desde *D* á los ángulos del triángulo le dividirian en tres partes iguales.

Con efecto, si tiramos *BF* se originará un triángulo *BAF*, el qual será el tercio de toda la figura; y como el triángulo *BAF* es igual al triángulo *ADB*, por causa de las paralelas, este triángulo tambien será el tercio de la figura; luego los dos triángulos *ADC*, *BDC* juntos componen los dos tercios del triángulo *ABC*. Pero los dos triángulos *ADC*, *BDC* son iguales; porque los dos triángulos *CDF*, *CDE*, y los otros dos *ADF*,*BDE* son iguales, cada uno al suyo, pues tienen iguales respectivamente sus bases, y estan entre paralelas; luego cada uno de los triángulos *ADC*, *BDC* es la tercera parte del triángulo propuesto.

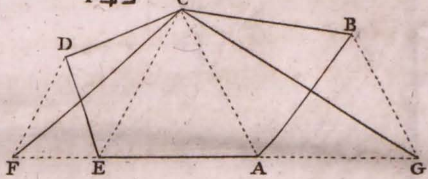
151. 901 Si *se pidiese un punto* D *en uno* AC *de los lados de un triángulo* ABC, *desde el qual se le pueda dividir en quantas partes iguales se quiera, en quatro v. gr.* se tomará la quarta parte *AD* del lado *AC*, y el punto *D* será el punto pedido.

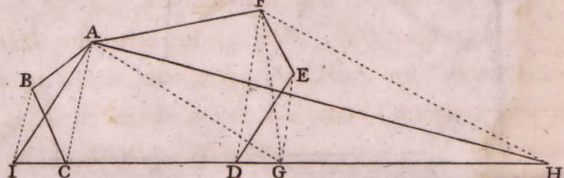
Porque si se tira *BD*, el triángulo *ABD* será (894) la quarta parte del triángulo *ABC*; y si al triángulo restante *BDC* se le divide en tres partes iguales (887), estará dividido el triángulo propuesto *ABC* en quatro partes iguales con las lineas *DB*, *DE*, *DF*.

Pa-

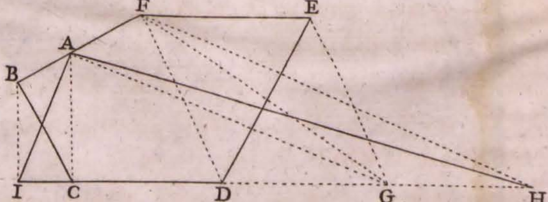
Plana. 578.

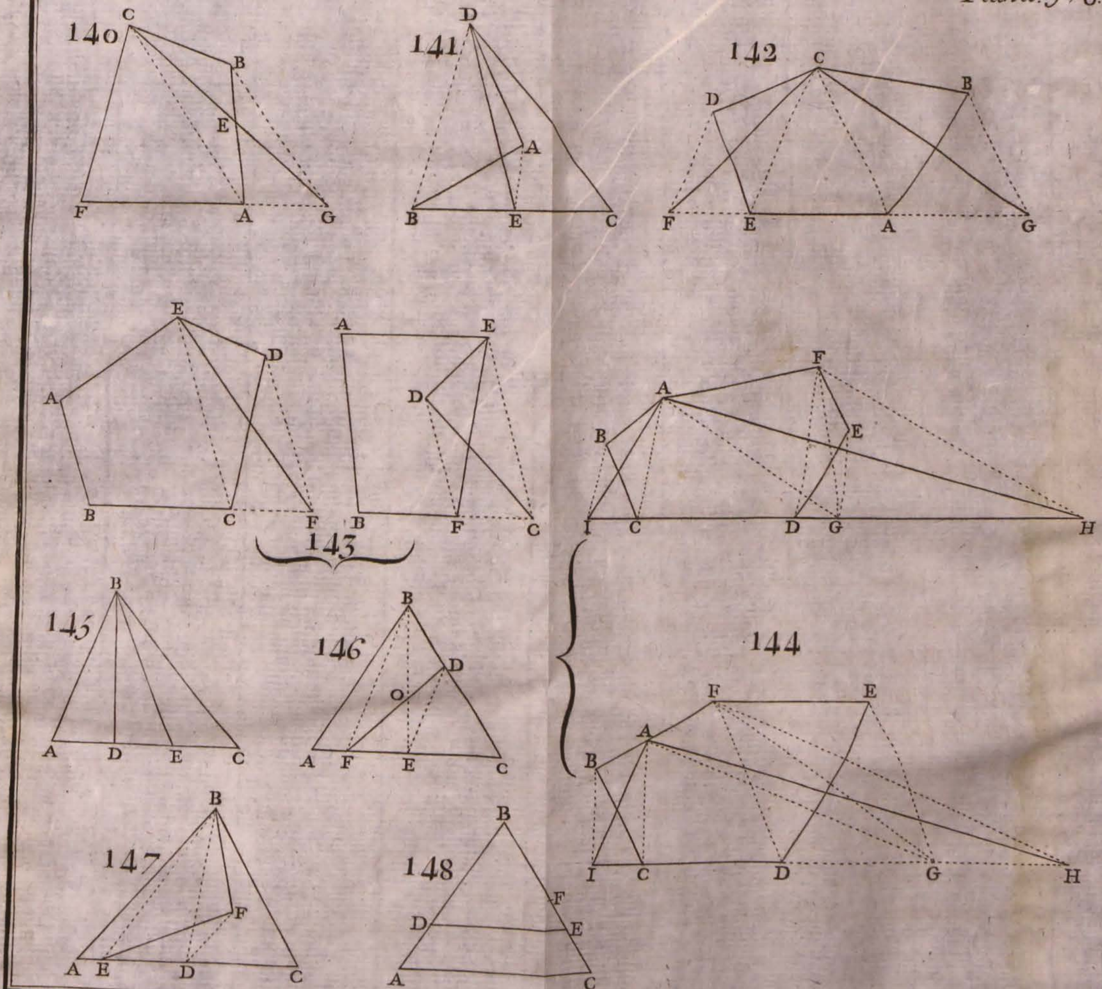
142





144




140
141
142
143
144
145
146
147
148

902 Para hallar dentro de la area de un triángulo Fig.
un punto desde el qual se *le pueda dividir en las partes* 152.
que se quiera, en quatro v. gr. se tomará como antes la quarta parte *AD* del lado *AC*, y tambien la quarta parte *AE* del lado *AB*; si despues se tiran desde los puntos *D* y *E* las lineas *DF*, *EG* respectivamente paralelas á los lados *AB*, *AC*, el punto *H* de la comun interseccion será el punto pedido.

Porque si se tiran las *HA*, *HB*, *HC* qualquiera de los dos triángulos *AHB*, *AHC* será (893 y 894) la quarta parte del triángulo propuesto *ABC*, y por consiguiente el triángulo *BHC* será su mitad; luego con dividir este en dos partes con la linea *HI*, estará en *H* el punto pedido.

903 Para *dividir un paralelogramo* ABCD *en un nú-* 153.
mero, el que se quiera, de partes iguales, en seis v. gr. con lineas tiradas desde el ángulo dado C; se tirará la diagonal *AC*, la qual dividirá el paralelogramo en dos triángulos iguales (426), los que se podrán dividir cada uno en tres (894), y estará hecho lo que se pide.

Si se omiten la diagonal *AC* y las lineas *CF* y *CH*, es patente que el paralelogramo estará dividido en tres partes iguales.

904 Quando ocurra *dividir en tres partes iguales un* 154.
paralelogramo ABCD *con rectas tiradas desde un punto* E *dado en uno de sus lados*; se dividirá el lado *AB* en tres partes iguales en los puntos *F*, *G*, por los quales se ti-

Fig. rarán las *FH*, *GI* paralelas al lado *AD*, y á estas se les dividirá por medio en *K* y *L*. Las rectas *EM*, *EN* tiradas por los puntos *E*, *K*, *E*, *L* dividirán en tres partes iguales el paralelogramo *ABCD*.

Porque una vez que son iguales los dos triángulos (408) *EFK*, *MHK*, si los añadimos cada uno separadamente al mismo pentágono *AFKMD*, el trapecio *AEMD* será igual al paralelogramo *AFHD*, esto es, á la tercera parte del mismo paralelogramo *ABCD*. Del mismo modo demostrarémos que el trapecio *BENC* es igual al paralelogramo *BCIG*, ó al tercio del paralelogramo *ABCD*. De donde resulta que el triángulo *MEN* vale tambien el tercio de *ABCD*.

155. *Si el punto dado* E *estuviese á los dos tercios de* AB, *ó, lo que es lo mismo, si* EB *fuese la tercera parte de* AB, quedaría dividido el paralelogramo solo con tirar la *EF* paralela al lado *AD*, y la diagonal *ED*.

156. 905 Quando alguno quiera *dividir en dos partes iguales un trapecio* ABCD *con una linea paralela á la base*; prolongará los dos lados *AB*, *DC* hasta que se encuentren en *G*: en el extremo *G* de *AG* levantará la perpendicular *GH* igual á *GB*; tirará la *HA* sobre cuya linea como diámetro trazará una semicircunferencia, y la dividirá por medio en *I*; y despues de tirar la *IH*, hará la *GE* igual á *IH*; la linea *EF* tirada desde *E* paralela á la base *AD*, dividirá el trapecio en dos partes iguales.

Porque como *HA* es lado de un quadrado igual á la su-

suma de los quadrados de *AG* y *GH*, y por ser *IH* lado de un quadrado mitad del quadrado de *HA*, el quadrado de *IH* ó *GE* es medio arismético (181) entre los quadrados de *GA* y *GB*. Y como los triángulos semejantes tienen unos con otros la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos, síguese que por estar los quadrados de los lados *GB*, *GE*, *GA* en progresion arismética, los triángulos *GBC*, *GEF*, *GAD* están tambien en progresion arismética; luego es una misma la diferencia que entre ellos hay, ó el exceso que lleva *GEF* á *GBC*; esto es, el trapecio *BEFC* es igual al exceso que lleva *GAD* á *GEF*, esto es, á *EADF*; luego *BEFC* y *EADF* son iguales, luego &c. Fig.

906 Para *dividir un trapecio* ABCD *en dos partes iguales con una recta tirada desde uno de sus ángulos* A; se prolongará hasta *E* el lado *AB* adyacente al ángulo dado, y paralelo al lado opuesto *CD*, hasta que *AE* sea igual con *CD*; se tirará la *ED* prolongándola hasta encontrar en *F* al otro lado *BC* tambien prolongado; se dividirá despues la *BF* por medio en *G*; y se tirará la *AG*, la qual dividirá en dos partes iguales el trapecio *ABCD*. 157.

Porque, con tirar la *AF* y la diagonal *AC* que será paralela á *EF* é igual á *ED* (427), los dos triángulos *ACF*, *ACD* serán iguales uno con otro; quitándoles el triángulo comun *ACI*, quedarán los dos triángulos *ADI*, *ICF* iguales uno con otro. Si á cada uno de estos se le añade el trapecio *ABCD* será igual al trián-

Fig. gulo *ABF*, cuya mitad es el triángulo *ABG*; por ser la base *BG* la mitad, el triángulo *ABG* será la mitad del trapecio propuesto.

158. 907 Quando se ofrezca *dividir en dos partes iguales un trapecio* ABCD *con una linea tirada desde un punto* H *de uno de sus lados*, se transformará el trapecio propuesto en el triángulo *ADF* (687), cuya base *AF* se dividirá por medio en *E*, se tirará la *DE*, y se originará el triángulo *ADE*, el qual será la mitad del trapecio. Se tirará la *DH*, y desde *E* la *GE* paralela á la *DH*; últimamente, se tirará la *HG*, la qual dividirá en dos partes iguales el trapecio.

Porque los triángulos *EHO*, *ODG* son iguales por razon de las paralelas, y por consiguiente la figura *ADGH* vale la mitad del trapecio, una vez que es igual al triángulo *ADE*.

159. 908 Aunque es operacion de poca importancia el *dividir un trapecio* AC *en muchas partes iguales*, *en tres v. gr.* declararémos sin embargo como se hace esta division, porque servirá de introduccion para lo que sigue. Para cuyo fin se dividirán desde luego los lados *DC* y *AB* en tres partes iguales, y se tirarán las *GE*, *HF*, las quales formarán las figuras iguales *AG*, *EH*, *FC*, pues cada una consta de dos triángulos iguales, cada uno el suyo.

160. 909 Si ocurriese *dividir un ángulo* ABCD *en quantas partes iguales se quiera*, *v. gr. en tres*, *con lineas paralelas al uno de los lados* AD *ó* BC *que no son paralelos*

uno

uno con otro; se dividirá el lado BC opuesto á AD (al qual suponemos que han de ser paralelas las lineas de division) en dos partes iguales en E, desde cuyo punto se tirará paralela á la AB la linea EF, y se la dividirá en tres partes iguales en G y H. Si por estos puntos y el punto E se tiran las IK, LM, NO paralelas á AD, estará dividido el trapecio propuesto en tres partes iguales. Fig.

Por ser equiángulos los dos triángulos BEN, ECO, y ser un lado EB del uno igual á un lado EC del otro, serán iguales uno con otro los dos triángulos (408). Luego el trapecio $BCML$ es igual al paralelogramo $MLNO$; y por consiguiente todo el trapecio $ABCD$ es igual á todo el paralelogramo $ANOD$. Por ser cada paralelogramo AK, LM, LO la tercera parte de todo el paralelogramo AO, serán tambien el tercio del trapecio propuesto $ABCD$; luego &c.

910 Si se me propusiese *dividir el quadrilátero* ABCD *en dos partes iguales*; tiraría desde B la linea BH paralela á AD, y dividiría las lineas BH, AD en dos partes iguales en G y F; despues tiraria GC y GF, las quales formarian la figura $CBAFGC$ igual con la figura $CGFD$, cada una de las quales sería la mitad del quadrilátero; pues por la operacion el trapecio $ABGF$ es igual al trapecio $GFDH$, y el triángulo BCG es igual al triángulo GCH. 161.

Pero las dos partes del quadrilátero serian mas regulares, si las dos lineas de division GC, FG fueran una

Fig. sola linea recta. Esto se conseguirá tirando la *GE* paralela á *FC*, y desde *E* á *F* la *EF*, la qual dividirá en dos partes iguales el quadrilátero, como es facil evidenciarlo, pues son iguales los triángulos *FGC*, *FEC* que tienen una misma base *FC*, y están entre paralelas.

162. 911 Si ocurriese *dividir un quadrilátero* ABCD *en dos partes iguales con una linea tirada desde uno de sus ángulos* B; tiraríamos las diagonales *AC*, *BD*, y dividiríamos la primera por medio en *E*, desde cuyo punto tiraríamos la *EF* paralela á la *BD*. Tiraríamos últimamente la *BF* desde el ángulo dado al punto *F*, cuya *BF* dividiría el quadrilátero como se pide.

Porque si se tiran las lineas *EB*, *ED*, el triángulo *ADE* será igual al triángulo *CDE*, y el triángulo *ABE* igual al triángulo *CBE*. Luego las lineas *EB* y *ED* dividen en dos partes iguales el quadrilátero; y como los triángulos *BED*, *BFD*, que están entre las paralelas *EF*, *BD* dán *EBO* igual con *OFD*, se sigue que la linea *BF* divide el quadrilátero en dos partes iguales.

163. 912 Para *dividir en dos partes iguales un quadrilátero* ADCB *desde un punto* E *dado en uno de sus lados*; se tirarán las rectas *DE*, *DB*, y desde *C* la *CF* paralela á la diagonal *DB*, cuya *CF* encontrará en *F* el lado *AB* prolongado. La recta *DF* formará el triángulo (889) *ADF* igual al quadrilátero propuesto *ABCD*. Divídase la base *AF* por medio en *G*, y tírese *DG*. El triángulo *ADG* será la mitad del triángulo *ADF*, ó del quadrilátero *ABCD*.

Fi-

Finalmente, desde *G* tírese *GH* paralela á *DE*, y la *EH* Fig.
que dividirá en dos partes iguales el quadrilátero.

Por ser paralelas las rectas *DE*, *GH*, los dos triángulos *GHD*, *GHE* son iguales uno con otro; si se les quita el triángulo comun *GHI*, el triangulo residuo *DHI* será igual al residuo *GIE*. Si se añade uno y otro separadamente al mismo quadrilátero *AEID*, resultará el quadrilátero *AEHD* igual al triángulo *ADG*, y por consiguiente á la mitad de todo el triángulo *ABCD*; luego &c.

913 Quando ocurra *dividir un quadrilátero* ABCD 164.
en dos partes iguales con una linea paralela á uno de sus lados AB; se prolongará *BC* y *AD* hasta encontrarse en *G*, y se tirará la *CF* paralela á la diagonal *BD*; despues se dividirá la base *AF* del triángulo *ABF* por medio en *H*, y se buscará una media proporcional entre *AG* y *HG*, la qual sea v. gr. *IG*; si desde *I* se tira la *IK* paralela á *AB*, el quadrilátero estará dividido en dos partes iguales *ABKI*, *IKCD*.

Por ser semejantes los triángulos *ABG*, *IKG* (459), y estar en la misma razon que los quadrados de sus lados homólogos, serán uno con otro como las lineas *AG*, *HG* (220). Pero como los triángulos *ABG*, *HBG* son de una misma altura, seguirán la razon de sus bases (508), y por consiguiente la razon de las lineas *AG*, *HG*; luego el triángulo *IKG* es igual al triángulo *HBG*. Esto supuesto, si de una y otra parte se quita la figura *HOKG* comun á ambos triángulos, quedará el trián-

gu-

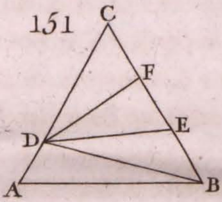
Fig. gulo OIH igual al triángulo OBK; pero como el triángulo BAH es igual á la mitad del quadrilátero, síguese que la figura $AIKB$ vale tambien la mitad del quadrilátero, el qual está dividido por la IK en dos partes iguales.

165\. 914 Para *dividir un quadrilátero* ABCD *en tres partes iguales con dos lineas tiradas desde dos puntos* E *y* F *dados en uno de sus lados*; se tirará desde el ángulo opuesto C, y paralela á la diagonal DB, la CG que encuentra en G el lado AB prolongado; y se tira desde G al ángulo opuesto la recta DG, se originará un triángulo igual al quadrilátero (887); por lo que, si se divide la base AG en tres partes iguales en H é I, y se tiran las DH, DI, cada uno de los tres triángulos ADH, HDI, IDG valdrá el tercio del triángulo ADG, ó del quadrilátero propuesto $ABCD$. Finalmente, desde H se tirará la HK paralela á la DE, y desde I la IL paralela á la DF; tirando últimamente las EK, y FL, estas dividirán en tres partes iguales el quadrilátero propuesto.

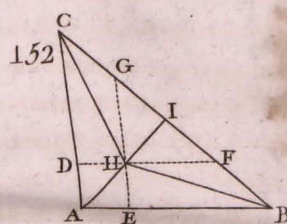
Porque, ya que por construccion son paralelas las dos rectas DE, HK, los dos triángulos HDK, HEK serán iguales uno con otro. Por lo que, si de ambos se quita el triángulo comun HOK, quedará el triángulo DOK igual al triángulo EOH. Si á cada uno se le añade el quadrilátero $AEOD$, resultará el quadrilátero $AEKD$ igual al triángulo ADH, esto es, al tercio del quadrilátero $ABCD$. Del mismo modo demostrarémos que el quadrilátero $AFLD$ es igual al triángulo ADI, quiero decir, á

los

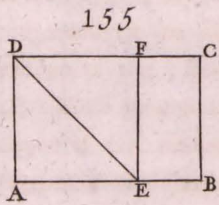
151



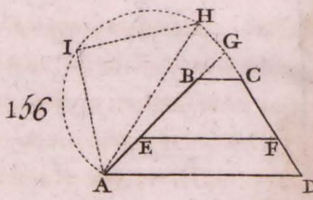
152



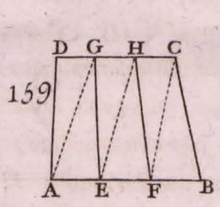
155



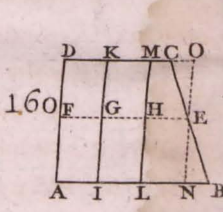
156



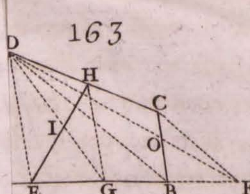
159



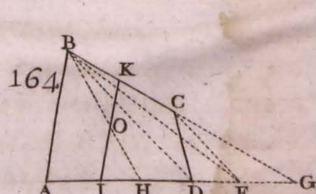
160



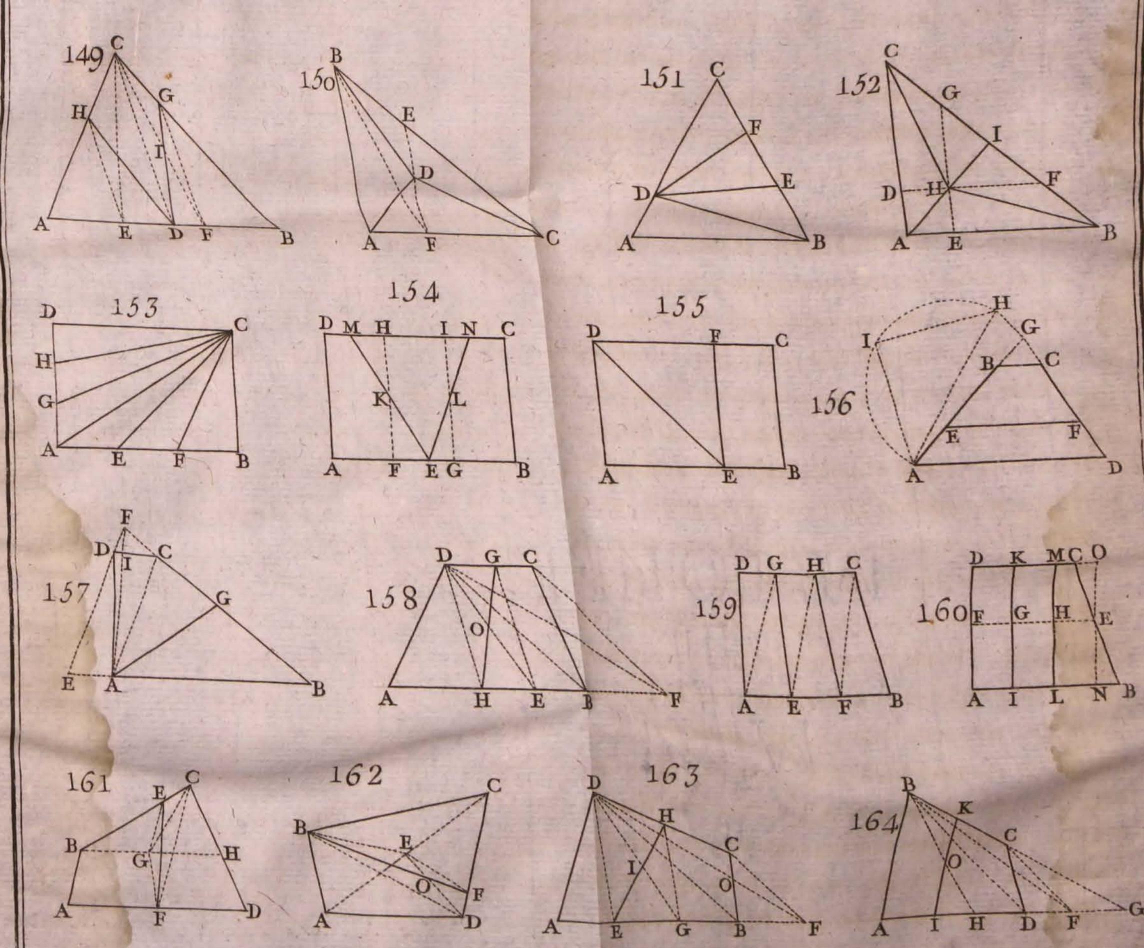
163



164



Tomo 1. Plana 586.



los dos tercios del quadrilátero *ABCD* ; de donde es fa- Fig.
cil inferir que qualquiera de los dos quadriláteros *EKLF*, *FLCB* es la tercera parte del propuesto *ABCD*.

915 Propongámonos *dividir un polygono* ABCDE *en* 166.
tres partes iguales con lineas tiradas desde uno de sus ángulos D. Empezaremos transformando dicho polygono en un triángulo *FDG* (890), cuya base *FG* se dividirá en tres partes iguales en *H*, *I*, y con tirar la *DH* y la *DI* estará dividido el polygono conforme se quiere.

Porque cada uno de los triángulos *FDH*, *HDI*, *IDG* vale el tercio del triángulo *FDG*, y por consiguiente el tercio del polygono dado *ABCDE*.

916 Si ocurriese *dividir un polygono* ABCDE *en mu-* 167.
chas partes iguales, en quatro v. gr. con rectas tiradas desde el ángulo dado D, se transformará dicho polygono en un triángulo *FDG* (891), y se dividirá su base *FG* en quatro partes iguales en *H*, *I*, *K*. Tirando las *DH*, *DI*, *DK*, los quatro triángulos *FDH*, *HDI*, *IDK*, *KDG* serán cada uno la quarta parte del triángulo *FDG* (892), y por consiguiente del pentágono *ABCDE*. Pero por quanto el punto *H* cae fuera del lado *AB*, se reducirá el triángulo *HDI* al quadrilátero *ALDI*, lo que se conseguirá fácilmente tirando la *HL* paralela á *AD*. La demostracion es muy facil despues de lo dicho y practicado hasta aquí en este asunto.

De

Fig.

De las Superficies.

917 Acerca de esta especie de extension no se nos ofrece otra cosa, sino declarar el método para medirla, sobre cuyo punto dexamos dicho ya en los Elementos de Geometría quasi lo mas que hay que decir; allí mismo enseñamos el modo de medir las superficies, previniendo que para executarlo se hace uso de un quadrado, como una vara quadrada, un pie quadrado, &c. Nos ceñirémos, pues, ahora á manifestar alguna aplicacion de lo dicho á la medida de las tierras.

168. 918 Si ocurriese *medir una tierra* ABCDF, *por la qual suponemos que se puede transitar*; se levantará su plan *abcdf*, y despues se medirán todos los triángulos de que se compone; la suma de las superficies de todos estos dará la de la tierra.

919 Pero *si la tierra fuese tal que solo se pudiera reconocer por la parte de afuera*, se plantarán unos piquetes grandes en *A,B,C,D,E,F*, y se medirán los ángulos *A,B,C* &c. y los lados que los forman. Se hará el ángulo *a* igual al ángnlo *A*; se tomará la *ab* de tantas partes de la escala quantas varas tiene *AB*; se hará el ángulo *b* igual á *B*, y se tomará *bc* de tantas partes de la escala quantas varas tenga *BC*, y prosiguiendo á este tenor se trazará la figura *abcdf*, la qual se medirá conforme se dixo (501).

Por este método se podrá medir la superficie de un ter-

terreno pantanoso, como laguna, un bosque, y la superficie orizontal que ocupa la base de una montaña al rededor de la qual se puede andar. Si su contorno fuese una linea curva, se plantarian piquetes á trechos de modo que se pudiese tomar, sin error substancial, por linea recta la parte del contorno comprehendida entre dos piquetes. Fig.

920 *Si la superficie* ABCD *de la tierra que se nos ofrece medir fuese inaccesible*; levantarémos su plan (871); este plan *abcd* se medirá despues de reducido á triángulos (esto se conseguirá en nuestro caso solo con tirar una linea desde *b* á *d*); midiendo finalmente cada triángulo separadamente estará concluida la operacion. 169.

921 Quando ocurra *medir un terreno* FEHGF *terminado por una linea curva*; se tirará la tangente *AD* á dicha curva, y desde *F* la *BA* perpendicular á dicha tangente. Desde el punto *G* el mas distante de la linea *AD* se tirará la perpendicular *CB* á la *BA*, y por el punto *H* el mas distante de *BA*, se tirará la perpendicular *CD* á la *BC*, y el terreno propuesto estará comprehendido en un rectángulo *ABCD*, cuya superficie se hallará multiplicando la base por la altura. Hecho esto, se tirará la *ba* perpendicular á *BC*, y se medirá el triángulo *Gab* en el supuesto de no discrepar notablemente la *aG* de una linea recta; se medirá el trapecio *bBFa* (500), y los triángulos *FAE*, *EDH*, *HCG*, y restando todas estas superficies de la del rectángulo, el residuo expresará la area del terreno propuesto. Si la linea *aG* ó *aF* discre- 170.

pa-

Fig. pare mucho de una linea recta, se tirará otra ú otras muchas perpendiculares á *BC*, y resultará mayor número de trapecios, los quales se medirán sin ninguna dificultad.

171. 922 Quando ocurra *sacar la superficie orizontal de una tierra en cuesta, que supondremos ser un rectángulo* ABCD; se figurarán tiradas las lineas orizontales *AP*,*DM*, y las verticales *BP*, *CM* tiradas desde los ángulos *B* y *C* á dichas lineas. La superficie orizontal que se busca será igual al rectángulo *APMD*, cuya superficie es igual al producto de *AD* por la *AP*; y como suponemos que se puede medir *AD*, todo el trabajo está en hallar el valor de
172. *AP*. Para cuyo fin podrá servir una esquadra *ABC*, cuyo brazo *BC* sea de un estadal v. gr. y el otro brazo *AB* tenga un plomo *BM* mas ó menos largo, conforme se quiera. Se aplicará el punto *C* sobre la cuesta *CH*, v.gr. que se quiere medir; se dexará caer el plomo de modo que sin salir el cordel de la muesca *BA*, su extremo *M* caiga sobre *CH*, y será *BC* igual con *MS*, largo orizontal correspondiente á la parte *CM* de la linea *CH*; se aplicará despues el instrumento en el punto *M*, y se hará lo mismo yendo ácia *H*; y si se encontrase 20 veces el largo *BC*, se inferirá que la linea orizontal correspondiente es de 20 estadales ó 200 pies.

Fúndase esta práctica en que por ser el plomo siempre perpendicular al orizonte, es patente que el brazo *BC* será orizontal mientras se mantenga el cordel en la mues-
171. ca *AB*. Supóngase, pues, ahora que midiéndose de este mo-

modo la linea *AP*, se hallen 10 estadales, y que la linea Fig.
AD tenga 25, el rectángulo propuesto será de 250 estadales quadrados.

923 Si se quisiese *medir el trapecio* ABCD, *que suponemos estar en cuesta*; se tirará por un punto *a* de la base mayor una perpendicular á las bases paralelas; se medirán las dos bases, y multiplicando la mitad de su suma por la orizontal correspondiente á la linea *ba*, el producto expresará la superficie orizontal que se busca. 169.

Esto se funda en que la altura del trapecio orizontal que corresponde al trapecio propuesto, es igual á la linea orizontal correspondiente á *ba*; pero la superficie del trapecio es igual (500) al producto de su altura por la semisuma de sus bases paralelas; luego &c.

924 Para *medir la superficie orizontal de un triángulo en cuesta* ABC; se baxará desde el vértice del ángulo *B* la perpendicnlar *BP* á la base *AC* que se supone orizontal ó paralela al orizonte; se medirá el largo orizontal correspondiente á la linea *BP*; el producto de esta orizontal por la mitad de la base *AC* expresará la superficie que se busca. 173.

Pero si la linea *AC* estuviese en cuesta de la derecha á la izquierda v. gr. al mismo tiempo que *BP* lo está de arriba abaxo, se medirá con la esquadra la orizontal *AH* correspondiente á *AC*, y se considerará *AH* como base del triángulo. Del mismo modo, si en el rectángulo *ABCD*, no solo los lados *AB*, *CD* estuviesen en cuesta

de

de arriba abaxo, sino que los lados BC, AD lo estuviesen tambien de la izquierda á la derecha, se medirá la orizontal AI correspondiente á la base AD, y se tomará AI por base, y AP por altura del triángulo propuesto; multiplicando una por otra estas dos lineas, su producto será la superficie orizontal del triángulo.

925 Es de notar 1.° que si el terreno tuviese pendientes desiguales, se le debe reducir á triángulos, de modo que la cuesta de cada triángulo sea uniforme, y con ellos se practicará lo que acabamos de proponer. Tambien se hará lo mismo que si se quiere levantar el mapa del terreno propuesto, y despues se medirá por medio de una escala la figura del terreno trazada en el papel.

2.° Quando se trata de medir un terreno ó levantar su plan, se pide comunmente su superficie orizontal. El que compra un terreno lleva por lo comun la mira de labrar una casa, plantar árboles, ó sembrarle.

Los árboles y las plantas en general crecen perpendiculares al orizonte; las casas tambien se levantan perpendiculares al orizonte; y el número de árboles que se pueden plantar, la cantidad de grano que se puede coger, y la extension de los edificios corresponden á la superficie orizontal. Y así, sea la que fuere la superficie aparente del terreno, solo se debe atender á la superficie orizontal; luego si esta no es mas que la mitad de la superficie total medida por la cuesta, se ha de pagar la tierra la mitad menos de lo que se pagaría si la superficie de la

cues-

cuesta fuese orizontal; y aun se puede dar algo menos de Fig.
la mitad, porque una tierra en cuesta es menos acomodada que una tierra orizontal.

Si representa *ABC* una montaña cuya base *AC* sea 173.
orizontal, no se podrán plantar en el pendiente *AB* de la montaña mas árboles que en la superficie orizontal correspondiente *AP*, porque si nos figuramos los árboles prolongados, es patente que su distancia apreciada orizontalmente no puede ser mayor en la cuesta que en la llanura.

De los Sólidos.

926 Acerca de los sólidos tampoco ocurre saber otra cosa mas que el modo de hallar su solidez; pero quanto hay que decir en este particular queda ya declarado en los Elementos de Geometría, donde hemos dado métodos muy seguros para medir las diferentes especies de sólidos que ocurren con mas frecuencia.

927 Aquí nos toca enseñar por que caminos se puede hallar la cabida de las vasijas donde hay algun líquido, v. gr. vino, aceyte, &c. cuya operacion suele ofrecerse muy á menudo.

Con este fin considerarémos las vasijas como *compuestas* las mas veces de dos *trozos de cono* como *QRXV*, *STXV*, cuya base *VX* es comun á ambos. Y 174.
como buscar la cabida de una cuba, v. gr. ú de otro vaso qualquiera, es indagar quantas veces cabe en ella una medida determinada, v. gr. un quartillo, una azumbre &c.

Fig. conviene reducir está á una figura regular para que la operacion salga mas fácil y perfecta. Si los vasos por medir tuvieran quadrada su base, reduciríamos á cubo la medida primordial; pero como dichas vasijas son cilíndricas, ó, con muy corta diferencia, cónicas, mejor es medirlas con medida cilíndrica, y reducir por lo mismo á cilindro la medida del azumbre.

175. 928 Hágase, pues, con toda prolixidad un cilindro *AB* de estaño ú hoja de lata, y sépase quanto coge el diámetro de la base. Echénsele una, dos ó tres azumbres v. gr. &c. de líquido que llene la parte *CD*, y nótese la altura *AD* que coja en el cilindro.

Cójase una vara, y señálense en la una de sus caras *EF* divisiones iguales á la altura *AD* que llena el líqui-
176. do en el cilindro. La otra cara *CH* de la misma cara se ha de dividir del mismo modo que antes diximos (717) se señalan las divisiones de la linea de los planos. A cuyo fin sea *GK* perpendicular á *GH*, y sean *GK*, $G1^{o}$ iguales al diámetro *AC*, en cuyo supuesto será $K1^{o}$ el diámetro de un círculo duplo de *AC*, pues se han los círculos unos con otros como los quadrados de sus diámetros (512).

Hágase $G2$ igual con $K1$, será $K2$ el diámetro de un círculo triplo de la base *AC*; haciendo $G3$ igual á $K2$, y prosiguiendo á este tenor, se sacarán los diámetros de todos los círculos, los quales tendrán una razon determinada con el diámetro *AC*.

Si

929 Si se buscase el diámetro de un círculo la mitad menor que *AC*, se dividirán los lados *GK*, *G*1 por medio en *O* y *N*; será *ON* el diámetro del círculo que se pide. Porque un círculo cuyo diámetro es *OG* ó *GN*, es la quarta parte del círculo *AC*, á cuya suma es igual el círculo cuyo diámetro es *ON*. Fig.

930 Por medio de la vara dividida como hemos declarado, se puede medir la cabida de qualquiera vaso cilíndrico *LMNO*. Se medirá primero la base *MN*, y supongamos que sea *MN* igual á *G*3; el círculo cuyo diámetro fuese *MN*, será triplo del círculo *AC*; y por consiguiente si el vaso propuesto se llenase hasta *P*, en el supuesto de ser *MP* igual con *AD*, en la parte *MP* del vaso cabrá tres veces mas líquido que en *AD*. Mídase despues la altura *LM* con la cara de la vara que señala las alturas; y en el supuesto de que coja cinco divisiones, el producto 15 de la base 3 por la altura 5 manifestará que caben en el vaso *MO* quince azumbres. 177. 175.

931 Este método sería perfecto si fuesen iguales las dos bases de las dos vasijas que ocurre medir; pero como la mayor parte son cónicas ó formadas de dos conos truncados, como los toneles, &c. sería preciso para hacer la operacion con toda la puntualidad posible concluir el cono, medir los dos que resultaren, y restar del mayor el menor.

No obstante los prácticos se valen para medir un cono truncado de otro artificio menos complicado. Buscan la área de la base *ABCD*, y la de la base *MNOP*; suman 178

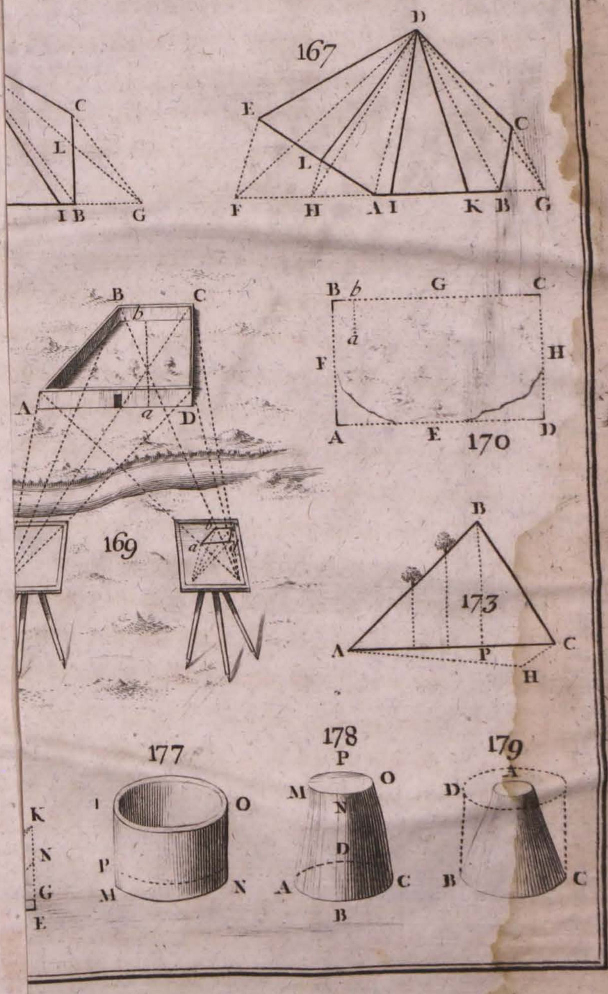
Fig. la una con la otra, y toman la mitad de la suma para sacar una base media que multiplican por la altura del cono, y así sacan su cabida.

Pero esta práctica, aunque muy seguida, dá un re-
179. sultado errado quando hay mucha diferencia entre las dos bases. Sea *ABC* un cono quasi perfecto, de modo que siendo el círculo en *A* muy pequeño, sea mucha la diferencia entre las dos bases del cono truncado. Por la práctica declarada se buscará una base media entre la base *A* y la base *BC*, la qual será con muy corta diferencia la mitad del círculo *BC*, ó algo mayor. Si se multiplica esta base media por la altura del cono, el producto expresará un cilindro que vendrá á ser la mitad del cilindro *DC*. Pero el cono *ABC* no es mas que el tercio (604) del cilindro *BD*; luego la práctica propuesta puede dar en algunas ocasiones una medida muy errada.

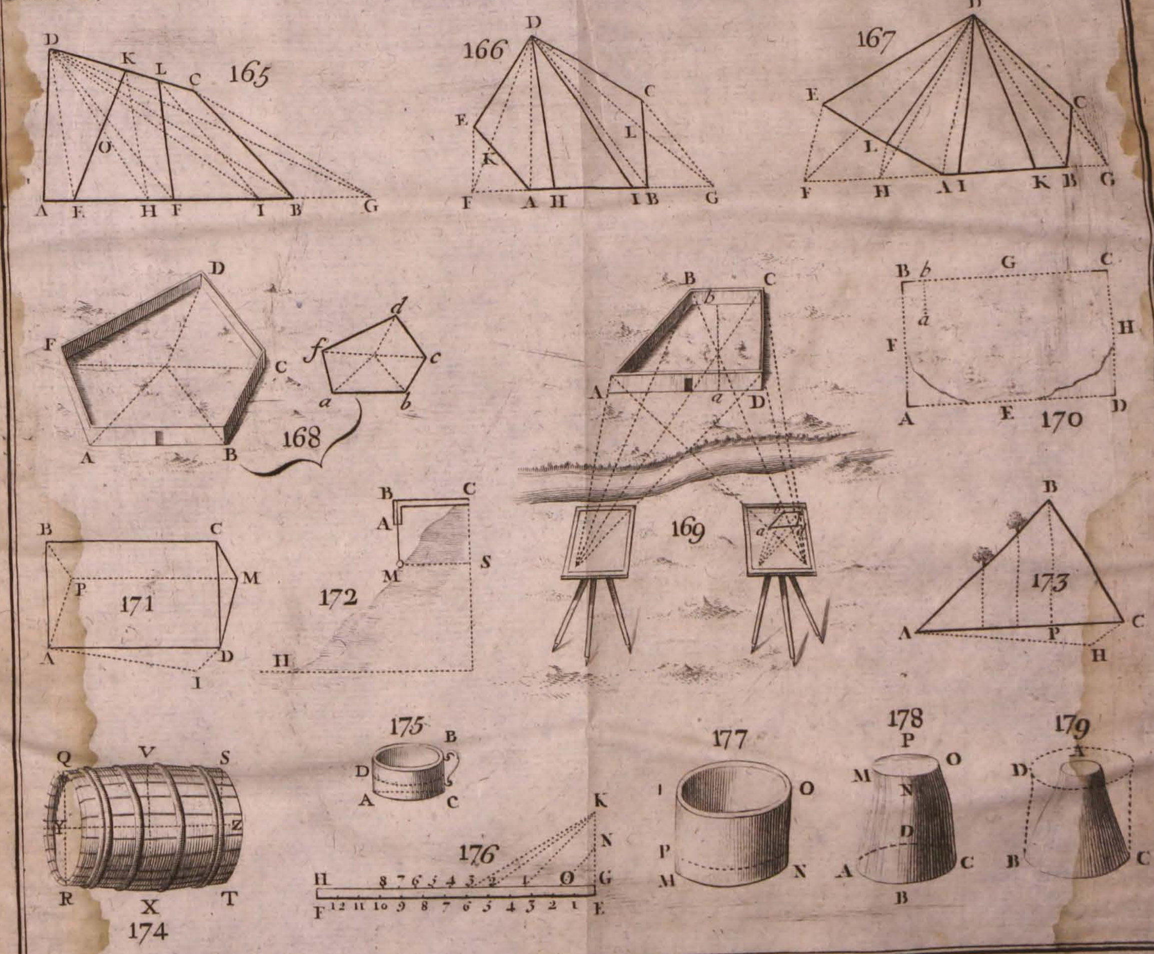
Infiérese de lo dicho, que en los casos comunes, donde es muy corta la diferencia entre las dos bases del vaso, cuya cabida se desea determinar, se podrá seguir el método.

174. 932 En virtud de todo lo declarado hasta aquí se podrá hallar la cabida de un tonel *QRST*. 1.º se medirá con la vara de que hemos hablado (928) el diámetro *VX*; y como la base *QR* es algo menor, se medirán el diámetro *QR* y la base; se tomará otra media entre los dos; si la primera; esto es, *VX* fuese igual á la linea *G3*
176. y *QR* igual con *G2*, la verdadera base será la mitad de

la


167
169
170
173
177
178
179

Tomo 1. Plana 596.



la suma de estos dos números, esto es, $2\frac{1}{2}$; 2.° Mídase el largo *YZ*, que supongo igual á la parte *E*8 de la cara, cuyas divisiones representan las alturas de los cilindros; multiplíquese $2\frac{1}{2}$ por 8, y el producto 20 expresará que caben en el tonel *QRTS* veinte azumbres.

Porque podemos considerar un tonel como un cilindro, cuya base sea igual á la base media entre el suelo y el vientre del tonel; luego &c.

FIN
DEL TOMO PRIMERO.